Математическое моделирование в прикладных исследованиях и учебном процессе

УДК 517.925

Почти периодические двумерные линейные системы с интегральной разделенностью

Веременюк В. В.

Рассматривается двумерная линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in \mathbf{R}^2,\ t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

с почти периодической матрицей $A(t)$ (см., например, [1], с. 418). Относительно этой системы предполагается, что она является системой с интегральной разделенностью (см., например, [3]).

Перейдем в полярную систему координат $x_1 = r\cos u$, $x_2 = r\sin u$. Получим систему

$$\begin{cases} \dot{u} = U(t,u) \\ \dfrac{\dot{r}}{r} = V(t,u) \end{cases}, \tag{2}$$

где функции $U(t,u)$ и $V(t,u)$ – π-периодичны по u и почти периодичны по t. Через $\lambda[u(t)]$, где $u(t)$ – решение первого из уравнений (2), обозначим предел $\lambda[u(t)] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{t}\int_0^t V(s,u(s))\,ds$. Ясно, что $\lambda[u(t)]$ – показатель Ляпунова [2] решения $x(t) = |x(t)|\cdot(\cos u(t), \sin u(t))^{\mathrm{T}}$ системы (1) (известно, например, [4], что для почти периодических систем с интегральной разделенностью данный предел существует). Доказательство основного результата работы опирается на лемму.

Лемма. Пусть двумерная система (1) является системой с интегральной разделенностью, и $\lambda_1 < \lambda_2$ – ее показатели

Ляпунова. Существуют два решения $u_i(t)$ (здесь и далее $i=1,2$) первого из уравнений (2) с начальными условиями $u_i(0)\in[0,\pi)$ такие, что:

1) функции $\sin u_i(t)$ и $\cos u_i(t)$ – почти периодические,

2) $\lambda[u_i(t)]=\lambda_i$.

Доказательство леммы опирается на геометрический критерий интегральной разделенности линейной системы [3] и известные утверждения о почти периодических функциях [1] и показателях Ляпунова линейных систем [2].

Основным результатом предлагаемой работы является теорема.

Теорема. Почти периодическая двумерная система (1) с интегральной разделенностью с помощью почти периодического ляпуновского преобразования приводится к диагональной системе с почти периодическими коэффициентами на главной диагонали.

Доказательство. Полагаем $B(t)=\begin{pmatrix}\cos u_1(t) & \cos u_2(t)\\ \sin u_1(t) & \sin u_2(t)\end{pmatrix}$, где $u_i(t)$, $i=1,2$, – решения первого из уравнений (2), существование которых устанавливается в лемме. Так как система (1) является системой с интегральной разделенностью, то, используя [5], имеем $\inf\limits_t|\det B(t)|>0$. Это нам дает, что нормы $\|B(t)\|$, $\|B^{-1}(t)\|$ и $\left\|\dfrac{dB(t)}{dt}\right\|$ – ограничены при $t\in\mathbf{R}$. Следовательно, преобразование $x=B(t)y$ является ляпуновским (см., например, [2]). А согласно лемме оно почти периодическое. Далее, как нетрудно проверить, фундаментальная система решений системы (1), состоящая из решений $x_i(t)=|x_i(t)|\cdot(\cos u_i(t),\sin u_i(t))^{\mathrm{T}}$, $i=1,2$, при указанном преобразовании преобразуется к диагональному виду $Y=\mathrm{diag}[|x_1(t)|,|x_2(t)|]$. С учетом второго из уравнений системы (2) получаем $\dot Y=\begin{pmatrix}p_1(t) & 0\\ 0 & p_2(t)\end{pmatrix}\cdot Y$, где $p_i(t)=V(t,u_i(t))$,

$i = 1, 2$, – почти периодические функции (это следует из леммы и свойств функции $V(t, u)$).

Таким образом, преобразованная система является диагональной с почти периодическими коэффициентами на главной диагонали. Теорема доказана.

Литература

1. Демидович, Б. П., Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М., 1967.
2. Былов, Б. Ф. Теория показателей Ляпунова / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. – М., 1966.
3. Миллионщиков, В. М. Мат. заметки / В. М. Миллионщиков. – 1968. – Т. 4, № 2. – С. 173 – 180.
4. Веременюк В. В. Материалы 3-й МНТК "Наука – образованию, производству, экономике", Минск, 2006. – Т. 2. – С. 412–413.
5. Сергеев, И. Н. Дифференциальные уравнения/ И. Н. Сергеев. – 1980. – Т. 16, № 3. – С. 438 – 448.

УДК 539.3

Колебания вязко-упругой балки под воздействием движущейся нагрузки

Крушевский Е. А., Кузнецова А. А.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается движение с постоянной скоростью c нормальной сосредоточенной нагрузки интенсивности $P(x, t)$ по вязкоупругой балке, лежащей на вязкоупругом полупространстве.

В подвижной системе координат, связанной с нагрузкой, задачу можно считать стационарной. При этом уравнения изгиба упругой балки и перемещения в упругом полупространстве имеют вид ([1]):

$$B\frac{d^4 w}{dx^4} + \rho c^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = P(x), \qquad (1)$$