УДК 539.3

О разложении функций в тригонометрические ряды специального вида.

Акимов В. А.
Белорусский национальный технический университет

Составной частью одного из важнейших разделов высшей математики, занимающегося исследованием ортогональных рядов, является обстоятельно изученная тема, получившая название «Ряды Фурье»[1,2]. Она имеет большое научное и прикладное значение. Начиная с XIX века, ею занимаются многие известные ученые всего мира. Но, не смотря на это, еще не получили своего завершения исследования разложения в ряды вида

$$f_н(x) = \sum_k A_k^н \sin kx + \sum_k B_k^н x \cos kx,$$

$$f_н(x) = \sum_k C_k^н (\sin kx + x \cos kx). \qquad (1)$$

Здесь $f_n(x)$ - некоторая нечетная бесконечно дифференцируемая функция, A_k^n, B_k^n, C_k^n - искомые коэффициенты. Аналогичный вид имеет место разложение в четные ряды

$$f_ч(x) = \sum_k A_k^ч \cos kx + \sum_k B_k^ч x \sin kx,$$

$$f_ч(x) = \sum_k C_k^ч (\cos kx + x \sin kx). \qquad (2)$$

Если исходная функция не является ни четной ни нечетной, то ее разложении в тригонометрический ряды будут присутствовать коэффициенты вида (1) и вида (2)

Возьмем гладкую, бесконечно дифференцируемую функцию $f(x) = e^{ax}$ -1≤x≤1 и выделим из нее нечетную $f_н(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} = Shax$ и четную

$$f_ч(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}=Chax$$ составляющие.

Для определенности рассмотрим разложение лишь в нечетный ряд, так как вопрос о разложении в четный ряд решается, аналогично, а для разложения в ряд общего вида их следует просуммировать

Отметим то обстоятельство, что метод Фурье не позволяет найти коэффициенты в разложении (1), так как здесь придется столкнуться с неберущимся интегралом вида $\int_{-1}^{1}\frac{Shax}{x}\cos kxdx$, хотя интеграл $\int_{-1}^{1}ShaxSinkxdx$ является берущимся. Развиваемый автором операторный метод нахождения коэффициентов в ортогональных и неортогональных рядах [3,4] позволяет найти искомые коэффициенты A_k^n, B_k^n, C_k^n. В этой связи операторный метод является обобщением метода Фурье, имеющего место только для ортогональных рядов, на случай неортогональных рядов, а сами ряды (1) и (2) следует считать специальным видом неортогональных рядов. Остановимся вкратце на некоторых характерных особенностях испльзования операторного метода в данном случае. Здесь вместо оператора $D_1=\frac{Sh\pi d_x}{1+d_x^2/k^2}$, где

$d_x=\frac{d}{dx}$, требуется применять операторы

$$D_{11}=\frac{Sh^2\pi d_x}{(1+d_x^2/k^2)^2},\qquad D_{12}=\frac{Sh^2\pi d_x}{1+d_x^2/k^2}\qquad(3)$$

или их линейную комбинацию. Наличие в числители квадрата оператора дифференцирования бесконечно высокого порядка основано на понятии центральной разности 2-го порядка. Для центральной разности 1-го порядка, на основании известного [3,4] тождества $f(x+\pi)=e^{\pi d_x}*f(x)$, получаем

$$\Delta_1 f(x) = \frac{f(x+\pi) - f(x-\pi)}{2} =$$

$$= \frac{e^{\pi d_x} * f(x) - e^{-\pi d_x} * f(x)}{2} = \left(\frac{e^{\pi d_x} - e^{\pi d_x}}{2} \right) * f(x) =$$

$$= Sh\pi d_x * f(x).$$

Тогда центральная разность 2-го порядка будет равна

$$\Delta_2 f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x+2\pi) - f(x)}{2} - \frac{f(x) - f(x-2\pi)}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\pi d_x} * f(x) + e^{-2\pi d_x} * f(x)}{2} - f(x) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\pi d_x} + e^{-2\pi d_x}}{2} * f(x) - f(x) \right] = \frac{1}{2}\left(ch 2\pi d_x - 1\right) * f(x) =$$

$$= Sh^2 \pi d_x * f(x).$$

Таким образом, обосновано наличие квадрата в числителе выражения (3). Вид знаменателя в (3) выбирается из тех соображений, что его степень не должна превосходить степени числителя. Найденные коэффициенты следует подставить в соответствующие ряды и исследовать их на сходимость.

Литература

1. Барии, Н.К. Тригонометрические ряды / Н. К. Барии. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

2. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с; Т. 2. – 537 с.

3. Акимов, В. А. Операторный метод решения задач теории упругости: дис… канд. физ. мат. наук / В. А. Акимов. – Минск, 1992. – 136 с.

4. Акимов, В. А Вычисление коэффициентов рядов Фурье операторным методом // Материалы Республиканского научно-методического семинара преподавателей вузов Беларуси, Минск, 15-17 июня 2000 г. / В. А. Акимов. – Минск: Технопринт, 2001. – С. 43–47.