УДК 519.876

# К определению нагруженности динамической системы транспортного средства

Микулик Н. А., Рейзина Г. Н.
Белорусский национальный технический университет

В современных условиях важнейшей задачей промышленности является выпуск машин, конкурентноспособных на внутреннем и внешнем рынке. В связи с этим актуальной является задача определения нагруженности в динамических системах транспортных средств как проектируемых, так и находящихся в эксплуатации.

Для решения этой задачи используются математические модели динамических систем, позволяющие определять параметры колебательных процессов (частоты и амплитуды) как эксплуатируемых систем, так и проектируемых, с целью определения резонансных зон и степени нагруженности звеньев [2,3].

Для расчета параметров колебаний в силовой передаче последняя представляется в виде динамической системы, состоящей из сосредоточенных масс и безинерционных упругих соединений. Колебания рассматриваемой динамической системы описываются системой дифференциальных уравнений, векторно- матричная запись которой имеет вид:

$$I\ddot{\varphi} + K\dot{\varphi} + c\varphi = M, \qquad (1)$$

где $\varphi$ – вектор угловых отклонений масс динамической системы;

$I$ – матрица моментов инерции масс названной системы;

$K$ – матрица диссипативных функций;

$M$ – вектор внешних возмущений, действующих на динамическую систему.

Решив систему (1) методами численного интегрирования, определяем зависимости углов закрутки масс от времени

$$\varphi_{ij}(t) = \varphi_i(t) - \varphi_j(t),$$

и зависимости угловых скоростей масс, а также величину упругого момента в определенном соединении $M_{ij} = c_{ij}\varphi_{ij}$.

По временным зависимостям момента и угловой скорости определяем максимальный упругий момент или амплитуду в зависимости от скорости вращения коленвала двигателя, по которым можно судить о динамической нагруженности в звеньях системы.

Следует отметить, что амплитудные характеристики не являются оптимальным показателем при выборе параметров колебательной системы. Иногда в системах с различными параметрами одинаковые по величине амплитуды наблюдаются на различных частотах [4] или небольшое снижение резонансных амплитуд сопровождается значительным их увеличением на нерезонансных режимах. В этом случае представляет интерес частотный анализ колебательной системы (передаточные и частотные функции).

Для выявления связей между микропрофилем дороги и нагруженностью трансмиссии линейной системы (1) выражение спектральных $S_{y_j}(\omega)$ и взаимных спектральных $S_{y_j y_m}(\omega)$ плотностей имеют вид:

$$S_{y_j}(\omega)=\sum_{l=1}^{n}\left|W_{jl}(i\omega)\right|^2 S_{\varphi l}(\omega)+\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}W_{jl}(i\omega)\left|W_{jk}(i\omega)\right|S_{\varphi l}S_{\varphi k}(\omega);\quad(2)$$

$$\begin{gathered}S_{y_j y_m}(\omega)=\sum_{l=1}^{m}\left|W_{jl}(i\omega)\right|\left|W_{ml}(i\omega)\right|S_{\varphi l}(\omega)+\\+\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}W_{jl}(i\omega)\left|W_{mk}(i\omega)\right|S_{\varphi l\varphi k};\end{gathered}\quad(3)$$

где $W_{jl}=(-1)^{i+j}\dfrac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ – передаточные функции по отношению к $\varphi_i$.

По отношению к разности углов $\varphi_i-\varphi_{i+1}$ передаточные функции имеют вид:

$$W_{i-(i+1),l}(i\omega)=(-1)^{l+j}\frac{\left(\Delta_{l,i}+\Delta_{l,i+1}\right)}{\Delta},$$

где $\Delta$ – определитель, составленный из коэффициентов левой части системы дифференциальных уравнений (1);

$\Delta_{lj}$ – алгебраические дополнения определителя;

$\overline{W}_{jl}$ – комплексно-сопряженный определитель;

$S_{\varphi l}, S_{\varphi l \varphi k}$ – спектральные и взаимные спектральные плотности на входе в систему.

Учитывая, что на систему действуют два возмущающих момента $M_\partial(t)$ и $M_C(t)$, спектральная плотность на выходе имеет вид:

$$S_{yk}(\omega) = |W_{k1}(i\omega)|^2 S_{\varphi 1}(\omega) + |W_{k2}(i\omega)|^2 S_{\varphi 2}(\omega), \tag{4}$$

где $S_{\varphi 1}(\omega), S_{\varphi 2}(\omega)$ – спектральные плотности воздействия от первого входа – крутящего момента двигателя $M_\partial(t)$ и от второго входа – момента сопротивления движению $M_C(t)$;

$|W_{k1}(i\omega)|^2; |W_{k2}(i\omega)|^2$ – квадраты модулей передаточных функций от первого и второго входа.

Спектральная плотность воздействия от момента сопротивления движению формируется с помощью колебательной системы подвески («вход») от микропрофиля дороги и расположена в низкочастотной части спектра частот ($\omega < 100\ \text{c}^{-1}$).

Крутящий момент от двигателя можно представить в виде

$$M_\partial(t) = M_0 + \sum_{i=1}^{n} A_k \sin(k\omega_\beta t + \varphi_k),$$

где $M_0$ – средний крутящий момент;

$A_k$ – амплитуда;

$\varphi_k$ – начальная фаза $i$-ой гармоники;

$\omega_\beta$ – угловая скорость вращения коленвала;

$n$ – число гармоник.

Корреляционная функция этого крутящего момента имеет вид:

$$R(\tau) = M_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k^2}{2} \cos\omega_k \tau, \tag{6}$$

и спектральная плотность

$$S(\omega) = 2\pi \left( M_0^2 \delta(\omega) + \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k^2}{4} \delta(\omega - |\omega_k|) \right). \tag{7}$$

В переходных процессах использование частотных характеристик затруднительно в силу громоздкости решений. Ниже рассматривается метод, позволяющий определить искомые характеристики с достаточной для практических целей точностью.

Реальный процесс нагружения упругого звена системы является двухкомпонентным:

$M_y(t) = M_{y.н}(t) + M_{y.в}(t)$.

Низкочастотная составляющая представляет собой импульсный случайный процесс $M_{y.н}(t)$. Она является результатом преобразования внешних воздействий динамической системой в ее установившемся движении.

Высокочастотная составляющая $M_{y.в}(t)$ состоит из следующих друг за другом затухающих синусоид. Начальная амплитуда каждой синусоиды $M_j$ и общая продолжительность каждого участка колебания $T_j$ – случайные величины. Математическое ожидание текущих значений ординат высокочастотной составляющей равно нулю. Для нахождения дисперсии $D_{y.в}$ представим реализацию этой составляющей $M_{y.в}(t)$ продолжительностью $T$ в виде суммы затухающих синусоид. Каждое слагаемое этой суммы отличается от нуля только на участке продолжительностью $T_j = t_{kj} - t_{нj}$. Здесь $t_{kj}$ – время окончания рассматриваемого участка; $t_{нj}$ – время начала участка.

Таким образом,

$$M_{y.в} = \sum_{j=1}^{1} M_j \exp(-nt)\sin(\nu t + \delta_j),$$

где $M_j, \delta_j$ – случайные начальные амплитуды и фаза колебаний; $l = T/T_j$ – общее количество участков за время $T$; $n$ – параметр, характеризующий затухание колебаний.

Так как $\left|M_{y.в}(t)\right| = 0$, то после соответствующих преобразований $D_{y.в}$ стационарного и эргодического процесса необходимо найти сумму квадратов его ординат, разделить эту сумму на время суммирования и далее применить к полученному частному операцию осреднения. В пределе вместо суммы берется интеграл и, следовтельно:

$$D_{y.в} = [1/T \int_0^T M_j^2 \exp(-2nt) \sin^2(\nu t + \delta_j) dt] =$$
$$= [\frac{M_j^2}{T_j} \int_0^T \exp(-2nt) \sin^2(\nu t + \delta_j) dt]. \quad (8)$$

Погрешность в вычислении будет мала, если начало каждой синусоиды считать с момента, предшествующего амплитуде $M_j$, при котором $M_{y.в}(t) = 0$. В этом случае $\delta_j = 0$ и зависимость (8) существенно упрощается:

$$D_{y.в} = \frac{0{,}25 M^2}{nT_j} \left(1 - \exp(-2nT_j)\right). \quad (9)$$

**Литература**


1. Конструирование и расчет колесных машин высокой проходимости / Под редакцией Н. Ф. Бочарова, Л. Ф. Жеглова. М.: Машиностроение, 1994
2. Микулик, Н. А. Динамические системы с реактивными звеньями. –Мн. Выш. школа, 1985
3. Рейзина,Г. Н. Вибронагруженность систем подрессоривания многоопорных машин. – Мн.: ВУЗ-ЮНИТИ, БГПА, 1999
4. Микулик,Н. А., Рейзина,Г. Н. Обоснование математических моделей сложных нелинейных динамических систем / Машиностроение и техносфера XXI века: Сб. трудов XI МНТК. Донецк, 2004