УДК 517.925

Почти периодические линейные системы с интегральной разделенностью

Веременюк В.В.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in \mathbf{R}^n,\ t \in \mathbf{R}, \qquad (1)$$

с почти периодической матрицей коэффициентов $A(t)$ (см., например, [1], с. 418).

Как известно, система (1) называется системой с интегральной разделенностью, если в пространстве ее решений имеется базис $B_A = \{x_1(t), ..., x_n(t)\}$ такой, что для некоторых констант $D > 0$, $a > 0$ и всех чисел $t \geq s \geq 0$ выполняются неравенства

$$\frac{|x_i(t)|}{|x_i(s)|} : \frac{|x_{i+1}(t)|}{|x_{i+1}(s)|} \geq D \cdot e^{a(t-s)},\ i = 1, ..., n-1 .$$

Такой базис B_A с дополнительным условием $|x_1(0)| = ... = |x_n(0)| = 1$ будем называть разделенным с константой a. Базису B_A поставим в соответствие множество функций $P_{B_A} = \{p_1(t), ..., p_n(t)\}$, где $p_i(t) = \frac{d}{dt}\ln|x_i(t)|$. Полным спектром базиса B_A назовем множество S_{B_A}, состоящее из троек чисел $\omega_i^0 \leq \lambda_i \leq \Omega_i^0$, $i = 1, ..., n$, где $\lambda_i = \lambda_i(x_i(t)) = \overline{\lim\limits_{t \to \infty}} \frac{\ln|x_i(t)|}{t}$ - показатель Ляпунова решения $x_i(t)$, Ω_i^0 и ω_i^0 - соответственно, верхнее и нижнее особые числа ([2], с. 109) функции $p_i(t)$.

Т е о р е м а. Пусть система (1) является системой с интегральной разделенностью. Тогда:

1) для полного спектра любого ее разделенного базиса выполнены равенства $\omega_i^0 = \lambda_i = \Omega_i^0$, $i = 1, ..., n$;

2) система является правильной, причем все ее ненулевые решения имеют точные равномерные показатели Ляпунова, т.е. для любого решения $x(t) \neq 0$ существует точное среднее $\hat{\lambda} = \lim\limits_{t-s\to\infty} \dfrac{\ln|x(t)/x(s)|}{t-s}$ равномерно по s.

Для доказательства этой теоремы использовалась техника доказательства теоремы 14.1.1[2], но при этом потребовалось ее значительно усовершенствовать.

Так как система (1) является системой с интегральной разделенностью, то в [3] доказано, что для углов между решениями $x_i(t) \in B_A$ из разделенного базиса B_A выполняется неравенство $\min\limits_{i\neq j} \inf\limits_{t>0} \angle\left(x_i(t), x_j(t)\right) > 0$. Тогда, используя следствие 20.3.2 [2] и H -преобразование [2, с. 250] получаем

Следствие. Если система (1) является системой с интегральной разделенностью, то она почти приводима к диагональной системе, диагональные элементы которой есть показатели Ляпунова системы (1).

Полученные результаты показывают, что почти периодические линейные системы дифференциальных уравнений с интегральной разделенностью во многом похожи на линейные системы с периодическими коэффициентами (которые, как известно, приводимы к системам с постоянной матрицей с помощью периодического преобразования).

Литература

1. Демидович, Б.П., Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

2. Былов, Б.Ф., Виноград, Р.Э., Гробман, Д.М., Немыцкий, В.В. Теория показателей Ляпунова. М., 1966.

3. Сергеев, И.Н.// Дифференц. уравнения, 1980, т.16, №3, с. 438 – 448.