УДК 539.3

Ряды по однородным аналитическим полиномам в пространственных нелинейных краевых задачах теории теплопроводности

Севрук А.Б.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается общий метод решения трехмерных краевых задач с неоднородными граничными условиями на основе представлений C^2-потенциалов в виде ряда по однородным аналитическим полиномам кватернионной переменной:

$$\kappa = \begin{pmatrix} x_1 + i x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 - i x_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим задачу Дирихле для шара радиуса R:

$$\Delta T(\bar{r}) = \alpha T^2(\bar{r}), \tag{1}$$

$$T(\bar{r})\Big|_{\partial D:|\bar{p}|=R} = f(\rho). \tag{2}$$

Разложим $T(\bar{r})$ по малому параметру λ:

$$T(\bar{r}) = \sum_{k\geq 1}^{\infty} \lambda^k T_k(\bar{v}). \tag{3}$$

Будем считать, что $T_1(\bar{r})$ — решение соответствующей однородной задачи с ненулевым граничным условием:

$$\Delta T_1(\bar{r}) = 0, \tag{4}$$

$$T(\bar{r})\Big|_{\partial D:|\bar{p}|=R} = f(\bar{\rho}). \tag{5}$$

В окрестности произвольного, фиксированного вектора $\rho \in \partial D$ граничное условие (5) может быть представлено в виде ряда Тейлора:

$$f(\bar{\rho}) = \sum_{k\geq 0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\rho - \rho_0)^k f^{(k)}(\bar{\rho})\Big|_{\rho-\rho_0}. \tag{6}$$

Заметим, что членами разложения (6) являются произведения целых степеней координат вектора $\bar{\rho} = (x_1, x_2, x_3) \in \partial D$. Следовательно, (6) допускает перегруппировку своих слагаемых в виде однородных действительных полиномов:

$$f(\overleftarrow{\rho}) \to \sum_{n\geq 0}^{\infty} d_n^{(\alpha\beta\gamma)} x_1^{\alpha}\ x_2^{\beta}\ x_3^{\gamma}, \tag{7}$$

где $d_n^{(\alpha\beta\gamma)}$ — известные коэффициенты, $\alpha+\beta+\gamma=n$.

Пусть $\varphi(\kappa)\in \partial D \cup Int\,D := \left\{\left|\overleftarrow{r}\right| \leq R\right\}$ – C^2-потенциал. Тогда решение гармонического уравнения (11) в комплексной форме:

$$T_1(\overleftarrow{r}) = \frac{1}{2}\left(\varphi(\kappa) + \overline{\varphi(\kappa)}\right) = \mathrm{Re}\,\varphi(\kappa). \tag{8}$$

Матрица $\overline{\kappa} = R\kappa^{-1} = \dfrac{R^2}{\kappa}$ определена операцией инверсии и является аргументом комплексной функции $\varphi(\overleftarrow{\kappa})$:

$$\varphi(\overleftarrow{\kappa}) = \varphi\left(\frac{R^2}{\kappa}\right). \tag{9}$$

Тогда функция $\varphi(\overleftarrow{\kappa})$ является вполне определенной.

Разложим, аналитические в указанных областях функции матричной переменной κ в ряды по однородным аналитическим полиномам:

$$\varphi(\kappa) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n P_n(\kappa),\quad |\kappa| < R,$$

$$\overline{\varphi(\kappa)} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n \overline{P_n(\kappa)},\quad |\overline{\kappa}| < R. \tag{10}$$

Теперь решение (8) можно представить в виде:

$$T_1(\overleftarrow{r}) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n\left(P_n(\kappa) + \overline{P_n(\kappa)}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n P_n(\kappa)\right). \tag{11}$$

В пространстве C^2 формула для полного однородного аналитического полинома степени n имеет вид:

$$P_n(\kappa) = \sum_{k\geq 0}^{\infty} (n-k+1)\kappa^{n-k}\overline{\kappa}^{k}. \tag{12}$$

Степени κ^k и $\overline{\kappa}^k$ являются квазилинейными формами:

$$\kappa^k = a_k \kappa + b_k ;$$
$$\kappa^k = a_k \bar{\kappa} + b_k ; \qquad (13)$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются реккурентными соотношениями:

$$a_k = I_1\ a_{k-1} + b_{k-1};$$

$$b_1 = 0;$$

$$a_1 = \hat{e}.$$

Следовательно, полиномы вида (12) являются квазилинейными формами, аналогичными квазилинейным формам κ^k и $\bar{\kappa}^k$ (13):

$$P_n(\kappa) = \alpha_n \kappa + \beta_n \bar{\kappa} + \gamma_n\ \hat{e};$$
$$\qquad (14)$$
$$\overline{P_n(\kappa)} = \alpha_n \bar{\kappa} + \beta_n \kappa + \gamma_n\ \hat{e}.$$

с действительными коэффициентами:

$$\alpha_n = -R^2 \sum_{k \geq 2}^{\infty} (n-k+1) p_{n-k-1}\, p_{k-2};$$

$$\beta_n = -R^2 \sum_{k \geq 2}^{\infty} (n-k+1) p_{n-k-2}\, p_{k-1}; \qquad (15)$$

$$\gamma_n = R^2 \sum_{k \geq 2}^{\infty} (n-k+1)(p_{n-k-1}\, p_{k-1} + R^2\, p_{n-k-2}\, p_{k-2}),$$

где p_n — однородные действительные полиномы трех переменных (x_1, x_2, x_3), связанные реккурентными формулами:

$$p_n = p_{n-1}\, p_1 - I_2\ p_{n-2}, \qquad (16)$$

где $p_0 = 1$, $p_1 = 2x_1$, $I_2 = R^2$.

Таким образом, решение (11) также может быть преобразовано в ряд по действительным однородным полиномам:

$$T_1(\bar{r}) \to \sum_{n \geq 0}^{\infty} b_n\, p_n(I_1, R^2) \to \sum_{n \geq 0}^{\infty} c_n^{(\alpha\beta\gamma)} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}, \qquad (17)$$

где $n = \alpha + \beta + \gamma$.

Связь коэффициентов a_n, b_n и $c_n^{(\alpha\beta\gamma)}$ определяется преобразованием (12), (14), (15).

Сравнивая разложения (7) и (17) находим $c_n^{(\alpha\beta\gamma)} = a_n \ (n \geq 0)$, с последующим пересчетом для коэффициентов a_n исходного разложения (11).

Далее, подставляя (3) в (1) с нулевым граничным условием и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, последовательно находим следующие приближения $T_k(\bar{r}), (k > 1)$. Для этого снова выполняем разложение (11) и по формулам (12), (14), (15), (17) определяем коэффициенты a_n.

Литература

1. Савин, Г. Н. Немиш, Ю. Н. Метод возмущения упругих свойств в механике твердых деформируемых тел., - ДАН СССР – 1974, 216, N1, с. 53-55.

2. Nifagin,V. About one method of the decision of 3-d problems of the theory of plasticity., – Jour. Structur. Mech. and Plasticity. – NJ. RU – 2004. – 38, p. 283-289.

3. Александрович, А. И. Применение теории функций двух комплексных переменных к теории упругости / А. И. Александрович – 1977. - ДАН СССР. – 232, N 3.

УДК 51(07. 07)

Методические аспекты преподавания математики и информатики

Глинская Е.А., Прусова И.В., Прихач Н.К.
Белорусский национальный технический университет

На кафедре инженерной математики противоречие между возрастанием требований к математическому образованию и уменьшением количества часов, отводимых на изучение математических дисциплин, разрешается совершенствованием методики преподавания математики. Ключевую позицию среди современных технологий занимает компьютеризация учебного процесса.