УДК 517.925

О сходимости метода инвариантного погружения по области интегрирования

Политаев Д.Н.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается система n о.д.у. 1-го порядка с неразделенными граничными условиями [1]:

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad g(y(a), y(b)) = 0, \tag{1}$$

где $y:[a,b] \to R^n$, $f: E^{n+1} \to R^n$, E^{n+1} - некоторое (n+1) мерное (t, y) множество, $g: R^n \times R^n \to R^n$.

Предположим, что существует и единственно решение задачи (1), которое далее будем обозначать $y^*(t)$. Дадим обоснование и исследуем сходимость метода инвариантного погружения по области интегрирования [2]. Выполним параметризацию по области интегрирования задачи (1), положив:

$$\left.\begin{aligned} y' = f(t, y), \alpha \le \sigma \le t \le \tau \le \beta, \\ g(y(\sigma), y(\tau)) = 0. \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Решение задачи (2) можно записать в виде:

$$y(t,c) = \begin{cases} U(t,c), t_0^{(o)} \ge t \ge \sigma, \\ V(t,c), t_0^{(l)} \ge t \ge \tau, \end{cases}$$

где $U(t,c)$ и $V(t,c)$ – решение задач Коши:

$$U' = f(t,U), t_0^{(0)} \ge t \ge \sigma, U(t,c)\big|_{t=t_0^{(o)}} = c, \tag{3}$$

$$V' = f(t,V), t_0^{(l)} \ge t \ge \tau, V(t,c)\big|_{t=t_0^{(l)}} = c, \tag{4}$$

а вектор c определяется как решение уравнения

$$G(c, \sigma, \tau) = 0, \tag{5}$$

где $G(c,\sigma,\tau) \equiv g(U(\sigma,c), V(\tau,c))$.

Пусть $\Pi = \{(\sigma,\tau) | a \le \sigma \le t_0^{(o)}, t_0^{(l)} \le \tau \le b\}$.
Предположим, что существует единственное и непрерывное отображение $c : \Pi \to R^n$ такое, что $G(c(\sigma,\tau),\sigma,\tau) \equiv 0$, при $\forall(\sigma,\tau) \in \Pi$. Отметим, что по построению $c(t_0^{(o)}, t_0^{(l)}) = y_0^*$, а $c(a,b) = y^*(t^*)$. Таким образом, в м.и.п. имеется возможность по значению $c(t_0^{(o)}, t_0^{(l)}) = y_0^*$ определить значение $c(t_j^{(o)}, t_j^{(l)})$, последовательно смещаясь по диагонали $\tau = -\sigma + 2t^*$ квадрата Π до тех пор пока мы не достигнем точки (a,b).

Обозначим:

$$L = \{(\sigma,\tau) | a \le \sigma \le t^*, \tau = -\sigma + 2t^*\}, \mathrm{P} = (\sigma,\tau) \in L.$$

Приведем уравнение $G(c,\sigma,\tau) = 0$ к каноническому виду

$$c = \Phi(c,\sigma,\tau), \tag{6}$$

положив, например, $\Phi(c,\sigma,\tau) \equiv c + \mathrm{A}G(c,\sigma,\tau)$, где $\mathrm{A} \in L(R^n, R^n)$ и $\det A \ne 0$. Эта матрица может зависеть от c.

Пусть $P_j = (\sigma_j^{(o)}, \tau_j^{(l)})$, где $\sigma_j^{(o)} = \sigma_{j-1}^{(o)} - \Delta\sigma_j$, $j = \overline{1,N}$. Зафиксируем в (6) σ и τ по правилу $\sigma = \sigma_j^{(o)}$, $\tau = \tau_j^{(l)}$. Тогда (6) можно записать в виде

$$c_j = \Phi(c_j, \mathrm{P}_j), \quad j = \overline{1,N}. \tag{7}$$

Итерационный процесс для (7) имеет форму:

$$\left.\begin{array}{c} c_j^{(k+1)} = \Phi(c_j^{(k)}, \mathrm{P}_j), k = 0,1,\ldots, p_{j-1}, c_j^{(o)} = c_{j-1}^{(\mathrm{P}_{j-1})}, \\ j = 2,3,\ldots, N-1, c_1^{(o)} = y_0^*, c_N^{(k+1)} = \Phi(c_N^{(k)}, P_N), \\ c_N^{(o)} = c_{N-1}^{(P_{N-1})}, k = 0,1,2,\ldots \end{array}\right\} \quad (8)$$

Пусть отображение $\Phi : Д \times [a,t^*] \times [t^*,b] \subset R^{n+2} \to R^n$ дифференцируем по Фреше в точке $c \in \mathrm{int}(Д)$, т.е. $\exists$ такой оператор $\dfrac{\partial \Phi(c,P)}{\partial c} \in L(R^n, R^n)$, что

$$\lim_{\|h\|\to 0} \left(\frac{1}{\|h\|}\right) \left\| \Phi(c+h,P) - \Phi(c,P) - \frac{\partial \Phi(c,P)}{\partial c} h \right\| = 0.$$

Отметим, что для вычисления $G(c_j^{(k)}, P_j)$ необходимо найти значения решений следующих задач Коши на концах отрезков:

$$U' = f(t,U), t^* \geq t \geq \sigma_j^{(o)}, U(t, c_j^{(k)})\Big|_{t=t^*} = c_j^{(k)},$$

$$V' = f(t,V), t^* \leq t \leq \tau_j^{(l)}, V(t, c_j^{(k)})\Big|_{t=t^*} = c_j^{(k)},$$

т.е. значения $U(\sigma_j^{(o)}, c_j^{(k)})$ и $V(\tau_j^{(l)}, c_j^{(k)})$ и вычислить $G(c_j^{(k)}, P_j) \equiv g(U(\sigma_j^{(o)}, c_j^{(k)}), V(\tau_j^{(l)}, c_j^{(k)}))$.

Сходимость итерационного процесса (8) устанавливается следующими теоремами.

Теорема 1. Пусть существует и непрерывно дифференцируемо отображение $c : L \to \mathrm{int}(D) \subset R^n$, удовлетворяющее условию $c(P) \equiv \Phi(c(P), P)$ и при $\forall P \in L$. Если отображение $g : R^n \times R^n \to R^n$ непрерывно дифференцируемо по обоим аргументам $U, V \in R^n$, а отображение $U : [a,t^*] \times R^n \to R^n$ и $V : [t^*,b] \times R^n \to R^n$ непрерывно дифференцируемо по c для всех $c \in D$ и

спектральный радиус $\rho[\frac{\partial\Phi(c,P)}{\partial c}] \le q(P) < 1$ и при $c = c(P)$ и $P \in L$, то существует такое $\delta_0 > 0$, что $\|\Phi(c,P) - \Phi(c(P),P)\| \le \mu\|c - c(P)\|$, где $\mu = const$ и $0 < \mu < 1$,
$\forall(c,P) \in \Omega_\delta = \{(c,P) \in R^{n+2} \| \|c - c(P)\| \le \delta_0, P \in L\}$.

Теорема 2. Пусть $\{c_i^{(k)}\}$ - последовательности, определяемые итерационным процессом (8). Если выполняются условия теоремы 1, то 1) существует разбиение диагонали L точками $\Theta_i, (t^*, t^*) = \Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_N = (a,b)$ и целые положительные числа $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_N$ - номера итераций, такие что $\lim\limits_{k\to\infty} c_i^{(k)} = c(\Theta_i)$, $i = 1,2,...,N$; 2) $c_i^{\eta_i} \in D_0 \subset \mathrm{int}(D)$, $i = 1,2,...,N-1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} c_N^{(k)} = c(a,b) = y^*(t^*)$.

Литература

1. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989.
2. Монастырный, П. И. К теории метода инвариантного погружения для граничных задач / П. И. Монастырный. – ДАН БССР, 1978. – XXII, № 4. – С. 303–306.
3. Шалашилин, В. И. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация / В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов. – Москва, 1999.