УДК 51-7

Вариационные неравенства в математических моделях поверхностной обработки материалов

Нифагин В.А., Кондратьева Н.А.
Белорусский национальный технический университет

В теории обработки поверхностей важным этапом является процесс шаржирования, который предполагает создание на боковых сторонах заготовок режущего слоя, путем закрепления на них зерен микропорошков.

Для обеспечения эффективного насыщения поверхности диска зернами абразивного материала необходимо произвести анализ основных факторов, влияющих на качество шаржирования поверхностей, определяющими из которых являются динамика и кинематика процесса.

Математические модели, описывающие указанные факторы, изучались в работах [1, 2], где было показано, что на процесс шаржирования существенно влияет величина давления на абразивные зерна, их геометрические и прочностные характеристики; время обработки и т.д.

Исследования показали, что для повышения качества шаржирования кристаллов необходимо их внедрение в материал подложки осуществлять за счет динамических усилий, действующих нормально к шаржируемой поверхности.

Кроме того, с целью гарантированной доставки частиц в зону шаржирования, следует обеспечить дискретный (виброударный) режим контактного взаимодействия поверхности инструмента и обрабатываемого слоя, при котором величина образующегося меду ними зазора превышает исходный размер кристаллов.

В [2] была предложена акустическая система для шаржирования распиловочных дисков ультразвуком с промежуточным элементом.

С целью расчета динамики движения системы в одномерном периодическом виброударном режиме примем расчетную схему в виде (Рис. 1):

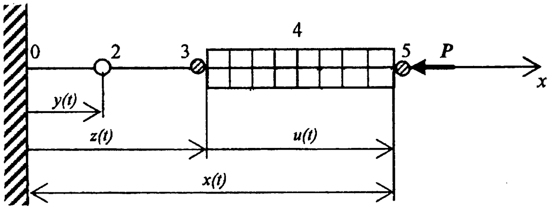


Рис.1

где 1 – диск, который в силу синфазности считается абсолютно жестким.

2 – промежуточный элемент массы m,

3 – присоединенная масса μ вибратора (4),

5 – масса M, нагружаемая усилием в вибраторе и статической силой P.

Примем (естественное для выбранной конструкции) условие

$$m << \mu << M \qquad (1)$$

и обозначим $f_1(t) = A_1(1 - \cos(\omega t + \varphi))$ - характеристику УЗК-вибратора с частотой ω. Усилие, развиваемое в нем определяется зависимостью

$$R = c\begin{cases} f_1 - u, & f_1 - u \geq 0; \\ 0, & f_1 - u < 0; \end{cases} \qquad (2)$$

где u - перемещение торца вибратора (рис. 1),

$$R = \begin{cases} c(u - f_1), & u - f_1 \geq 0; \\ 0, & u - f_1 < 0. \end{cases}$$

Начало отсчета $t = 0$ выберем в момент наибольшего сближения (остановки) массы M с основанием $x = 0$ и рассмотрим первую фазу отхода устройства от основания, когда шарик 2 и торец 3 к нему прижаты:

$$y(t) = 0;\ u(t) = x(t);\ (0 \leq t \leq t_1). \qquad (3)$$

Уравнение движения запишется:

$$M\ddot{x} = R - P;\ M\ddot{x} = P - R, \qquad (4)$$

или с учетом (2), (3):

$$\ddot{u} + \lambda^2 u = \lambda^2 f_1 + \frac{P}{M}\left(\lambda^2 = \frac{c}{M}\right). \qquad (5)$$

Заметим, что для учета вращательного движения рабочей поверхности деформирующего элемента относительно поверхности заготовки на этапе «затягивания» системы в виброударный режим, примем в зависимостях, описывающих динамику элемента, вместо значения амплитуды колебаний выходного торца концентратора A_0 значение

$$A_1 = A_0 - 2x_{\tilde{N}\grave{O}}\mathring{a}^{\alpha\nu}, \tag{6}$$

(здесь параметры $x_{\tilde{N}\grave{O}}, \alpha, \nu$ - находятся экспериментально).

Т.о., возникает краевая задача с ограничениями типа неравенств:

$$\begin{aligned} &u(0) \le A_1 + \frac{P}{c}, && u(t_1) \ge 0, \\ &\dot{u}(0) \le 0, && \dot{u}(t_1) \ge 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Можно показать, что в области $\Omega = (0, t_1)$ в пространстве функций $V = L_2(0, t_1)$ со скалярным произведением вида $(g, v) = \int_0^{t_1} g(t)v(t)dt$, здесь $g(t) \in L_2(0, t_1)$, $(Av, \omega) = \int v'(t) \cdot \omega'(t)dt$.

Задача (5), (7) соответствует решению вариационного неравенства

$$\int_0^{t_1} \dot{u}(t)(\dot{v}(t) - \dot{u}(t))dt \ge \int_0^{t_1} g(t)(v(t) - u(t))dt. \tag{8}$$

Требуется найти для заданного множества K элемент $u \in K$ такой, чтобы неравенство (8) выполнялось для всех $\omega \in K$. Возьмем $K = \left\{ v \in L_2(0, t_1), v(0) \le A_1 + \frac{P(1 - f_1)}{c}; v(t_1) \ge 0 \right\}$.

Для нахождения приближенного решения $u \in K$ вариационного неравенства (8) можно решать последовательность двухточечных краевых задач для дифференциального уравнения (5) и рассмотреть верхнюю грань этих решений. В данном случае имеется только четыре возможности для выбора множества $S \subset \Omega$. Итак, Если $\Omega = (0, t_1)$, то граница состоит из двух точек 0 и t_1.

Т.о., возникает конечная последовательность двухточечных краевых задач при следующих граничных условиях:

1) $u(0) = A_1 + \frac{P}{c}$, $u(t_1) = 0$,

2) $\dot{u}(0) = 0,\ \dot{u}(t_1) = 0$,

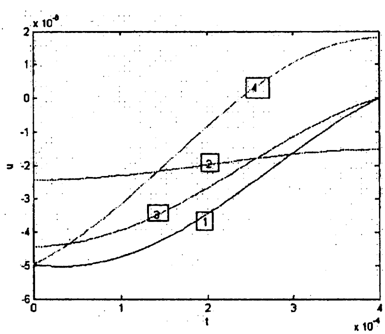
3) $\dot{u}(0) = 0,\ u(t_1) = 0$,

4) $u(0) = A_1 + \dfrac{P}{c},\ \dot{u}(t_1) = 0$.

Обозначая решения этих задач $u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)$ соответственно, заключаем, что решением вариационного неравенства (8) или краевой задачи (5), (7) является функция $u(t) = \max\limits_{i=1,4}\{u_i(t)\}$, $0 \le x \le t_1$.

Численное решение указанной последовательности краевых задач, использующее метод пристрелки, позволило оценить: промежуток времени выхода системы на виброударный режим; величину суммарного импульса, передаваемого основанию; значение контактной реакции.

Расчет и графическая интерпретация решения краевой задачи (5), (7) выполнена в пакете Matlab при следующих значениях экспериментальных параметров: $t_0 = 0$, $t_1 = 4\cdot10^{-4}c$, $A_0 = 5\cdot10^{-6}$ ì, $x_{Ñð} = 0{,}2\cdot10^{-6}$ ì, $\alpha = 0{,}156447$, $v = 2{,}48$ ì / ìèí, $P = 45\,H$, $c = 1{,}859\cdot10^{8}$.



Литература

1. Анализ схем шаржирования / А.А. Сагарда, В.В. Маковецкий // Журнал «Сверхтвердые материалы». 1982. №4. С. 59-66.
2. Ультразвук в поверхностной обработке материалов / М.Г. Киселев, В.Т. Минченя, В.А. Ибрагимов. – Мн.: Тесей, 2001. – 344 с.: илл.