УДК 51

Некоторые методы решения задач по планиметрии.

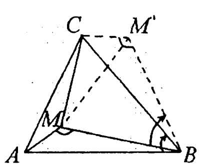
Коваленок Н.В., Богомолова Е.А.
Белорусский национальный технический университет

Приемы и методы решения планиметрических задач весьма разнообразны, однако в школьном курсе геометрии даже традиционным методам уделяется недостаточное внимание. Как показывает опыт тестирования и вступительных экзаменов, наиболее сложными для учащихся оказываются именно геометрические задачи. Поэтому требуется систематическое и всестороннее рассмотрение приемов и методов при изучении планиметрических и стереометрических задач. Учителю крайне важно насытить урок содержательными и различными по уровню сложности задачами, так как без них невозможно заинтересовать учащихся и в результате нельзя рассчитывать на успех.

Остановимся на некоторых методах и приемах. В разделе планиметрии обособленно изучается тема «Движение». Все понятия (симметрия относительно точки и прямой, параллельный перенос, поворот и т.д.) изучаются как факт, но не как средство для решения других задач. А ведь с использованием метода геометрических преобразований многие сложные задачи могут быть решены более лаконично.

Рассмотрим идею решения задачи, связанной с использованием метода геометрических преобразований, в которой используется поворот. Суть метода заключается в том, что чертеж к задаче дополняется новыми элементами, после чего связи между данными и искомыми величинами становятся более ощутимыми или даже очевидными.

Задача. Внутри равностороннего треугольника ABC дана точка M. Известно, что $AM = 1$, $BM = \sqrt{2}$ и угол $AMB = 105°$. Найдите CM и угол BMC.

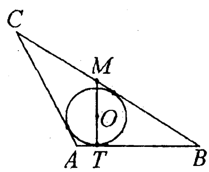


Анализ. Повернем ΔAMB вокруг точки B по часовой стрелке на 60°, тогда точка A перейдет в точку C, точка M в некоторую точку M', а ΔAMB в $\Delta CM'B$.

Значит $AM = CM' = 1$; $MB = BM' = \sqrt{2}$. В $\Delta MBM'$: $\angle MBM' = 60°$ и $MB = BM'$ следовательно, $\Delta\ MBM'$ – равносторонний. Это позволяет определить метрические характеристики треугольников, связанных с искомыми элементами.

Хотелось бы обратить внимание на метод опорного элемента, который состоит в том, что некоторая величина выражается двумя независимыми способами (такая величина называется опорным элементом) и составляется уравнение. В качестве опорного могут быть использованы длина отрезка, тригонометрическая функция, площадь фигуры и т.д..

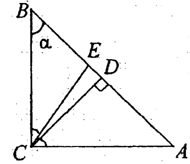
Задача 2. В треугольнике ABC точка M - середина стороны BC, O - центр вписанной окружности и T - точка касания вписанной окружности со стороной AB лежат на одной прямой. Найти AB, если $BC = 36$, $AC = 34$.



Анализ. Обозначим $\angle ABC = \beta$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Из условия следует, что $MT \perp TB$, поэтому $\cos\angle\beta = \dfrac{TB}{MB} = \dfrac{2TB}{a}$. Но $TB = \dfrac{a+c-b}{2}$, а значит $\cos\angle\beta = \dfrac{a+c-b}{a}$. С другой стороны, из теоремы косинусов $\cos\angle\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ запишем уравнение $\dfrac{a+c-b}{a} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, где c (искомая величина) является переменной данного уравнения.

В планиметрии существует целый класс задач, при решении которых необходимо введение тригонометрических функций (тригонометрический метод).

Изучение планиметрии завершается в 9 классе, а тема «Преобразование тригонометрических выражений» более широко изучается в 10 классе, поэтому некоторые задачи по планиметрии могут быть решены на уроках алгебры. Например, при изучении формул сложения аргументов можно рассмотреть следующую задачу.



Задача 3. Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 3 и 4. Найти площадь треугольника.

Анализ. Пусть $\angle CBA = \alpha$, $\angle BCD = 90° - \alpha$, $\angle\ ECD = 45° - \alpha$.

Из ΔCDE: $\cos\angle ECD = \cos(45° - \alpha) = \frac{3}{4}$ тогда $\sin\angle ECD = \sin(45° - \alpha)$ $= \frac{\sqrt{7}}{4}$. Составим систему

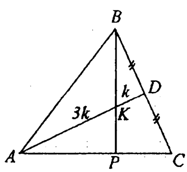
$$\begin{cases} \cos(45^\circ - \alpha) = \frac{3}{4} \\ \sin(45^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} \cos\alpha = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{14}}{8} \\ \sin\alpha = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{14}}{8} \end{cases}.$$

Это позволяет найти катеты треугольника.

В завершение хотелось бы обратить внимание на теоремы, которые не входят в школьный курс геометрии (теоремы Чевы, Менелая и другие). Изучение этих теорем на факультативных курсах было бы полезным для учащихся, так как некоторые задачи, предлагаемые на конкурсных экзаменах решаются с их помощью рационально.

Задача 4. Пусть AD – медиана треугольника ABC. На отрезке AD взята точка K так, что $AK:KD = 3:1$. Прямая BK разбивает треугольник ABC на два. Найти отношение площадей этих треугольников.

Решение. Пусть AD разбивается точкой K на отрезки $AK = 3k$, $KD = k$. Обозначим $BD = DC = a$. $BK \cap AC = P$.



т.к. ΔABP и ΔPBC имеют общую высоту, следовательно их площади относятся: $\frac{S\Delta ABP}{S\Delta PBC} = \frac{AP}{PC}$. По теореме Менелая в ΔADC, где PB – секущая выполняется

$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DK}{KA} = 1$, значит

$$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{2a}{a} \cdot \frac{k}{3k} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{SABP}{SPBC} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, рассмотрение различных методов решения планиметрических задач способствует развитию логического мышления, познавательного интереса и математического вкуса школьников.