УДК 619.85

Нахождение множества Парето на объединении отдельных паретовских множеств на основе предлагаемого алгоритма их упорядочивания

Чебаков С. В.
Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
info@chebakov.com

Рассматривается задача нахождения множества Парето на объединении конечного числа отдельных паретовских множеств, которая возникает при разработке алгоритма организации параллельных вычислений для нахождения паретовского множества на конечном числе альтернативных вариантов.

Общая схема параллельного алгоритма нахождения множества Парето может быть представлена следующим образом. На первом шаге производится разбиения всего множества альтернативных вариантов на N отдельных подмножеств, число которых равно числу одновременно доступных процессоров. На каждом подмножестве в параллельном режиме осуществляется поиск собственного паретовского множества. В результате из первоначального множества альтернатив будут выделены отдельные паретовские множества P_{1j}, $j = 1, N$. Если все элементы множеств P_{1j} находятся между собой в отношении Парето, то решение задачи заканчивается. В противном случае на следующем шаге требуется определить паретовские элементы на новом множестве допустимых альтернатив, представляющем собой объединение паретовских множеств P_{1j}.

В описываемой схеме алгоритме решения задачи нахождения множества Парето на объединении конечного числа отдельных паретовских множеств предлагается в максимальной степени проводить операции непосредственно с паретовскими множествами и лишь затем рассматривать альтернативы, входящие в данные множества.

Определение 1. Паретовское множество A назовем доминирующим паретовское множество B, если элементы множества A доминируют все элементы множества B.

Определение 2. Паретовское множество A назовем частично доминирующим над множеством B, если существует хотя бы один элемент множества B, доминируемый элементом множества A.

Определение3. Паретовские множества A и B находятся в отношение Парето, если все их элементы находятся между собой в паретовском отношении.

Рассмотрим некоторое паретовское множество P_m. Верхней критериальной границей множества P_m является вектор L^+, чьи координаты представляют собой максимум из возможных значений по каждой координате на всем множестве P_m. Нижней критериальной границей множества является вектор L^-, чьи координаты представляют собой минимум по каждой координате на этом же множестве.

Утверждение 1. Если нижняя критериальная граница паретовского подмножества A доминирует верхнюю критериальную границу паретовского подмножества B, то подмножество A доминирует подмножество B в смысле определения 1.

Используя данное утверждение, можно исключить из рассмотрения паретовские множества с доминируемыми верхними критериальными границами. Однако это условие достаточно жесткое, оно оперирует с критериальными границами целого паретовского множества, и исключение из рассмотрения полностью отдельных паретовских множеств достаточно затруднительно. В работе предлагается алгоритм разбиения паретовских множеств на ряд вложенных друг в друга подмножеств с упорядоченными нижними и верхними критериальными границами, который бы позволял продолжить формирование искомого множества Парето, не переходя к попарным сравнениям отдельных альтернатив.

Рассмотрим некоторое паретовское множество P_m. Определим верхнюю L^+_{m1} и нижнюю L^-_{m1} критериальные границы множества P_m. Выделим из множества P_m те элементы, которые содержат хотя бы одну свою координату либо в векторе L^+_{m1}, либо в векторе L^-_{m1}. Обозначим это подмножество Z^*_{m1}. Множество P^*_{m1} определим следующим образом: $P^*_{m1} = P_m \setminus Z^*_{m1}$. Очевидно, что P^*_{m1} также представляет собой паретовское множество. Построим далее вектора L^+_{m2} и L^-_{m2}, координаты которых представляют собой максимальные и минимальные значения соответствующих координат элементов множества P^*_{m1}. Если все критериальные оценки альтернатив множества P_m не равны между собой, то, исходя из способа их построения, вектор L^-_{m2} доминирует вектор L^-_{m1}, а вектор L^+_{m2} доминируется вектором L^+_{m1}. Из множества P^*_{m1} исключаем элементы, имеющие хотя бы одну координату в векторах L^+_{m2} и L^-_{m2}. На множестве $P^*_{m2} = P^*_{m1} \setminus Z^*_{m2}$ определяем его верхнюю и нижнюю критериальные границы L^+_{m3} и L^-_{m3}. Продолжаем процесс построения векторов L^+_{mj} и L^-_{mj} до тех пор, пока не исчерпаем все элементы множества P_m. Из приведенного алгоритма построения множеств P^*_{mj} следует, что справедливо соотношение:

$$P^*_{mj} = \bigcup_{k=j+1}^{l} Z^*_{mk},\ j = \overline{0, l-1},\ P^*_{m0} = P_m, \qquad (1)$$

где l – число построенных подмножеств Z^*_{mj}. Вектора L^+_{mj} и L^-_{mj} связаны соотношениями:

$$L^+_{m1} > L^+_{m2} > L^+_{m3} > \ldots > L^+_{ml}, \quad L^-_{m1} < L^-_{m2} < L^-_{m3} < \ldots < L^-_{ml}, \qquad (2)$$

где $>$ – символ доминирования.

Подобное разбиение паретовского множества представляет собой отображение, обозначим его F, по описанному выше правилу координат элементов паретовского множества P_m в координаты векторов L^+_{mj} и L^-_{mj}.

Определение 4. Вектора L^+_{mj}, L^-_{mj} назовем симметричными к элементам образующего их подмножества Z^*_{mj}, если каждый элемент из Z^*_{mj} включает хотя бы одну свою координату как в вектор L^+_{mj}, так и в вектор L^-_{mj}.

Соответственно, отображение F назовем симметричным, если все вектора L^+_{mj}, L^-_{mj} являются симметричными. Мы будем рассматривать только симметричные отображения.

Утверждение 3. Если нижняя критериальная граница подмножества P^*_{mj} превосходит нижние критериальные границы некоторых паретовских подмножеств $P^*_{zj}, j = \overline{1,s}$, связанных отношением (2), то подмножество P^*_{mj} и подмножества, являющиеся дополнением до соответствующих паретовских множеств P_z могут находится только в отношении Парето либо быть частично доминируемыми в соответствие с определениями 2 и 3.

Утверждение 4. Если верхняя критериальная граница L^+_{mj} некоторого подмножества P^*_{mj} доминируется верхними критериальными границами заданных паретовских подмножеств $P^*_{zj}, j = \overline{1,s}$, находящимися между собой в отношении (2), и нижняя критериальная граница подмножества P^*_{mj} превосходит нижние критериальные границы этих же подмножеств, также связанных по доминируемости отношением (2), то подмножество P^*_{mj} находится в отношении Парето с подмножествами, являющиеся дополнением до соответствующих множеств P_z.

Утверждения 3, 4 позволяют определить возможные доминируемые подмножества Z^*_{mj}, так и подмножества, находящиеся между собой в паретовском отношении, опираясь только лишь на сравнения по доминируемости между векторами L^+_{mj}, L^-_{mj}.

В работе предложен алгоритм представления множества Парето в виде вложенных друг в друга подмножеств с упорядоченными верхними и нижними критериальными границами. Сформулированы утверждения, позволяющие минимизировать число попарных сравнений между отдельными альтернативами.