

УДК 624.131.522

**О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ОСНОВАНИЯ  
АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОГО ШТАМПА  
ПРИ КОНЕЧНОМ ЗНАЧЕНИИ ВЕЛИЧИНЫ  
КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ ПО КОНТАКТУ  
«ШТАМП-ГРУНТ»**

**Богомолов А.Н., Ушаков А.Н.\*, Богомолова О.А.\***

*\*Волгоградский государственный архитектурно-строительный  
университет, г. Волгоград, Россия*

*Пермский национальный исследовательский политехнический  
университет, г. Пермь, Россия*

Рассмотрено напряженное состояние грунтового основания абсолютно твердого штампа при конечном значении величины коэффициента трения по контакту «штамп-основание». Установлено, что в общем случае распределение напряжений в грунтовом основании зависит как от величины коэффициента бокового давления грунта, так и от численного значения величины коэффициента трения по рассматриваемому контакту. Исключение составляет случай отсутствия трения, для которого картины изолиний соответствующих компонент напряжения в основании под абсолютно жестким штампом не зависят от коэффициента бокового давления грунта.

The stress state of soil foundation of solid punch at a finite value of the coefficient of friction at the contact «stamp-base» was considered. It was found that in general the distribution of stresses in the soil depends on the basis of the coefficient of lateral soil pressure and on the numeri-

cal values of the friction coefficient of the subject terminal. The exception is the absence of friction, for which the pattern contour corresponding components of the stress at the base of a rigid stamp is not dependent on the coefficient of lateral earth pressure.

Рассмотрим абсолютно жесткий штамп с прямолинейным горизонтальным основанием при условии, что на границе штамп – грунт коэффициент трения принимает постоянное значение. Будем считать, что главный вектор внешних сил, действующих на штамп, имеет вид

$$X = 0, \quad Y = -P, \quad (1)$$

где  $P$  – заданная положительная величина.

Пусть отрезок  $L$  границы полуплоскости, соприкасающийся со штампом, расположен симметрично относительно начала координат и имеет длину  $2a$ , так что для точек  $t$  отрезка  $L$  имеем:  $-a \leq t \leq a$ . Определим напряженное состояние в точках полуплоскости.

Известно [1], что в случае плоской задачи теории упругости компоненты напряжения  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 \left[ \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right] = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad (2)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left[ (z - z) \Phi'(z) - \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} \right] \quad (3)$$

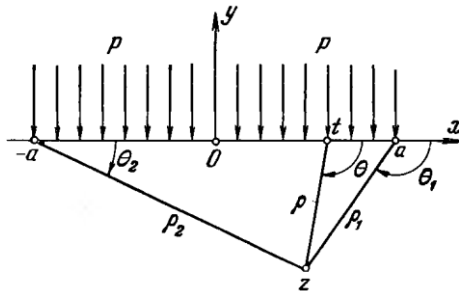


Рис. 1. Расчетная схема задачи (Цитируется по работе [1])

Функция напряжения для рассматриваемого случая [1, с. 433] имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{P(1+ik)e^{\pi i\alpha}}{2\pi(a+z)^{\frac{1}{2}+\alpha}(a-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}, \quad (4)$$

где  $k$  – коэффициент трения, а  $\alpha$  – некоторый постоянный параметр, связанный с коэффициентом трения  $k$  условием

$$\operatorname{tg} \pi\alpha = k \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}, \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \quad (5)$$

где  $\varkappa = 3 - 4\nu$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона, связанный с коэффициентом бокового давления  $\xi_0$  соотношением  $\xi_0 = \nu(1-\nu)^{-1}$ . Значения  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1/2$  соответствуют случаю отсутствия трения ( $k=0$ ) и бесконечно большого его значения ( $k \rightarrow \infty$ ).

Перейдем к вычислению компонент напряжения.

Представим (4) в виде

$$\Phi(z) = \frac{P(1+ik)e^{\pi i\alpha}}{2\pi} e^{-\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\ln(a+z)} e^{-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ln(a-z)}, \quad (4')$$

и выберем ветвь логарифма так, как это было сделано в [1, с. 352].

Тогда получим

$$\Phi(z) = \frac{P}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha \left[ -\sin r - k \cos r + i(\cos r - k \sin r) \right]_2$$

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{P}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha \left[ \sin r - k \cos r - i(\cos r + k \sin r) \right]_2$$

$$\Phi'(z) = \frac{P}{2\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha \left[ l_1 - kl_2 + i(l_2 + kl_1) \right]_2$$

где  $l_1 = -(h_1 \sin s + h_2 \sin t)$ ,  $l_2 = h_1 \cos s + h_2 \cos t$ ,

$$h_1 = -\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \frac{1}{\rho_2 \sqrt{\rho_1 \rho_2}}, \quad h_2 = \left(-\frac{1}{2} + \alpha\right) \frac{1}{\rho_1 \sqrt{\rho_1 \rho_2}},$$

$$r = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \alpha(\theta_2 - \theta_1), \quad s = \frac{\theta_1 + 3\theta_2}{2} + \alpha(\theta_2 - \theta_1),$$

$$t = \frac{3\theta_1 + \theta_2}{2} + \alpha(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\theta_1 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x}, \quad \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x},$$

$$\rho_1 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(a+x)^2 + y^2}.$$

После соответствующей подстановки соотношения (2) и (3) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi \sqrt{\rho_1 \rho_2}} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha (\sin r + k \cos r), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= \\ &= 2 \left\{ \frac{Py}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha \left[ (l_2 + kl_1) - i(l_1 - kl_2) \right] - \frac{P}{\pi \sqrt{\rho_1 \rho_2}} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha (k \cos r + ik \sin r) \right\}. \end{aligned}$$

Теперь легко записать выражения для компонент напряжений:

$$\sigma_x = -\frac{Py}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha (l_2 + kl_1) - \frac{P}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} (\sin r + 2k \cos r), \quad (6)$$

$$\sigma_y = \frac{Py}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha (l_2 + kl_1) - \frac{P}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \sin r, \quad (7)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Py}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha (l_1 - kl_2) + \frac{P}{\pi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} k \sin r. \quad (8)$$

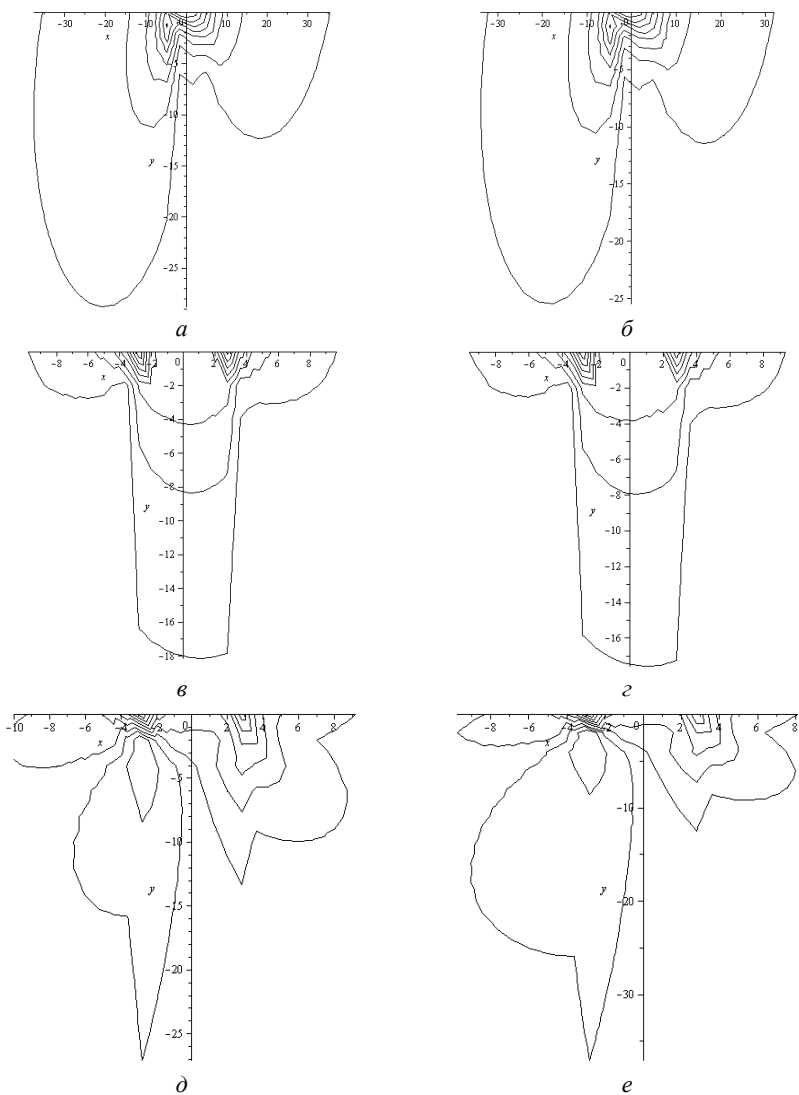


Рис. 2. Картины изолиний горизонтального  $\sigma_x$  (а–б), вертикального  $\sigma_y$  (в–г) и касательного  $\tau_{xy}$  (д–е) напряжений в основании штампа при  $\alpha = 3$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $P_0 = 1$ ,  $\nu = 0,42$  для глинистого грунта (левый столбец) и при  $\alpha = 3$ ,  $\alpha = 0,022$ ,  $P_0 = 1$ ,  $\nu = 0,3$  для песчаного грунта (правый столбец) при  $k = 0,25$

Прежде чем продолжить изложение материала, отметим следующее обстоятельство. Формулы (6–8) получены и приведены нами ранее в работе [2], там же приведены картины изолиний компонент напряжений в основании штампа при конкретных значениях расчетных параметров (см. рис. 2). Коэффициент трения бетона по грунту, согласно [3], принят равным  $k = 0,25$ .

Как видно из рис. 2, картины изолиний всех трех компонент напряжения асимметричны относительно вертикальной оси. Это побудило авторов сделать весьма смелое предположение о возможности одностороннего выпора грунта из-под штампа, когда его основание однородно и изотропно. Однако это не так.

Оказалось, что компоненты напряжения, величины которых определяются формулами (6–8), обладают симметрией относительно  $\alpha$  и  $x$ , такой что

$$\sigma_x(-\alpha, -x, y) = \sigma_x(\alpha, x, y),$$

$$\sigma_y(-\alpha, -x, y) = \sigma_y(\alpha, x, y), \quad \tau_{xy}(-\alpha, -x, y) = -\tau_{xy}(\alpha, x, y). \quad (9)$$

Это утверждение легко проверить, например, рассмотрев выражение для вертикальной компоненты напряжения  $\sigma_y$ , и второго выражения из соотношений (9).

Обозначим  $f(-\alpha, -x, y) = \bar{f}$ .

Нетрудно видеть, что

$$\bar{\rho} = \left( \frac{\rho_1(-x, y)}{\rho_2(-x, y)} \right)^{-\alpha} = \left( \frac{\rho_1(x, y)}{\rho_2(x, y)} \right)^{\alpha} = \rho, \\ \rho_1(-x, y)\rho_2(-x, y) = \rho_1(x, y)\rho_2(x, y). \quad (10)$$

Покажем, что  $\sin \bar{r} = \sin r$ . Действительно, имеем

$$\begin{aligned}
\sin \bar{r} &= \sin \left( \frac{\pi - \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} + \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x}}{2} - \alpha \left( \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x} + \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \pi \right) \right) = \\
&= \sin \left( \frac{\pi}{2} - \left[ \frac{\operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x}}{2} + \alpha \left( \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x} + \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \pi \right) \right] \right) = \\
&= \cos \left( \frac{\operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x}}{2} + \alpha \left( \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x} + \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \pi \right) \right) = \\
&= \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x}}{2} + \alpha \left( \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a-x} + \operatorname{arctg} \frac{|y|}{a+x} - \pi \right) \right) = \\
&= \sin r.
\end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned}
\cos \bar{r} &= -\cos r, \quad \sin \bar{s} = -\sin t, \\
\sin \bar{t} &= -\sin s, \quad \cos \bar{s} = \cos t, \\
\cos \bar{t} &= \cos s.
\end{aligned} \tag{12}$$

Тогда, с учетом соотношений (10) – (12), получаем

$$\bar{l}_1 = -l_1, \quad \bar{l}_2 = l_2. \tag{13}$$

Применяя соотношения (5), (10–13), для компоненты вертикального напряжения имеем

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_y &= \sigma_y(-\alpha, -x, y) = \\ &= \frac{Py}{\pi} \left( \frac{\rho_1(-x, y)}{\rho_2(-x, y)} \right)^{-\alpha} (\overline{l}_2 - k\overline{l}_1) - \frac{P}{\pi} \left( \frac{\rho_1(-x, y)}{\rho_2(-x, y)} \right)^{-\alpha} \frac{1}{\sqrt{\rho_1(-x, y)\rho_2(-x, y)}} \sin \overline{r} = \\ &= \frac{Py}{\pi} \left( \frac{\rho_1(x, y)}{\rho_2(x, y)} \right)^{\alpha} (l_2 + kl_1) - \frac{P}{\pi} \left( \frac{\rho_1(x, y)}{\rho_2(x, y)} \right)^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\rho_1(x, y)\rho_2(x, y)}} \sin r = \\ &= \sigma_y(\alpha, x, y) = \sigma_y. \end{aligned}$$

Аналогичным образом проверяются и оставшиеся два соотношения из (9).

Таким образом, при конечном значении величины коэффициента трения, картины изолиний всех трех компонент напряжения в однородном и изотропном основании симметричны относительно вертикальной оси.

На рис. 3–8 в качестве примеров приведены картины изолиний напряжений для двух типов грунтов при  $P = 1$ ,  $a = 35$  и различных коэффициентах трения  $k$ ; соответствующие значения величин  $\alpha$  получены при помощи формулы (5).

Заметим, что значения параметра  $\alpha$ , полученные при помощи формулы (5), зависят как от значений коэффициента трения, так и от величин коэффициента Пуассона, определяющего тип грунта. А это значит, и это подтверждает анализ рис. 3–8 и формул (6–8), что и значения компонент напряжения в соответствующих точках основания зависят от  $k$  и  $\xi_0$ . Исключение составляет лишь случай отсутствия трения, т.е.  $k = 0$ . Согласно (5), независимо от значений коэффициента Пуассона, численное значение  $\alpha = 0$ . Таким образом, картины изолиний компонент напряжения под абсолютно жестким штампом с прямолинейным горизонтальным основанием при  $k = 0$  для любых типов грунтов будут одинаковыми.



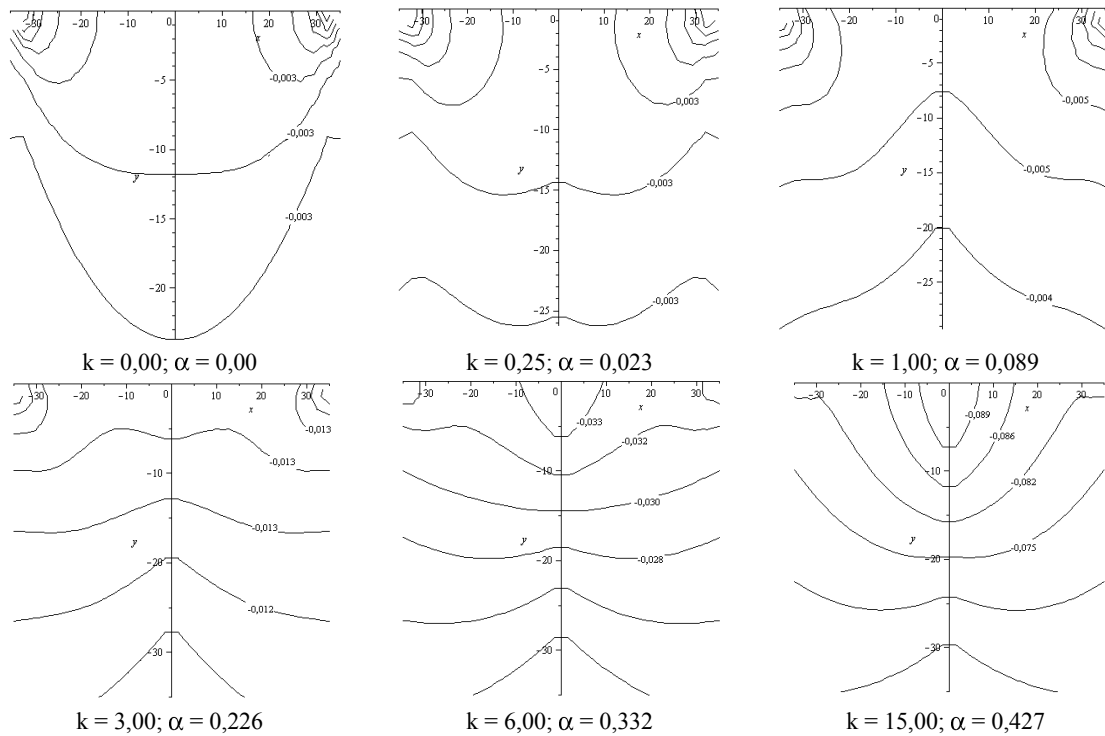
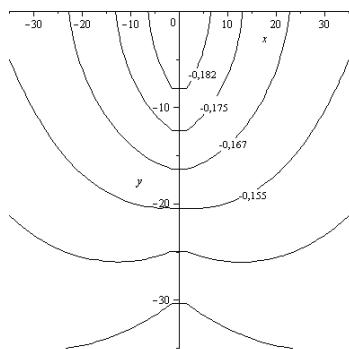
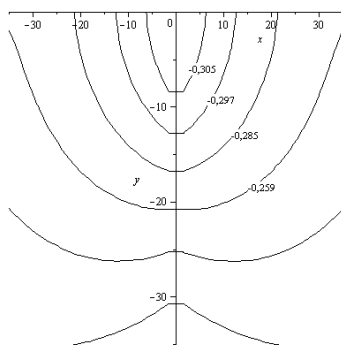


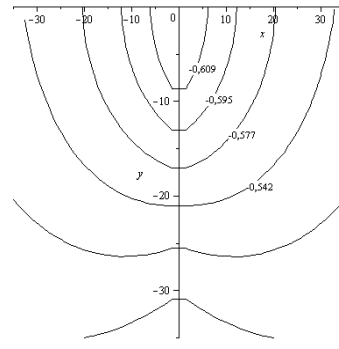
Рис. 3. Изолинии компоненты горизонтального напряжения для песчаного грунта ( $\nu = 0,3$ )



$k = 30,00; \alpha = 0,463$

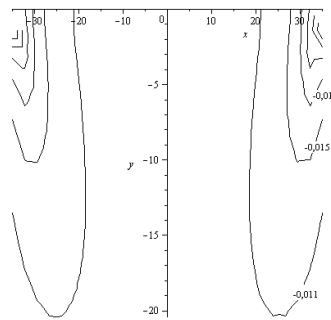


$k = 50,00; \alpha = 0,478$

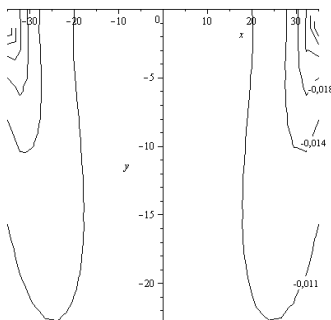


$k = 100,00; \alpha = 0,489$

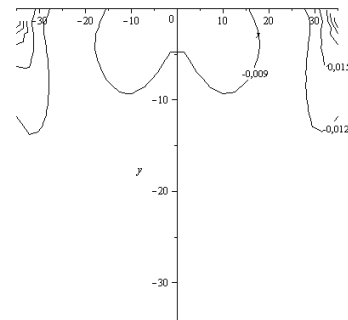
Рис. 3. Окончание



$k = 0,00; \alpha = 0,00$

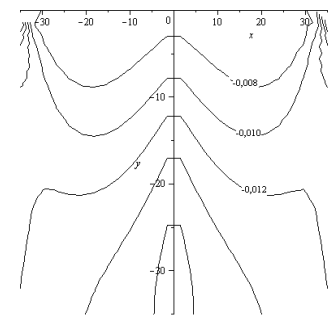


$k = 0,25; \alpha = 0,023$

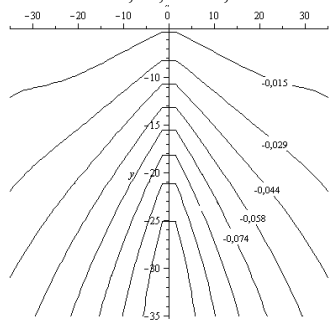


$k = 1,00; \alpha = 0,089$

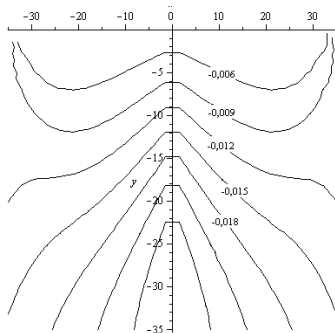
Рис. 4. Изолинии компоненты вертикального напряжения для песчаного грунта ( $\nu = 0,3$ ).



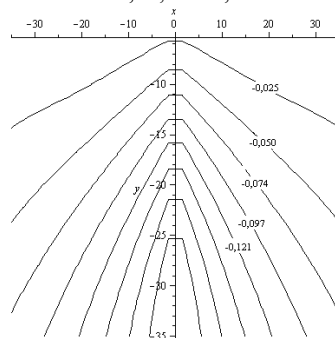
$k = 3,00; \alpha = 0,226$



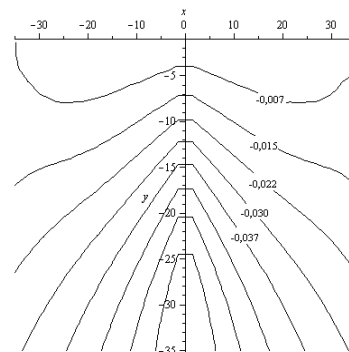
$k = 30,00; \alpha = 0,463$



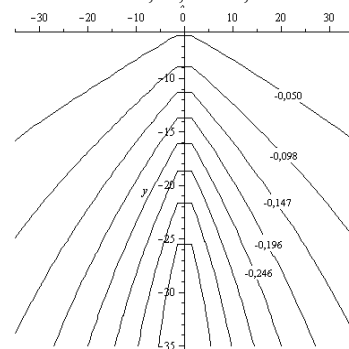
$k = 6,00; \alpha = 0,332$



$k = 50,00; \alpha = 0,478$



$k = 15,00; \alpha = 0,427$



$k = 100,00; \alpha = 0,489$

Рис. 4. Окончание

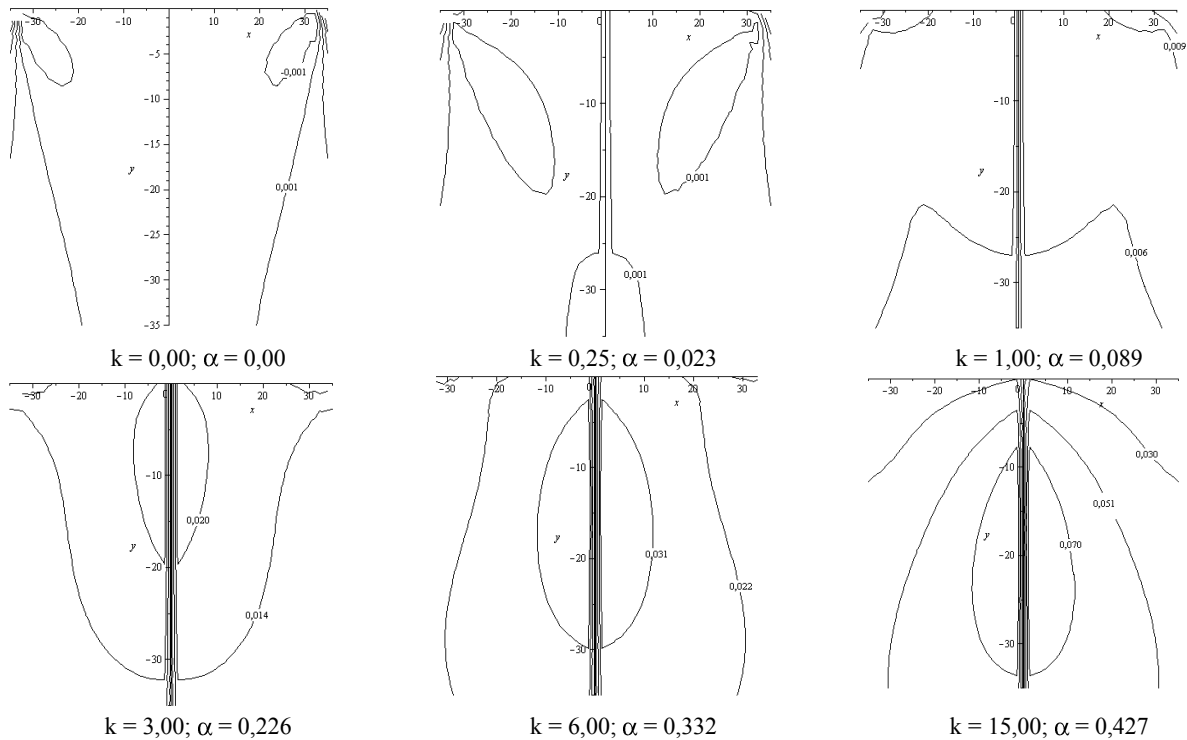
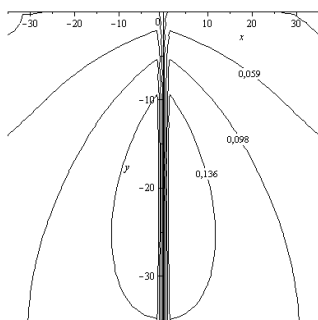
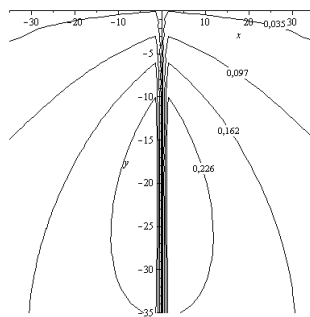


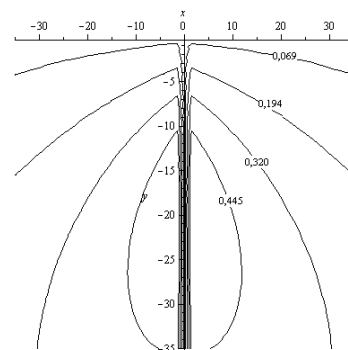
Рис. 5. Изолинии компоненты касательного напряжения для песчаного грунта ( $\nu = 0,3$ )



$k = 30,00; \alpha = 0,463$

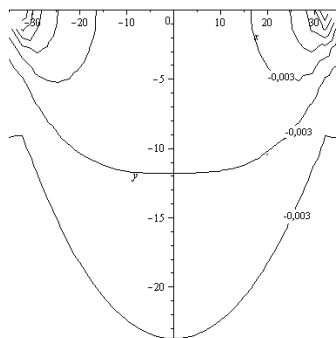


$k = 50,00; \alpha = 0,478$

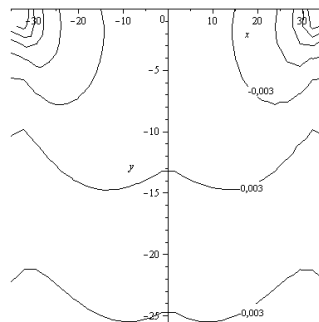


$k = 100,00; \alpha = 0,489$

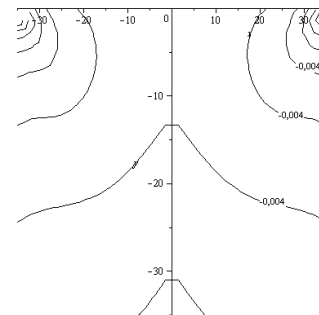
Рис. 5. Окончание



$k = 0,00; \alpha = 0,00$



$k = 0,25; \alpha = 0,011$



$k = 1,00; \alpha = 0,044$

Рис. 6. Изолинии компоненты горизонтального напряжения для глинистого грунта ( $\nu = 0,42$ ).

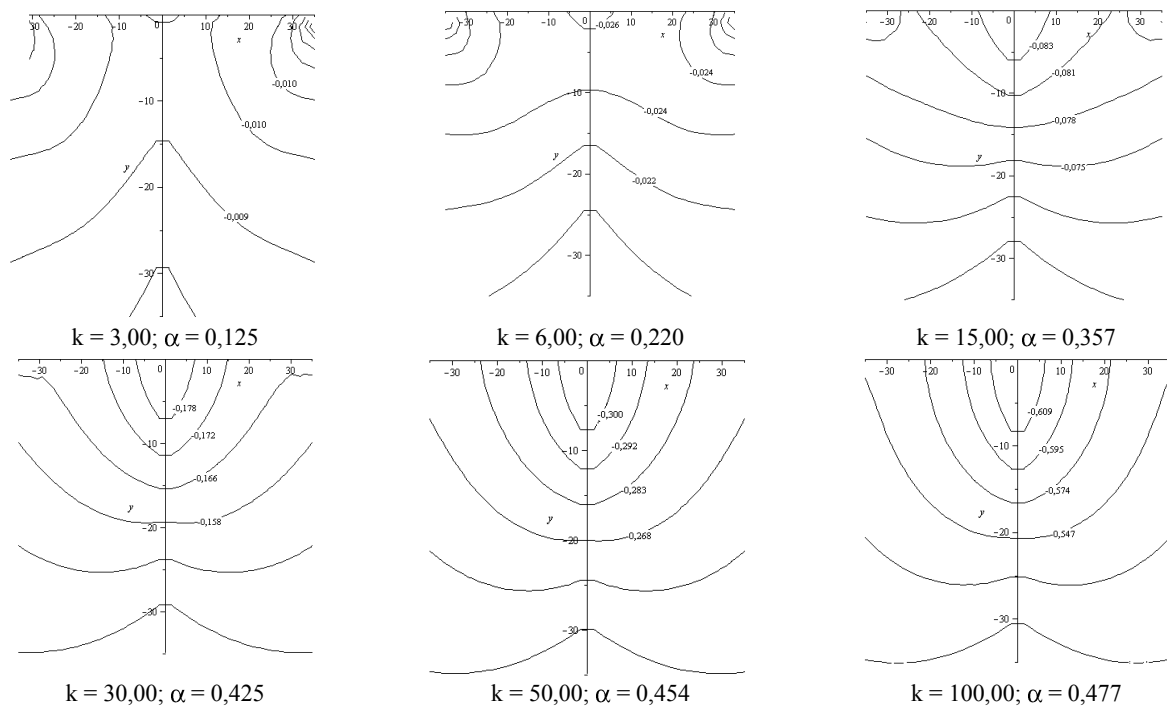


Рис. 6. Окончание

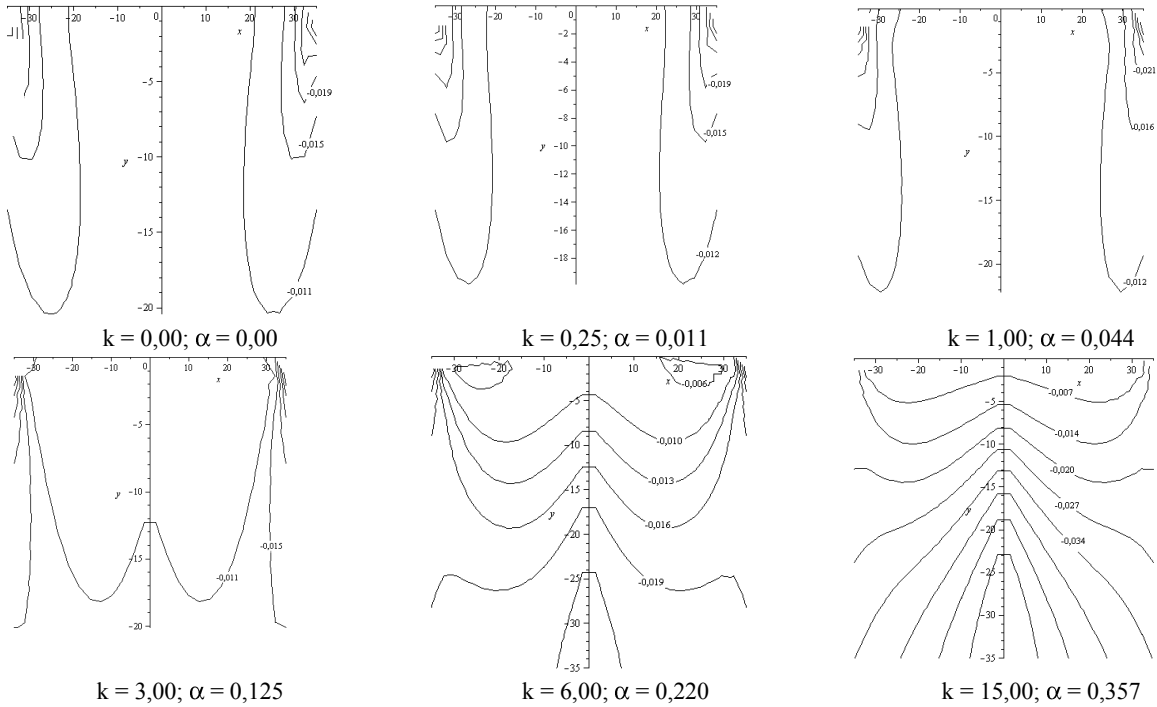
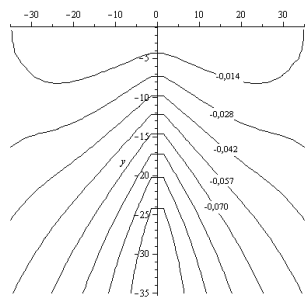
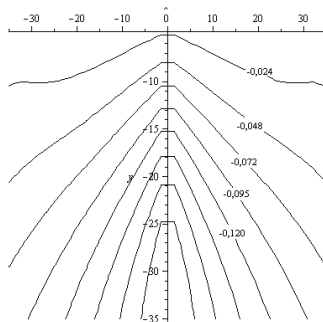


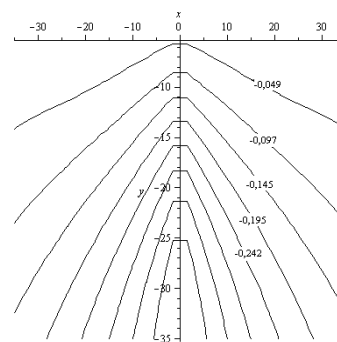
Рис. 7. Изолинии компоненты вертикального напряжения для глинистого грунта ( $\nu = 0,42$ )



$k = 30,00; \alpha = 0,425$

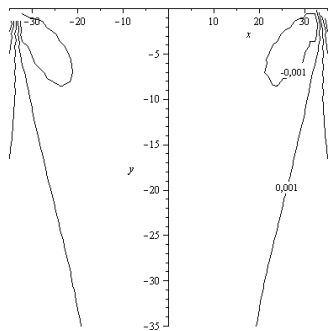


$k = 50,00; \alpha = 0,454$

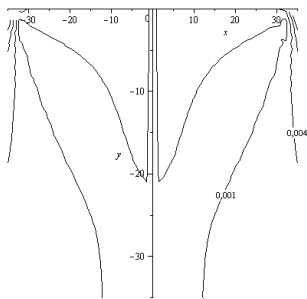


$k = 100,00; \alpha = 0,477$

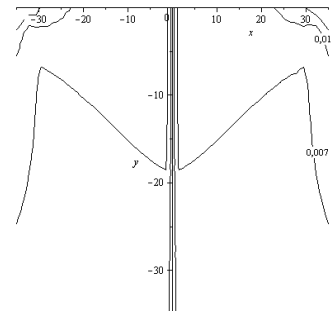
Рис. 7. Окончание



$k = 0,00; \alpha = 0,00$



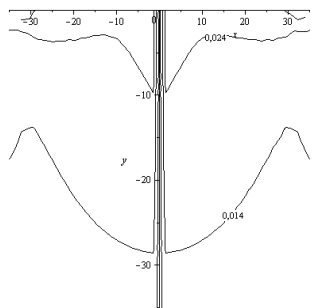
$k = 0,25; \alpha = 0,011$



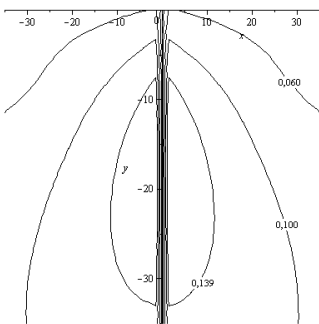
$k = 1,00; \alpha = 0,044$

Рис. 8. Изолинии компоненты касательного напряжения для глинистого грунта ( $\nu = 0,42$ )

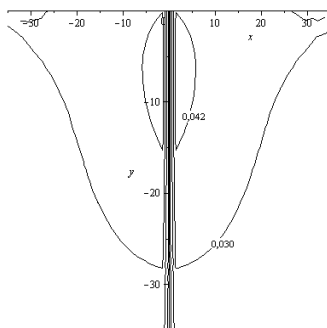




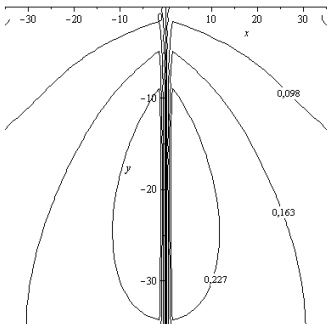
$k = 3,00; \alpha = 0,125$



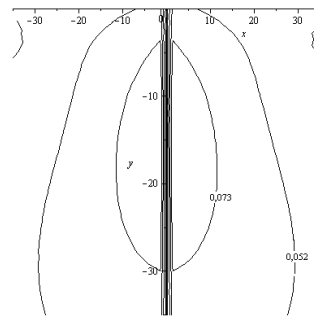
$k = 30,00; \alpha = 0,425$



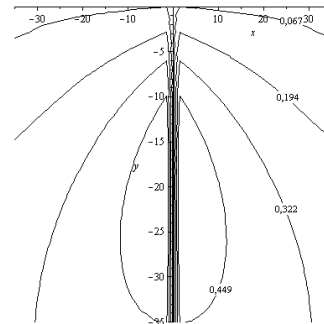
$k = 6,00; \alpha = 0,220$



$k = 50,00; \alpha = 0,454$



$k = 15,00; \alpha = 0,357$



$k = 100,00; \alpha = 0,477$

Рис. 8. Окончание

## Литература

1. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

2. Богомолов, А.Н. Об одностороннем выпоре грунта однородного основания из-под центрально нагруженного фундамента / А.Н. Богомолов, А.Н. Ушаков, О.А. Богомоллова // Вестник гражданских инженеров : науч.-техн. журн. – СПб : СПбГАСУ, 2010. – № 1 (22). – С. 85–90.

3. Основания, фундаменты и подземные сооружения. Справочник проектировщика. – М. : Стройиздат, 1985. – 462 с.