УДК 51

Конструктивные задачи стереометрии как средство развития пространственных представлений

Тухолко.Л.Л.

Белорусский национальный технический университет.

Успешное овладение студентами техническими специальностями во многом зависит от уровня развития их пространственных представлений и навыков конструирования геометрических объектов, поэтому при подготовке абитуриентов важно уделить рассмотрению задач стереометрии особое внимание [1].

Одним из эффективных средств развития пространственных представлений являются конструктивные задачи, связанные с построением геометрических объектов в пространстве. Решение таких задач способствует развитию навыков моделирования, формированию графической культуры, а так же развитию образного и логического мышления, необходимых составляющих любой познавательной деятельности.

Однако решение конструктивных задач вызывает достаточные трудности, связанные с особенностями пространственного воображения, преодолеть которые можно путём проведения параллели между решением общей, «опорной» задачи, и конкретной, связанной с определённой моделью многогранника, направленной на выявление метрических характеристик этого многогранника. Отметим, что решение конструктивных задач полезно сопровождать пошаговыми иллюстрациями [2].

Опорная задача. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми a и b.

Анализ. Согласно определению расстояния между скрещивающимися прямыми a и b (рис. 1, *а*) необходимо построить плоскость α, проходящую через прямую b параллельно прямой a (рис. 1, *б*), и найти расстояние от любой точки X прямой a до плоскости α (рис. 1, *в*). Заметим, что отрезок XK, определяющий расстояние между скрещивающимися прямыми a и b

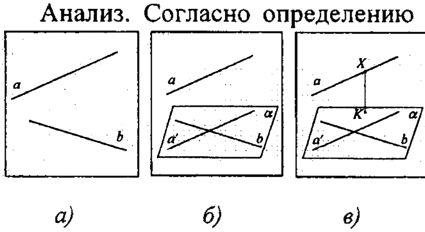
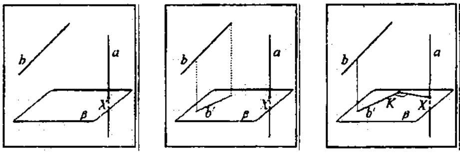


Рис.1.

лежит в плоскости β, которая перпендикулярна прямой a, и, следовательно, плоскости α. Отсюда следует построение.



а) б) в)

Рис. 2

Построение.

1) Плоскость $\beta \perp a$, $a \cap \beta = X$ *(рис.2, а)*.

2) Прямая b' - ортогональная проекция прямой b на плоскость β *(рис.2, б)*.

3) $XK \perp b'$ ($K \in b'$) – искомое расстояние между скрещивающимися прямыми a и b *(рис.2, в)*.

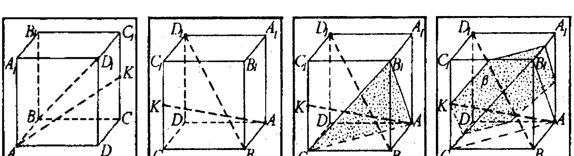
Доказательство. Плоскость $\alpha = (b; b')$ параллельна прямой a (так как содержит проектирующие прямые, параллельные прямой a), отрезок $XK \perp \alpha$ (так как $XK \perp b'$ по построению, XK перпендикулярен проектирующим прямым, так как $XK \subset \beta$, $\beta \perp a$).

Исследование. Задача всегда имеет единственное решение, так как каждое из построений выполнимо единственным образом.

Подробное решение опорной задачи позволяет осуществить повторение известных фактов в контексте нового материала и подготовку к решению содержательных задач.

Задача. Найдите расстояние между диагональю BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и прямой AK, где K – середина ребра CC_1, длина которого 1см.

Анализ. Выберем наиболее удачный ракурс для выполнения изображения куба (рис. 3, *а*, *б*). Согласно алгоритму построения необходимо выявить прямую, для которой удобно построить перпендикулярную ей плоскость. Известно, что диагональ BD_1 куба перпендикулярна плоскости CAB_1 (рис. 3, *в*), но спроектировать на эту плоскость прямую KA затруднительно, поэтому проведём плоскость β, параллельную плоскости CAB_1 через точку K, и спроек-

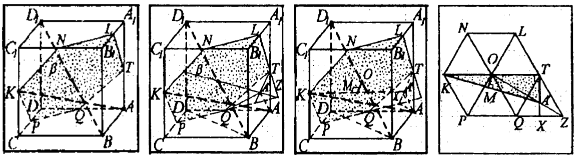


а) б) в) г)

Рис. 3

тируем на эту плоскость прямую KA (рис. 3, *г*).

Решение. 1) Плоскость $\beta \| (CAB_1)$, $K \in \beta$. Правильный шестиугольник $KPQTLN$– сечение куба плоскостью β (рис. 4, *а*).



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 4

2) Отрезок KA' - ортогональная проекция наклонной KA на плоскость β (AA' - высота правильной пирамиды $AQTZ$ (рис. 4, *б*, *в*)).

3) Диагональ $D_1B \cap \beta = O$, $OM \perp KA'$ ($M \in KA'$), OM – искомое расстояние (рис. 4, *г*).

4) $\Delta KTA' \sim \Delta KMO$, следовательно, $\dfrac{OM}{TA'} = \dfrac{KO}{KA'}$, отсюда $OM = \dfrac{TA' \cdot KO}{KA'}$. Здесь $KO = PQ = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}AB\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (см), $TA' = \dfrac{2}{3}TX = \dfrac{2}{3}TQ\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ (см), $KA' = \sqrt{KT^2 + TA'^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{13}{6}}$ (см). В результате $OM = \dfrac{TA' \cdot KO}{KA'} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot 2 \cdot \sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{26}}{26}$ (см).

Ответ. $\dfrac{\sqrt{26}}{26}$ см.

Представляет интерес разработка системы зацеплённых задач, которые определяют окрестность опорной задачи и позволяют решать вопрос о развитии пространственных представлений учащихся.

[1] Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. М.: Педагогика, 1980.-240с.

[2] Шлыкаў У.У. Аб ролі графічнага мадэліравання пры вывучэнні геаметрыі //Народная асвета. – 1999. – №10. - С.121 – 128.