УДК 539.3

# Система краевых трещин при циклической симметрии в упругой круглой пластине

Бахмат Г.Л.
Белорусский национальный технический университет

Плоская задача теории упругости для кругового диска, ослабленного $N$ произвольно размещенными трещинами с помощью аппарата теории краевых задач Римана-Гильберта приведена к системе $N$ интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{-l_k}^{l_k} \left[ K_{nk}(t,x) g_k(t) + S_{nk}(t,x) \overline{g_k(t)} \right] dt = \pi p_n(x) \qquad (1)$$

$|x| < l_n,\ n = \overline{1,N}$,

ядра которых регулярны, за исключением случая $n = k$, когда $K_{nk}(t,x)$ преобразуется в сингулярное ядро Коши. Решение задачи о круговом диске радиуса $R$ с краевой радиальной трещиной длины $\ell$, берега которой нагружены самоуравновешенной нагрузкой $\sigma_y^{\pm} - i\tau_{xy}^{\pm} = p(x),\ 0 < x < \ell,$ получено из системы (1) при $N = 1$ предельным переходом. В безразмерных переменных $\xi = \dfrac{x}{\ell}$ и $\eta = \dfrac{t}{\ell}$ это уравнение имеет вид:

$$\int_0^1 [K(\eta,\xi) g(\eta) + S(\eta,\xi) \overline{g(\eta)}] d\eta = \pi p(\xi),\ 0 \le \xi < 1,$$

где

$$K(\eta,\xi) = \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{1}{2(\eta + \xi - \lambda n \xi)^3} [2(\xi^2 + 4\xi\eta - \eta^2) -$$
$$- 2\lambda\eta(3\xi^2 + 7\xi\eta + 2\eta^2) + 2\lambda^2\eta(\xi^3 + 6\xi^3\eta + 7\xi\eta^2 + \eta^3) -$$
$$- \lambda^3\eta^2\xi(S\xi^2 + 11\eta + 4\eta^2) + \lambda^4\eta^3\xi^2(4_s + 3\eta) - \lambda^5\eta^4\xi^3],$$

$$S(\eta,\xi)=\frac{\lambda\eta}{2(\eta+\xi-\lambda\eta\xi)^2}\Big[-4\eta+2\lambda(\xi+\eta)^2-$$

$$-\lambda^2\eta\xi(3\xi+2\eta)+\lambda^3\xi^2\eta^2\ \Big].$$

Полученное таким образом интегральное уравнение было решено численно для двух случаев нагрузки: когда берега трещин нагружены постоянным давлением $\sigma$ случай, когда они растягиваются нормальными силами $p$, приложенными в точке $x=c$,

т.е. $p(x)=-p\delta(x-c)\,(c<\ell)$.

Проведен численный анализ и получим числовые значения коэффициентов интенсивности напряжений $k_1$, отнесенные к $\sigma\sqrt{\ell}$, полученные при различных значениях $\lambda=\dfrac{\ell}{R}$ :

| $\lambda$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_I/\sigma\sqrt{\ell}$ | 1,1 | 1,3 | 1,6 | 1,9 | 2,4 | 3,2 | 4,4 | 6,8 | 12,2 | 33,5 |

На основе полученных результатов построено интегральное уравнение задачи о циклическом плоском напряженном состоянии круглой пластины, ослабленной $N$ трещинами, центры которых равномерно распределены по концентрической окружности, образующей одинаковые углы с каждой трещиной. Если предположить, что все трещины имеют одинаковую длину $2\ell_0(\ell_k=\ell_0)$, их центры размещены в точках $Z_k=(1-r)exp(2\pi ik/N)$ и ко всем трещинам приложена одна и та же нагрузка $p_0(x)$ $(p_k(x)=p_0(x))$, то система уравнений (1) преобразуется в одно интегральное уравнение, ядро которого состоит из ядра Коши и регулярной части:

$$\int_{-\ell_0}^{\ell_0}\left[g_0(t)K_0(t,x)+\overline{g_0(t)}S_0(t,x)\right]dt=\pi\,p_0(x), \qquad (2)$$

$$K_0(t,x)=\frac{e^{i\alpha}}{2}\sum_{k=0}^{N-1} exp\left(\frac{2\pi ik}{N}\right)\left\{\frac{1}{T_k-X_0}+\frac{e}{\overline{T_k}-\overline{X_0}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\overline{T_k^2}X_0}{1-\overline{T_n}X_0}-T_k\, exp(-2i\alpha)\frac{2X_0\left(\overline{X_0}^2T_k-2\overline{X_0}+\overline{T_k}\right)}{\left(1-\overline{X_0}T_k\right)^3}\right\}$$

$$S_0(t,x)=\frac{e^{-i\alpha}}{2}\sum_{k=0}^{N-1} exp\left(-\frac{2\pi ik}{N}\right)\left\{\frac{1}{\overline{T_k}-\overline{X_0}}-\frac{T_k^2\overline{X_0}}{1-T_k\overline{X_0}}-\right.$$

$$\left.-\ exp(2i\alpha)\left[\frac{T_k-X_0}{\left(\overline{T_k}-\overline{X_0}\right)^2}+\frac{T_k^2\left(X_0-T_k\right)}{\left(1-\overline{X}_0T_k\right)^2}\right]\right\},$$

$$T_k=exp\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\left(t_e^{i\alpha}+1-r\right),\quad X_0=X\,e^{i\alpha}+1-r.$$

Для случая, когда к берегам каждой трещины приложена одна и та же постоянная нормальная нагрузка, т.е. $p(\eta)=-p=const$ решение сингулярного интегрального уравнения (2) получено аналогично случаю краевой трещины в полуплоскости. Определены зависимости критических значений нагрузки $p^*$, отнесенной к $p_0$, от параметра $\lambda=\frac{\ell_0}{R}$ при различном числе трещин $N$. При $\lambda=0$ во всех случаях предельная нагрузка $p^*=0{,}89\,p_x$. Почти для всех длин трещин $(\lambda\le 0{,}95)$ случай одной трещины $(N=1)$ является наиболее неблагоприятным по отношению к прочности пластины. При $N\ge 3$ для значений параметра $\lambda$, близких к $(\lambda=0{,}5)$, пластина имеет максимальную прочность. Заметим, что полученное решение при постоянном давлении $p$ на трещинах соответствует случаю всестороннего растяжения круговой пластины усилиями $p$, когда берега трещин сводит от нагрузки.