УДК 517.927.21+519.95

Применение метода инвариантного погружения к решению задач математической физики

Роговцов Н.Н., Вишневская О.Г., Фещенко Е.И.
Белорусский национальный технический университет

Первые нетривиальные применения представлений о красоте, гармонии и понятия о симметрии (инвариантности) были даны древнегреческими философами и математиками. Они, в частности, нашли первые инварианты ортогональной группы и подгруппы аффинных преобразований, содержащих только сдвиги, а также получили метрические инварианты, описывающие симметрийные свойства эллипса и гиперболы [1]. Кроме этого использование свойств симметрии позволило Архимеду обосновать справедливость законов рычага и отыскать центры тяжести плоских материальных фигур. Римляне же в античные времена практически продемонстрировали силу теоретических построений древнегреческих математиков и механиков посредством создания поразительно гармоничных римских сооружений, свидетельством величия которых являются оставшиеся от них колоссальные руины. Вместе с древнегреческими мыслителями они высказали много замечательных идей о роли красоты, гармонии и симметрии в области поэзии и архитектуры. Однако начало процессу математической формализации классических представлений о симметрии и инвариантности было по существу положено только в XIX веке, а его завершение произошло лишь в XX веке. При этом было показано, что данные представления возможно строго описать, если использовать такие фундаментальные математические понятия и структуры, как отображения (преобразования), группы (группы Ли), алгебры Ли и отношение эквивалентности. Следует отметить, что в математике и физике за указанный промежуток времени в рамках теоретико-группового подхода был сформулирован целый ряд принципов симметрии и инвариантности [1], которые, несмотря на свою абстрактность, оказали существенное влияние на развитие научно-технического прогресса в целом.

В 40-50-х гг. XX века в работах В.А.Амбарцумяна, С.Чандрасекара, Р.Беллмана и Р.Калаба был сформулирован ряд принципов, которые нельзя трактовать как принципы симметрии [1]. Важную роль при анализе разнообразных прикладных проблем математической физики сыграл принцип инвариантного погружения Р.Беллмана и Р.Калаба (1956 г.), с помощью которого удалось свести изучение многих краевых задач (для ОДУ, систем ОДУ и интегро-дифференциальных уравнений) и интегральных уравнений к решению задач Коши. Это обстоятельство чрезвычайно упростило решение исходных задач, ибо задачи Коши можно решать с помощью достаточно простых и устойчивых численных алгоритмов. Однако классический вариант метода инвариантного погружения (CVMII), разработанный Р.Беллманом и Р.Калабой, обладает определенными недостатками, которые связаны с некоторой стандартностью и модельностью операций, используемых в CVMII. Данные недостатки не позволяют сводить многомерные краевые задачи для уравнений различных типов к решению задач Коши в тех случаях, когда форма областей, в которых необходимо находить искомые функции, не обладает какой-либо содержательной симметрией. В связи с этим в монографии [1] (см. также ссылки в ней) был предложен общий подход, основанный на использовании общего принципа инвариантности и общих соотношений инвариантности (функциональных соотношений). Данный подход позволяет обобщить CVMII и разработать новый вариант метода инвариантного погружения (NVMII).

Суть NVMII сводится, в основном, к использованию таких действий: 1°. исходная задача погружается в некоторое семейство аналогичных задач, причем параметры, определяющие члены семейства, называются параметрами погружения; 2°. конструируется множество операций, оставляющих инвариантными (или почти инвариантными) решения исходных задач; 3°. на основе этого множества операций отыскиваются соотношения инвариантности (функциональные соотношения), связывающие между собой различные члены семейства (фактически они связывают решения, соответствующие различным значениям параметров погружения); 4°. с помощью соотношений инвариантности производятся постановки задач Коши, через решения которых непосредственным образом находятся решения исходных задач.

Приведем примеры использования NVMII. Рассмотрим уравнение $f(x)=0$, где $x \in [a,b] \subset R$, а $f(x)$ – заданная на $[a, b]$ вещественная функция. Допустим, что это уравнение имеет единственный корень $x_o \in (a,b)$. Пусть существует вещественная функция $\varphi(x,\alpha)$, определенная на $[a,b]\times[c,d]$ ($[c,d]\subset R$) и обладающая такими свойствами: 1. $\exists \alpha_o \in (c,d)$ такое, что для $\forall x \in [a,b]$ $\varphi(x,\alpha_o)=f(x)$; 2. $\exists \alpha_1 \in (c,d)$ и $\exists x_1 \in (a,b)$ такие, что $\varphi(x_1,\alpha_1)=0$; 3. для $\forall \alpha \in [\alpha_1,\alpha_o]$ уравнение $\varphi(x,\alpha)=0$ имеет единственный корень $x=x(\alpha)$. Если $\varphi(x,\alpha)$ кроме этого удовлетворяет условиям теоремы о дифференцируемости неявно заданной функции, то корень уравнения $f(x)=0$ можно найти, решив такую задачу Коши: $x'(\alpha)=-\left[\dfrac{\varphi'_\alpha(x,\alpha)}{\varphi'_x(x,\alpha)}\right]$, $x(\alpha_1)=x_1$, $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_o]$. При этом искомый корень будет равен $x(\alpha_o)$. Указанным образом, например, несложно найти корни уравнений типа $x^\beta=\exp(-\gamma x)$, $1+\log_\delta x=\exp(-\gamma_1 x)$ (β, γ, δ, γ_1 – вещественные числа).

Рассмотрим теперь семейство таких краевых задач: $\upsilon''_{xx}=\omega(x)\upsilon+g(x)$, $x\in[0,l]$, $l\in(0,L)=B\subset R_+$; $\alpha\upsilon'_x\big|_{x=+0}=F_1(\upsilon)\big|_{x=0}$, $\beta\upsilon'_x\big|_{x=l-0}=-F_2(\upsilon)\big|_{x=l-0}$ $(\alpha,\beta\in R)$. Здесь υ - искомая, а $\omega(x)$, $g(x)$ – заданные на $[0, L)$ вещественные функции ($\omega(x)\ge 0$); $F_1(y)$, $F_2(y)\in C^1$ $(-\infty,+\infty)$. При определенных дополнительных ограничениях решение семейства этих задач сводится к отысканию корня $y\in R$ уравнения $F_1(y)+F_2(y)=0$ и решению двух задач Коши для ОДУ 1-го порядка. Одной из таких задач является следующая: $Q'(l)=1-\omega(l)Q^2(l)$, $Q(+0)=0$, $l\in(0,L)$. Следует отметить, что через функцию $Q(l)$ самым непосредственным образом выражаются решения семейства таких краевых задач: $\upsilon''_{xx}=\omega(x)\upsilon$, $x\in[0,l]$, $l\in(0,L)$; $Q(0)=0$, $Q'(l)=1$. При использовании NVMII важную роль играет то, что функция υ рассматривается как функция, зависящая и от параметра погружения l, т.е. $\upsilon = \upsilon(x, l)$.

Литература

1. Роговцов, Н.Н. Свойства и принципа инвариантности. Приложение к решению задач математической физики. Ч.1. Минск, 1999.

УДК 51(07. 07)

Современные технологии обучения студентов инженерных специальностей

Глинская Е.А., Прусова И.В., Прихач Н.К.
Белорусский национальный технический университет

Современные информационные технологии не просто пронизывают все технические дисциплины (точные науки) – они меняют и их самих и методику их преподавания. Этому процессу пока сопротивляется классическая математика. Может быть, поэтому требуется пересмотр содержания и методики преподавания в вузах высшей математики. Все это подталкивает к переходу на современные технологии обучения студентов.

Современный дипломированный технический специалист, овладевая компьютерными технологиями, в обязательном порядке должен изучить: высшую математику, дискретную математику, информатику, численные методы и т. д.

В то же время количество часов на изучение математических дисциплин в вузе сокращается. Таким образом, существует определенное противоречие между возрастанием требований к математическому образованию и уменьшением количества часов, отводимых на изучение математических дисциплин.

Отмеченное противоречие, по нашему мнению, может быть разрешено за счет внедрения современных технологий обучения. Вместе с тем, мы считаем, что полноценное использование информационных технологий возможно только тогда, когда обучаемые не просто получают информацию, а данная информация способна направить знания на развитие познавательных способностей.