УДК 517.3

Представления решений пространственных задач нелинейной теории упругости через аналитические функции

Нифагин В.А., Севрук А.Б.
Белорусский национальный технический университет

Для ряда реальных материалов долговременного и многократного использования с увеличением интенсивности внешнего нагружения диаграмма зависимостей между напряжениями и деформациями становится существенно нелинейной. Принято [1] относить такие задачи к задачам физически нелинейной теории упругости, когда геометрически задачи остаются линейными, т.е. сдвиги и удлинения малы в сравнении с единицей, однако деформации превосходят предел пропорциональности.

Большинство приближенных аналитических методов решения пространственных задач нелинейной упругости относится к различным вариантам метода последовательных приближений [2, 3].

В рамках соотношений нелинейной теории упругости сформулируем следующую задачу.

Найти компоненты σ_{ij}, e_{ij}, u_i тензоров напряжений и деформаций и вектора перемещений (для простоты полагаем материал несжимаемым $e_{ij} = \varepsilon_{ij}$) на основании решения уравнений

$$S_{ij,j} + F_i = 0; \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \tag{1}$$

$$2Ge_{ij} = K_0 \sigma \delta_{ij} + F(T) S_{ij}, \tag{2}$$

$$S_{ij} \nu_j \Big|_{\partial P} = \sigma_L \quad u_i \Big|_{\partial P} = u_L, \tag{3}$$

где σ - среднее давление.

Функцию интенсивности напряжений представим в виде

$$F(T) = \sum_{\alpha \geq 1} A_{2\alpha} T^{2\alpha} = \sum_{\alpha \geq 1} A'_{2\alpha} \left(S_{ij} S_{ij}\right)^2 =$$
$$= A'_2 \times \tag{4}$$
$$\times \left(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 - S_{11}S_{22} - S_{11}S_{33} - S_{22}S_{33} + S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{23}^2\right).$$

Считая, что поверхностные силы F_i изменяются с ростом безразмерного параметра нагружения λ, представим их в виде разложения по степеням этого параметра

$$F_i = \sum_{k \ge 1} F_i^{(k)} \lambda^k \ . \tag{5}$$

В (3) $F_i^{(K)}$ - функции только координат.

Поскольку связь между напряжениями и деформациями всюду в теле описывается единым аналитическим соотношением (2), то будем искать решение задачи в напряжениях

$$S_{ij} = \sum_{k \ge 1} S_{ij}^{(k)} \lambda^k \ . \tag{6}$$

Тогда, учитывая очевидные соотношения

$$\begin{gathered}
\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\sum_{k \ge 1} S_{ii}^{(k)} \lambda^k; \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma = \sum_{k \ge 1} S_{ij}^{(k)} \lambda^k; \\
S_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \sigma^{(k)}\delta_{ij}; \quad \sigma^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{ii}^{(k)}; \\
S_{ij}S_{ij} = \sum_{n \ge 2} a_n \lambda^n, \quad \text{где } a_n = \sum_{m \ge 1}^{n-1} S_{ij}^{(m)} S_{ij}^{(n-m)}; \\
F(T) = \sum_{n \ge 2} \frac{1}{n} \chi_n \lambda^n, \quad \text{где } \chi_n = n \sum_{\alpha \ge 1} A_{2\alpha} \sum_{k_1 + \ldots + k_\alpha = n} a_{k_1} \ldots a_{k_2},
\end{gathered} \tag{7}$$

причем χ_n определяется через $S_{ij}^{(k)}$ с индексами $k < n$. Подставляя (7) в (2) получим

$$2Ge_{ij} = K_0 S^{(1)} \lambda \delta_{ij} + \sum_{k \ge 2} \left(S_{ij}^{(k)} + R_{ij}^{(k)} \right) \lambda^k \ . \tag{8}$$

Здесь $R_{ij}^{(k)} = \dfrac{1}{k} \sum\limits_{n \ge 2}^{k-1} \chi_n S_{ij}^{(k-n)}, \quad R_{ij}^{(1)} = 0$.

Вводя новые тензоры $\sigma_{ij}^{(k)*} = \sigma_{ij}^{(k)} + N_{ij}^{(k)}; \quad 2G\varepsilon_{ij}^{(k)*} = S_{ij}^{(k)} + R_{ij}^{(k)}$,

где $N_{ij}^{(k)} = \dfrac{1}{k} \sum\limits_{n \ge}^{k-1} \chi_n \sigma_{ij}^{(k-n)}, \quad N_{ij}^{(1)} = 0.$

Так как $R_{ij}^{(k)} = N_{ij}^{(k)} - \frac{1}{3} N_{ii}^{(k)} \delta_{ij}$, то

$$2G\varepsilon_{ij}^{(k)^*} = S_{ij}^{(k)^*} = \sigma_{ij}^{(k)^*} - \sigma^{(k)^*}\delta_{ij}\,, \tag{9}$$

т.е. тензоры $\varepsilon_{ij}^{(k)^*}$ и $\sigma_{ij}^{(k)^*}$ связаны законом Гука для несжимаемого материала.

Так как уравнения совместности выполняются при любом значении λ - они должны выполняться для любого $\sigma_{ij}^{(k)}$, т.е.

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} + V_i^{(k)} = 0; \tag{10}$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} \nu_j = F_i^{(k)}, \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} \sigma_{ij}^{(k)^*} \nu_j = F_i^{(k)} + N_{ij}^{(k)} \nu_j; \\ F_i^{(k)^*} = F_i^{(k)} + N_{ij}^{(k)} \nu_j; \quad V_i^{(k)^*} = V_i^{(k)} - N_{ij,j}^{(k)}. \end{gathered} \tag{12}$$

Можно видеть, что тензоры $N_{ij}^{(k)}$ определяются посредством решений на предыдущих приближениях.

В работах [4, 5] был развит эффективный аппарат компактизации представлений (констант, переменных, функций, дифференциальных и интегральных операторов) посредством кватернионного (матричного) описания в пространстве C^2. Были получены выражения для напряжений и перемещений через комплекснозначные функции кватернионных переменных, изучен изоморфизм $C^2 \rightleftarrows E_n$, $n = 3,4$, позволяющий редуцировать выражения для напряжений и перемещений в содержательные случаи трехмерного действительного пространства E_3. Для получения общих решений нелинейной теории упругости в напряжениях используем на начальном этапе следующие представления для напряжений в линейном случае

$$\hat{e}\sigma_{11}^{(1)} = \frac{1}{3}\left(\left({}^0\varphi_1^{(1)'} + \overline{{}^0\varphi_1^{(1)'}}\right) + \left({}^0\varphi_2^{(1)'} + \overline{{}^0\varphi_2^{(1)'}}\right) + 2\times\right.$$

$$\times\left(\overline{{}^0\kappa_1}\,{}^0\varphi_1^{(1)''} + \overline{{}^0\varphi_1^{(1)''}}\,{}^0\kappa_1\right) - \left(\overline{{}^0\kappa_2}\,{}^0\varphi_2^{(1)''} + \overline{{}^0\varphi_2^{(1)''}}\,{}^0\kappa_2\right) +$$

$$\left. + 2\left({}^0\chi_1^{(1)''} + \overline{{}^0\chi_1^{(1)''}}\right) - \left({}^0\chi_2'' + \overline{{}^0\chi_2''}\right)\right);$$

$$\tag{13}$$

$$\hat{j}\sigma_{12}^{(1)} = \frac{1}{3}\left(2\left(\overline{{}^0\kappa_1}\cdot{}^0\varphi_1^{(1)''} - \overline{{}^0\varphi_1^{(1)''}}\cdot{}^0\kappa_1\right) - \left(\overline{{}^0\kappa_2}\cdot{}^0\varphi_2^{(1)''} - \overline{{}^0\varphi_2^{(1)''}}\cdot{}^0\kappa_2\right) + \right.$$

$$\left. + 2\left({}^0\chi_1^{(1)''} - \overline{{}^0\chi_1^{(1)''}}\right) - \left({}^0\chi_2^{(1)''} - \overline{{}^0\chi_2^{(1)''}}\right)\right);$$

$$\hat{e}\sigma^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\left({}^0\varphi_1^{(1)'} + \overline{{}^0\varphi_1^{(1)'}}\right) + \left({}^0\varphi_2^{(1)'} + \overline{{}^0\varphi_2^{(1)'}}\right)\right);$$

здесь $\hat{e}, \hat{j}$ - матрицы Кэли.

$$
\begin{aligned}
{}^0\kappa_1 &= \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & ix_4 \\ ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}; \\
{}^0\varphi_1^{(1)} &= \begin{pmatrix} f_1(x_i) + if_2(x_i) & if_4(x_i) \\ if_4(x_i) & f_1(x_i) - if_2(x_i) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Нижние индексы соответствуют круговой перестановке переменных $\to \kappa_1 \to \kappa_2 \to \kappa_3 \to \kappa_4 \to \qquad \to x_1 \to x_2 \to 0 \to x_4$ при вырождении $C^2 \to E_3$.

С учетом индексных перестановок формулы (13) полностью описывают компоненты трехмерного тензора напряжений.

Далее подставляя (12) в (2) и учитывая (4), (7), (8), (9) находим выражения для добавочных членов $R_{ij}^{(k)}$. Для краткости приведем $R_u^{(2)}$

$$R_{11}^{(2)} = \left[\frac{1}{9}\left(\varphi_1' + \varphi_2'\right)^2 + \left(\varphi_2' + \varphi_2'\right)^2 + \right.$$

$$+4\left(\overline{\kappa_1}\cdot\varphi_1'' + \overline{\varphi''}_1\cdot\kappa_1\right)^2 + \left(\overline{\kappa_2}\cdot\varphi_2'' + \overline{\varphi_2''}\cdot\kappa_2\right)^2 + 4\left(\chi_1'' + \overline{\chi_1''}\right) +$$

$$\left(\chi_2 + \overline{\chi_2''}\right)^2 + \left(\varphi_1' + \overline{\varphi_1'}\right)\left(\varphi_2' + \varphi_2' + 2\left(\overline{\kappa_1}\varphi_1'' + \overline{\varphi_1''}\cdot\kappa_1\right) - \left(\overline{\kappa}\varphi_2'' + \overline{\varphi_2''}\kappa_2\right) +\right.$$

$$\left.2\left(\chi_1'' + \overline{\chi_1''}\right) - \left(\chi_2'' + \overline{\chi_2''}\right)\right) + \left(\varphi_2' + \overline{\varphi_2'}\right)\left(\varphi_1' + \overline{\varphi_1'} + 2\left(\overline{\kappa_1'}\cdot\varphi_1'' + \overline{\varphi_1''}\kappa_1\right) -\right.$$

$$\left.-\left(\overline{\kappa_2}\cdot\varphi_2'' + \varphi_2''\kappa_2\right) + 2\left(\chi_1'' + \overline{\chi_1''}\right) - \left(\chi_2'' + \overline{\chi_2''}\right)\right) + 2\left(\overline{\kappa_1}\varphi_1'' + \overline{\varphi_1''}\kappa_1\right)\times$$

$$\times\left(\varphi_1' + \overline{\varphi_1'} + \varphi_2' + \overline{\varphi'}_2 - \left(\overline{\kappa_2}\varphi_2'' + \overline{\varphi_2''}\kappa_2\right) + 2\left(\chi_1'' + \overline{\chi_1''}\right) - \left(\chi_2'' + \overline{\chi_2''}\right) -\right.$$

$$-\left(\overline{\kappa_2}\varphi_2'' + \overline{\varphi_2''}\kappa_2\right)\left(\varphi_1' + \overline{\varphi_1'} + \varphi_2' + \overline{\varphi_2'} + \left(\overline{\kappa_1}\cdot\varphi_1'' + \overline{\varphi_1''}\kappa_1\right) + 2\times\right.$$

$$\left.\times\left(\chi_1'' + \overline{\chi_1''}\right) - \left(\chi_2'' + \overline{\chi_2''}\right)\right) + 2\left(\chi_1'' + \overline{\chi_1''}\right)\cdot\left(\varphi_1' + \overline{\varphi_1'} + \varphi_2' + \overline{\varphi_2'} + 2\times\right.$$

$$\left.\times\left(\overline{\kappa_1}\varphi_1'' + \overline{\varphi_1''}\kappa_1\right) - \left(\overline{\kappa_2}\varphi_2'' + \varphi_2''\kappa_2\right) - \left(\chi_2'' + \overline{\chi_2''}\right)\right) - \left(\chi_2'' + \overline{\chi_2''}\right)\times$$

$$\times\left(\varphi_1' + \overline{\varphi_1'} + \varphi_2' + \overline{\varphi_2'} + 2\times\left(\overline{\kappa_1}\varphi_1'' + \overline{\varphi_1''}\kappa_1\right) - \left(\overline{\kappa_2}\varphi_2'' + \overline{\varphi_2''}\kappa_2\right) +\right.$$

$$\left.\left.\left.+2\left(\chi_1'' + \overline{\chi_1''}\right)\right)\right)\right]\cdot\frac{1}{3}\left(\left(\varphi_1' + \overline{\varphi_1'}\right) + \left(\varphi_2' + \overline{\varphi_2'}\right) + 2\left(\overline{\kappa_1}\varphi_1'' + \overline{\varphi_1''}\cdot\kappa_1\right) -\right.$$

$$\left.-\left(\overline{\kappa_2}\varphi_2'' + \overline{\varphi_2''}\kappa_2\right) + 2\left(\chi_1'' + \overline{\chi_1''}\right) - \left(\chi_2'' + \chi_2''\right)\right).$$

Литература

1. Савин,Г. Н., Койфман,Ю. И. Общая нелинейная теория упругости (обзор)., – Прикл. механика - 1970,- 6, N 12, с. 3-26.
2. Немиш, Ю. Н. Физически нелинейные пространственные задачи об упругом равновесии деформируемых тел., - Прикл. механика – 2000, – 36, N 9, с. 35-66.
3. Савин, Г. Н. Немиш, Ю. Н. Метод возмущения упругих свойств в механике твердых деформируемых тел., - ДАН СССР – 1974, 216, N1, с. 53-55.
4. Nifagin,V. About one method of the decision of 3-d problems of the theory of plasticity., – Jour. Structur. Mech. and Plasticity. – NJ. RU – 2004. – 38, p. 283-289.
5. Александрович, А. И. Применение теории функций двух комплексных переменных к теории упругости / А. И. Александрович – 1977. - ДАН СССР, - 232, N 3.