УДК 536.62.50

Управление нагревом термически массивного тела с учетом термонапряжений

Воронова Н.П., Казакова Е.И.*
Белорусский национальный технический университет
Донецкий национальный технический университет*

Рассмотрим теплотехнический процесс, описываемый системой

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(l,\varphi)}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial^2 u(l,\varphi)}{\partial l^2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial l} = Bi[Q(\varphi) - u(1,\varphi)], \\ -\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{l=-1} = Bi[Q(\varphi) - u(1,\varphi)], \; u(l;0) = \nu, \\ -(1-\chi) \le Q(\varphi) \le 1+\chi, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\varphi = \dfrac{at^2}{s^2}$ - безразмерное время; $l = \dfrac{x}{s}$ - безразмерная толщина $(-1 \le l \le 1)$, $Bi = \dfrac{\alpha s}{\lambda}$ - критерий Био; ν - безразмерная начальная температура; χ - безразмерная температура (критерий несимметричности нагрева, $|\chi| < 1$); $u(l;\varphi)$ - температура; $Q(\varphi)$ - температура греющей среды.

Система (1) описывает процесс нагрева пластины толщиной $2S$, для которой a, λ, α - соответственно температуропроводность и теплопроводность материала пластины и коэффициент теплоотдачи.

Распределение температурных напряжений в пластине согласно [1] приводит к максимальным растягивающим $\sigma_{\max}$ и сжимающим $\sigma_{\min}$ напряжениям в виде

$$\sigma_{\max\min} = \frac{\beta E}{1-\Theta} \frac{s}{3} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=s} f(\mu),$$

где β - коэффициент линейного температурного расширения; E – модуль упругости; Θ -коэффициент Пуассона; $f(\mu)$ -

функция от коэффициента несимметричности нагрева; $\mu = \frac{s+c}{2s}$, c - константа, которая при нагреве постоянным тепловым потоком в регулярном режиме дает параболическое распределение температуры по толщине пластины

$$u(x,t) = c(t) + c_1(x+c)^2,$$

где $c(t)$ - линейная функция времени; c_1 - константа.

Для пластины функция $f(\mu)$ определяется следующим образом [2]

$$\left\{\begin{matrix} 3(\mu-1)+\frac{1}{\mu}, \mu<1 \\ 3-\frac{2}{\mu}, \mu \ge 1 \end{matrix}\right\} \text{ для } \sigma_{\max},$$

$$\left\{\begin{matrix} 3-\frac{2}{\mu}, \mu<0{,}5 \\ \frac{1}{\mu-3}, \mu \ge 0{,}5 \end{matrix}\right\} \text{ для } \sigma_{\min}.$$

При нагреве наиболее опасны растягивающие напряжения, поэтому введем ограничение $\sigma_{\max} \le \sigma^*{}_{\min}$, где $\sigma^*{}_{\min}$ - предельно допустимое растягивающее напряжение. На основании этого ограничения можно определить максимально допустимое значение теплового потока и в свою очередь по граничному условию задачи (1) – ограничение на температуру греющей среды

$$Q(t) = u(s,t) + \frac{c_m}{\alpha s f(\mu)}, \qquad (2)$$

где $c_m = \frac{3\lambda(1-\Theta)\sigma^*{}_{\max}}{\beta E}$ - коэффициент, зависящий только от материала нагреваемого тела.

В регулярном режиме нагрева можно через внешний теплообмен судить о температурных напряжениях в пластине.

Практическое применение формулы (2) позволяет при ограничении на температуру греющий среды

$$Q(t) \le A = const, \qquad (3)$$

В начальной стадии нагрева, когда растягивающие термонапряжения не достигли еще максимально допустимой величины, ограничиться только ими. Начиная с момента времени t_1, когда $\sigma_{\max} \le \sigma^*{}_{\min}$, необходимо кроме ограничения (3) учитывать и ограничение (2). Момент времени t_1 определяется из условия $u(s,t_1) = u_0 + \Delta u_{\max}$, где $\Delta u_{\max}$ – максимально допустимый перепад температур по толщине пластины с точки зрения допустимых термонпряжения. Величину $\Delta u_{\max}$ можно найти из формулы

$$\sigma^*{}_{\max} = \frac{\beta E}{1-\Theta}\frac{\Delta u_{\max}}{3}\frac{f(\mu)}{\mu^2}, \text{ если } \min u(x,t) \ge \delta, -s < x < s,$$

где δ - температура, при которой материал имеет достаточную пластичность для погашения термонапряжений; можно учитывать только ограничения (3).

Момент времени t_2, когда ограничение (3) теряет силу, может быть определен из выражения $u(s,t_2) = \delta + \Delta u_{\max}$.

Следовательно, для выполнения ограничений на внутренние термонапряжения $\sigma_{\max}$ при использовании соотношения (3) необходимо знать температуру поверхности пластины $u(s,t)$ из (1) [3].

Тогда определяются моменты времени t_1 и t_2, между которыми должно быть выполнено ограничение (3), использующее также текущее значение температуры поверхности $u(s,t)$, $t_1 \le t \le t_2$.

Литература

1. Гейтвуд, Б. Е. Температурные напряжения / Б. Е. Гейтвуд. – М.: Наука, 1969.
2. Бутковский, А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975.
3. Воронова, Н. П. Разработка оптимального по времени режима работы печи садочного типа / Н. П. Воронова, Р. В. Михнова // Изв. вузов. Энергетика. - 1996, № 1-2. – С. 72–75.