



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный
технический университет**

Кафедра «Математические методы в строительстве»

**О. Л. Вербицкая
Л. И. Шевчук**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ:
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ
ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН**

Учебно-методическое пособие

**Минск
БНТУ
2021**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

О. Л. Вербицкая
Л. И. Шевчук

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ:
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ
ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН**

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области строительства и архитектуры*

Минск
БНТУ
2021

УДК 620.1:539.3/.6(075.8)

ББК 30.121я7

В31

Р е ц е н з е н т ы:

зав. кафедрой «Механика материалов и детали машин» БГАТУ,
канд. техн. наук, доцент *В. Н. Основин*;
зав. кафедрой механики и конструирования УО «БГТУ»,
канд. техн. наук, доцент *О. И. Карпович*

Вербицкая, О. Л.

В31 Сопротивление материалов и теория упругости: применение метода конечных элементов при расчете прямоугольных пластин : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций» / О. Л. Вербицкая, Л. И. Шевчук. – Минск : БНТУ, 2021. – 52 с.
ISBN 978-985-583-667-5.

В связи с ростом требований к строительным конструкциям: увеличении их надежности, снижении их стоимости – задачи проектировщика усложняются. Поэтому все чаще для расчета используются численные методы, особенно метод конечных элементов (МКЭ). В настоящем методическом пособии приведены теоретические вопросы, пример расчета и компьютерная программа для контроля вычислений. Для более четкого изложения самой технологии построения алгоритма в методе конечных элементов и возможности ручного счета рассмотрен процесс выполнения всех этапов МКЭ на основе только двух конечных элементов.

Данное учебно-методическое пособие может быть использовано студентами и магистрантами при изучении разделов сопротивления материалов, теории упругости и строительной механики, связанных с численными методами расчета конструкций.

УДК 620.1:539.3/.6(075.8)

ББК 30.121я7

ISBN 978-985-583-667-5

© Вербицкая О. Л., Шевчук Л. И., 2021

© Белорусский национальный
технический университет, 2021

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно повышаются экологические, экономические, архитектурные и конструктивные требования к строительным конструкциям. Так, в строительстве все больше строится высотных и подземных сооружений, применяются новые материалы и технологии сокращения сроков строительства.

Решения многих реальных задач методами классической теории упругости связаны с непреодолимыми математическими трудностями, а иногда вообще невозможны [5].

Развитие компьютерной техники, ее совершенствование позволили широко применять численные методы для расчета конструкций – метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ) и др. Но особенно широкое распространение получил метод конечных элементов, который применяется во многих компьютерных комплексах [5].

В настоящем пособии детально рассматривается технология выполнения этапов метода конечных элементов. Для лучшего понимания самой технологии рассмотрен пример расчета пластины, модель которой построена только из двух треугольных конечных элементов, что позволяет формирование векторов и матриц выполнять ручным счетом.

Для контроля результатов, полученных на каждом этапе расчета, составлена компьютерная программа *Fantom*.

Пособие дает возможность более глубокого понимания самой технологии МКЭ, формирует общее представление о построении конечно-элементных моделей и снижает опасность ошибок при использовании компьютерных комплексов, реализующих МКЭ.

Исходные данные к расчетно-проектировочной работе «Расчет пластины при плоском напряженном состоянии»

Дано:

1. Пластина, построенная из двух конечных элементов и воспринимающая в своей плоскости внешние нагрузки.
2. Расчетные конечно-элементные системы (рис. 1).
3. Таблица численных значений (табл. 1).

Требуется:

1. Получить матрицы жесткости каждого конечного элемента, построить объединенную матрицу и вектор узловых нагрузок.
2. Составить уравнения равновесия системы.
3. Решить систему уравнений равновесия.
4. Определить реакции опор.
5. Найти напряжения в конечных элементах.
6. Для каждого элемента вычислить значения главных напряжений и направления главных осей.

Таблица 1

Численные данные к расчетно-проектировочной работе

№ п/п	Размеры, м		Нагрузка F , кН	Модуль упругости E , МПа	Коэффициент поперечной деформации ν
	a	b			
1	3,0	4,0	1550	15000	0,15
2	3,1	3,8	1500	16000	0,16
3	3,2	3,7	1450	17000	0,17
4	3,3	3,6	1400	18000	0,18
5	3,4	3,5	1350	19000	0,19
6	3,5	3,4	1300	20000	0,20
7	3,6	3,3	1250	21000	0,21
8	3,7	3,2	1200	22000	0,22
9	3,8	3,1	1150	23000	0,23
10	3,9	3,0	1100	24000	0,24

Примечание: толщина пластины $t = 0,1$ м.

На рис. 1 приведены расчетные схемы пластин из конечных элементов.

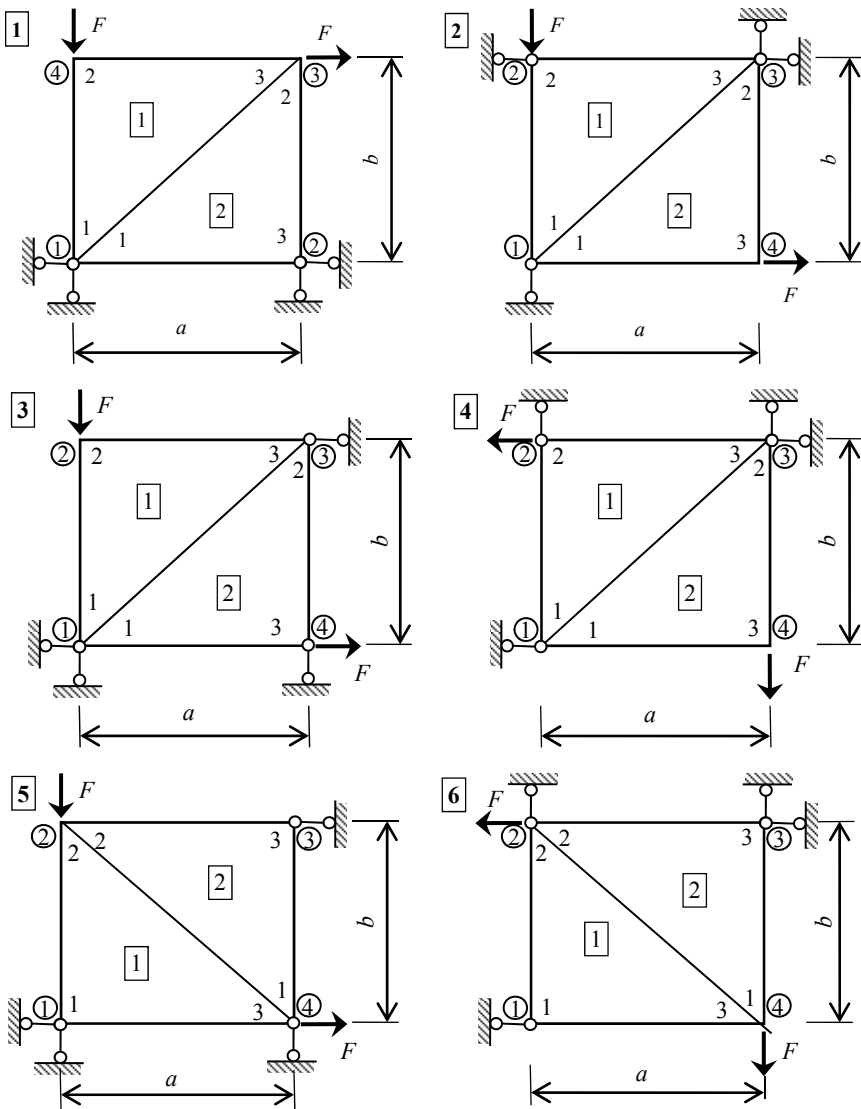


Рис. 1. Конечно-элементные модели прямоугольных пластин

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Уравнения теории упругости

Обычно при решении задач теории упругости используются группы уравнений – статические, геометрические и физические [2, 4, 7].

Статические уравнения без учета объемных сил могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Геометрические уравнения (уравнения Коши):

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; & \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; & \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Физические уравнения выражаются в следующем виде:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta; & \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta; & \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta; & \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Уравнения (1.3) можно записать в виде (1.4), которые выражают изменение формы упругого тела:

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_m = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_m); & \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_m = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_m); & \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_m = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_m); & \tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \end{cases} \quad (1.4)$$

где $\theta = 3\varepsilon_m$;

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu};$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3};$$

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}.$$

Разности напряжений в левой части зависимостей (1.4) и выражения деформаций правой части этих уравнений определяют изменения формы элементарного объема материалов. Относительная объемная деформация материала (1.5) принимается пропорциональной среднему напряжению в окрестности рассматриваемой точки тела:

$$\theta = \frac{3\sigma_m}{E_0}. \quad (1.5)$$

В уравнениях (1.3), (1.4), (1.5) физические коэффициенты: модуль сдвига G , модуль упругости E , объемный модуль упругости E_0 и коэффициент Пуассона ν – связаны зависимостями:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad E_0 = \frac{E}{1-2\nu}. \quad (1.6)$$

Из этих постоянных для изотропных материалов независимыми являются только постоянные E и ν , определяемые обычно на основе экспериментов или по справочным табличным данным.

Задачи теории упругости являются вполне определенными, так как в приведенных 15 уравнениях (1.1)–(1.4) содержится 15 независимых компонентов напряжений, деформаций и перемещений. Это значит, что решение задач сводится к определению 15 функций, удовлетворяющих вышеуказанным уравнениям. Кроме того, должны быть удовлетворены и условия на контуре, которые можно записать в виде следующих уравнений (1.7).

$$\begin{cases} p_{xn} = \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xn} \cos(y, n) + \tau_{xn} \cos(z, n); \\ p_{yn} = \tau_{yx} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n) + \tau_{yz} \cos(z, n); \\ p_{zn} = \tau_{zx} \cos(x, n) + \tau_{zy} \cos(y, n) + \sigma_z \cos(z, n), \end{cases} \quad (1.7)$$

где n – нормаль к элементарной площадке на поверхности.

Если принять за основные неизвестные проекции перемещений точек упругого исследуемого тела, то решение можно получить, подставив в физические уравнения геометрические соотношения, а затем подставив полученные зависимости в уравнения равновесия. В результате этих преобразований для пространственной задачи будем иметь уравнения, содержащие компоненты перемещений:

$$\begin{aligned} \psi_1(u, v, w) &= 0; \\ \psi_2(u, v, w) &= 0; \\ \psi_3(u, v, w) &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Решая уравнения (1.8) с учетом граничных условий (1.7), можно определить неизвестные перемещения:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= 0; \\ v(x, y, z) &= 0; \\ w(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Если в качестве неизвестных принять составляющие напряжений, то для получения решения необходимо использовать уравнения неразрывности деформаций (1.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

а также физические уравнения. Таким образом, получим уравнения в следующей форме:

$$F_1(\sigma_x, \dots, \tau_{zx}) = 0; \dots; F_6(\sigma_x, \dots, \tau_{zx}) = 0, \quad (1.11)$$

решения которых с учетом граничных условий (1.14) позволяют найти неизвестные составляющие напряжений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \Phi_1(x, y, z); \quad \sigma_y = \Phi_2(x, y, z); \quad \sigma_z = \Phi_3(x, y, z); \\ \tau_{xy} = \Phi_4(x, y, z); \quad \tau_{yz} = \Phi_5(x, y, z); \quad \tau_{zx} = \Phi_6(x, y, z). \end{array} \right. \quad (1.12)$$

В этом пособии ограничимся рассмотрением только плоской задачи при условии плоского напряженного состояния.

В случае решения плоских задач теории упругости статические уравнения без учета объемных сил могут быть записаны в следующем виде (1.13).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

При решении плоских задач теории упругости требуется выполнение геометрических уравнений (1.14).

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y};\end{aligned}\tag{1.14}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Зависимости деформации материала конструкций задаются физическими уравнениями и в случае плоских линейных задач выражаются в форме (1.15):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\theta; \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\theta; \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\tag{1.15}$$

или в форме (1.16):

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_m = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_m); \\ \sigma_y - \sigma_m = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_m); \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \end{cases}\tag{1.16}$$

где $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y$;

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu}.$$

В случае плоского напряженного состояния

$$\theta = \frac{2G}{\lambda + 2G} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (1.17)$$

и в уравнении (1.16) вместо коэффициента λ необходимо подставить значение

$$\lambda' = \frac{2\lambda G}{\lambda + 2G}. \quad (1.18)$$

Понятно, что в приведенных выше восьми уравнениях (1.13), (1.14) и (1.15) для решения плоских задач содержится восемь неизвестных компонентов напряжений, деформаций и перемещений. Отсюда следует, что для решения плоских задач требуется определить восемь функций:

$$\begin{aligned} u(x, y), v(x, y), \sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}, \\ \varepsilon_x(x, y), \varepsilon_y(x, y), \gamma_{x,y}(x, y). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Перечисленные выше функции должны удовлетворять условиям на контуре пластины:

$$\begin{cases} p_{xn} = \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n); \\ p_{yn} = \tau_{yx} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n). \end{cases} \quad (1.20)$$

Для решения указанных статических, геометрических и физических уравнений могут быть использованы различные методы. Это зависит от того, что принимается в качестве неизвестных.

Возможен также метод решения задач теории упругости, когда за основные неизвестные приняты некоторые из перемещений и некоторые из напряжений. Методы решений основных уравнений теории упругости в замкнутой аналитической форме дают результат при рассмотрении лишь простейших задач. Если геометрическая форма конструкции сложная, то получить решение в замкнутой фор-

ме из-за огромных математических затруднений практически невозможно. В этом случае прибегают к численным методам решения задач теории упругости, в частности метода конечных элементов [6].

1.2. Основные уравнения метода конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) основан на известной идее метода строительной механики стержневых систем [1], которая формально применена и для континуальных сред. Непрерывная среда разделяется воображаемыми линиями на определенное количество конечных элементов (КЭ). Обычно предполагают, что элементы соединены между собой в узловых точках, которые расположены на границах конечных элементов. В качестве неизвестных принимают перемещения этих узловых точек. Затем выбирается система функций, которые однозначно описывают перемещения внутри каждого конечного элемента. Сами функции в качестве коэффициентов содержат перемещения узловых точек. По значениям координат узловых точек конечных элементов выражаются деформации внутри этих элементов. По найденным значениям деформаций определяют напряжения внутри каждого конечного элемента. Разработанная математическая модель в мировой практике позволяет найти узловые силы, которые уравнивают заданные на конечном элементе объемные, поверхностные силы, и учитывать начальные деформации.

К настоящему времени разработаны математические модели для случаев моделирования конечными элементами среды, являющейся однородной или неоднородной, изотропной или анизотропной, линейно- или нелинейно-деформируемой. При этом могут быть использованы конечные элементы различной геометрической формы. Это зависит от того, для какого по своей форме будет использована конечно-элементная модель.

Для вывода основных уравнений в методе конечных элементов обычно используется вариационный метод решения задач теории упругости.

Полная потенциальная энергия системы определяется зависимостью

$$W = \mathfrak{E}(u, v, w) - A(Q, F), \quad (1.21)$$

где $\mathcal{E}(u, v, w)$ – потенциальная энергия деформируемого тела;

$A(Q, F)$ – потенциал внешних сил;

u, v, w – перемещения узлов;

Q – объемные силы;

F – поверхностные силы.

Потенциальная энергия деформации тела имеет вид:

$$\mathcal{E}(u, v, w) = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV. \quad (1.22)$$

Учитывая физические уравнения (закон Гука) (1.3), выразим компоненты напряжений через компоненты деформаций. Затем выразим компоненты перемещений, используя геометрические уравнения Коши (1.2). Обозначим неизвестные компоненты перемещений узлов конечных элементов через u_i, v_i, w_i . Уравнение (1.22) запишем в форме (1.23) при $i = 1, 2, \dots, n$. Отметим, что здесь n – число вершин элементов [5].

$$\mathcal{E}(u, v, w) = \sum_{i=1}^n \left[\alpha_{ii} u_i^2 + \beta_{ii} v_i^2 + \gamma_{ii} w_i^2 + 2(\delta_{ij} u_i v_j + \varepsilon_{ii} v_i w_i + \eta_{ii} w_i u_i) \right], \quad (1.23)$$

где $\alpha_{ii}, \beta_{ii}, \gamma_{ii}, \delta_{ij}, \varepsilon_{ii}, \eta_{ii}$ – постоянные коэффициенты, зависящие от координат вершин конечных элементов, на которые условно разделяется рассматриваемое тело, и физических показателей деформируемой среды.

В матричной форме выражение (1.22) принимает следующий вид:

$$\mathcal{E}(u_i, v_i, w_i) = \frac{1}{2} \vec{V}^T \bar{K} \vec{V}, \quad (1.24)$$

где матрицей-строкой выражается транспонированный вектор перемещений вершин элементов (1.25):

$$\vec{V}^T = [u_1, u_2, \dots, u_n; v_1, v_2, \dots, v_n; w_1, w_2, \dots, w_n]. \quad (1.25)$$

Представим матрицу жесткости \bar{K} , имеющую порядок $3n$, в следующем виде (1.26). Отметим, что матрица жесткости является квадратной.

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}, 0, \dots, 0 & \delta_{11}, 0, \dots, 0 & \eta_{11}, 0, \dots, 0 \\ 0, \alpha_{22}, \dots, 0 & 0, \delta_{22}, \dots, 0 & 0, \eta_{22}, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, 0, \dots, \alpha_{nn} & 0, 0, \dots, \delta_{nn} & 0, 0, \dots, \eta_{nn} \\ \hline \delta_{11}, 0, \dots, 0 & \beta_{11}, 0, \dots, 0 & \varepsilon_{11}, 0, \dots, 0 \\ 0, \delta_{22}, \dots, 0 & 0, \beta_{22}, \dots, 0 & 0, \varepsilon_{22}, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, 0, \dots, \delta_{nn} & 0, 0, \dots, \beta_{nn} & 0, 0, \dots, \varepsilon_{nn} \\ \hline \eta_{11}, 0, \dots, 0 & \varepsilon_{11}, 0, \dots, 0 & \gamma_{11}, 0, \dots, 0 \\ 0, \eta_{22}, \dots, 0 & 0, \eta_{22}, \dots, 0 & 0, \eta_{22}, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, 0, \dots, \eta_{nn} & 0, 0, \dots, \varepsilon_{nn} & 0, 0, \dots, \gamma_{nn} \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Потенциал сил в матричной форме записывается следующим образом:

$$A(Q, F) = \vec{V}^T \vec{F}, \quad (1.27)$$

где \vec{F} – матрица-столбец (вектор) сил.

$$\vec{F}^T = (F_{x1}, F_{x2}, \dots, F_{xn}; F_{y1}, F_{y2}, \dots, F_{yn}; F_{z1}, F_{z2}, \dots, F_{zn}). \quad (1.28)$$

Отсюда можно получить общее выражение для полной потенциальной энергии системы (1.20) в матричной форме (1.29):

$$W = \frac{1}{2} \vec{V}^T \bar{K} \vec{V} - \vec{V}^T \vec{F}. \quad (1.29)$$

Перемещения вершин конечных элементов определяются на основе использования принципа Лагранжа. Согласно этому принципу в качестве критерия принимается минимум полной потенциальной энергии из всех возможных, то есть не противоречащих условиям закрепления тела. Действительными перемещениями оказываются те, при которых система получает минимум полной потенциальной энергии.

Продифференцируем полную потенциальную энергию системы (1.29) по неизвестным u_i, v_i, w_i и приравняем полученные уравнения к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u_i} + \frac{\partial W}{\partial v_i} + \frac{\partial W}{\partial w_i} = \frac{\partial \mathcal{E}(u, v, w)}{\partial u_i} + \frac{\partial \mathcal{E}(u, v, w)}{\partial v_i} + \\ + \frac{\partial \mathcal{E}(u, v, w)}{\partial w_i} - \frac{\partial A(Q, F)}{\partial u_i} - \frac{\partial A(Q, F)}{\partial v_i} - \frac{\partial A(Q, F)}{\partial w_i}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Выражение (1.30) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [(\alpha_{ii}u_i + \delta_{ii}v_i + \eta_{ii}w_i) + (\beta_{ii}v_i + \delta_{ii}u_i + \varepsilon_{ii}w_i) + \\ + (\gamma_{ii}w_i + \varepsilon_{ii}v_i + \eta_{ii}u_i)] = \sum_{i=1}^n (F_{xi} + F_{yi} + F_{zi}), \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\text{где } \frac{\partial \mathcal{E}(u, v, w)}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^n (\alpha_{ii}u_i + \delta_{ii}v_i + \eta_{ii}w_i); \quad \frac{\partial A(Q, F)}{\partial u_i} = F_{xi};$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(u, v, w)}{\partial v_i} = \sum_{i=1}^n (\beta_{ii}v_i + \delta_{ii}u_i + \varepsilon_{ii}w_i); \quad \frac{\partial A(Q, F)}{\partial v_i} = F_{yi};$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(u, v, w)}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^n (\gamma_{ii}w_i + \varepsilon_{ii}v_i + \eta_{ii}u_i); \quad \frac{\partial A(Q, F)}{\partial w_i} = F_{zi}.$$

Для сокращения записи представим систему уравнений в матричной форме:

$$\vec{F} = \bar{K}\vec{V}, \quad (1.32)$$

где \vec{F} – вектор обобщенных сил;

\bar{K} – обобщенная матрица жесткости системы, связывающая обобщенные силы и перемещения;

\vec{V} – вектор обобщенных перемещений.

Очевидно, что основное матричное уравнение (1.32) для пространственной задачи представляет собой систему линейных алгебраических уравнений порядка $3n$. Для плоской задачи система линейных алгебраических уравнений будет иметь порядок $2n$.

2. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

2.1. Основные уравнения плоского напряженного и плоского деформированного состояний в матричной форме

Рассмотрим общий случай, когда пластина неоднородная и выполнена из трансверсально-изотропных материалов. При этом считаем, что пластина свободна от начальных напряжений и нагружена только внешними силами, приложенными на ее контуре в срединной плоскости. Влияние объемных сил может быть при необходимости учтено отдельно.

Напряженное и деформированное состояния в любой точке тела характеризуются вектором напряжений и вектором деформаций соответственно

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}; \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Перемещения точки определяются вектор-функцией координат x и y :

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Геометрические уравнения (1.14) при этом выразятся следующим вектором:

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Физические уравнения (закон Гука) для изотропного материала запишутся в виде (1.15):

$$\bar{\sigma} = \bar{D}\bar{\epsilon}, \quad (2.4)$$

где физическая матрица упругости \bar{D} для плоского напряженного состояния имеет вид:

$$\bar{D} = \frac{E}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Для случая плоского деформированного состояния физическая матрица выражается следующим образом:

$$\bar{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Если материал трансверсально-изотропный, то есть обладающий различными упругими характеристиками в направлении главных осей анизотропии X и Y (рис. 2.1), то при плоском напряженном состоянии физическая матрица принимает вид:

$$\bar{D} = \frac{E_2}{1-n\nu_2^2} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-n\nu_2^2) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

а при плоском деформированном состоянии следующий вид:

$$\bar{D} = \bar{E}'_2 \begin{bmatrix} n(1 - nv_2^2) & nv_2(1 + \nu) & 0 \\ nv_2(1 + \nu_1) & 1 - \nu_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(1 - \nu_1)(1 - \nu_1 - 2nv_2^2) \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

где $n = \frac{E_1}{E_2}$;

$$m = \frac{G_2}{E_2};$$

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)};$$

$$E'_2 = \frac{E_2}{(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2nv_2^2)}.$$

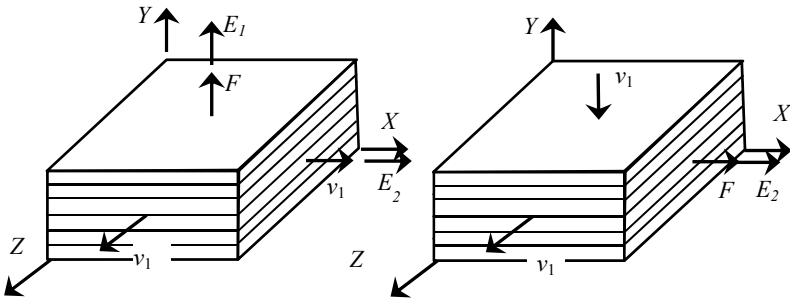


Рис. 2.1. Упругие постоянные для трансверсально-изотропного материала

Статические уравнения (1.13) можно записать в матричной форме аналогично геометрическим соотношениям (2.3), однако в МКЭ они в явном виде не используются, так же, как и условия на контуре (1.20).

2.2. Матрица жесткости треугольного конечного элемента

2.2.1. Дискретизация пластинки

Поясним, как обозначаются узлы конечных элементов и силы, приложенные к ним. Для этого выделим в пластине конечный элемент (рис. 2.2). Обозначим его углы цифрами 1, 2, 3. Принимаем оси координат X и Y . Нагрузку, если она представлена в виде сосредоточенных сил, раскладывают на составляющие (проекции).

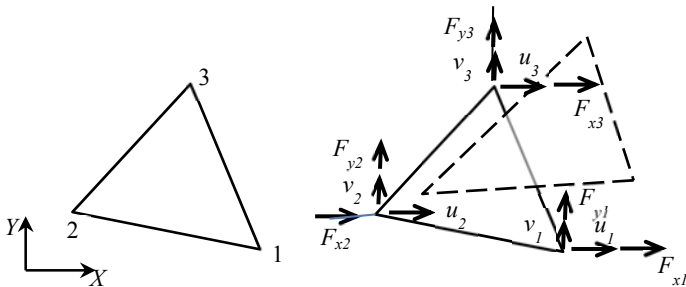


Рис. 2.2. Треугольный конечный элемент с узловыми силами и перемещениями

Для удобства иногда нагрузку прикладывают не непосредственно к узлам системы, а в пределах размеров конечных элементов, например на его середине. В этом случае такая произвольная внешняя нагрузка на поверхности тела известными способами теоретической механики все равно должна быть приведена к сосредоточенным силам, действующим в узлах КЭ.

Не исключается и приложение к рассматриваемой конечно-элементной модели сосредоточенных моментов. В этом случае моменты заменяются парами сил. При этом силы должны быть приложены к узлам модели.

Для отдельного конечного элемента эти силы и соответствующие им перемещения образуют векторы:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 \end{bmatrix}; \quad \vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

компоненты которых являются проекциями этих силы и перемещений узлов:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{bmatrix}; \quad \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}; \\ \vec{F}_2 &= \begin{bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{bmatrix}; \quad \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}; \\ \vec{F}_3 &= \begin{bmatrix} F_{x3} \\ F_{y3} \end{bmatrix}; \quad \vec{V}_3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Как правило, при использовании МКЭ за основные неизвестные принимаются перемещения узлов КЭ. Количество неизвестных перемещений конечно и определяется количеством узлов в конечном элементе и количеством степеней свободы каждого узла. Отметим, что это отличается от методов решения задач классической теории упругости, когда количество неизвестных бесконечное множество и решением являются функции. Принцип метода конечных элементов заключается в следующем: сплошное тело заменяется дискретным набором отдельных элементов, каждый из которых, в свою очередь, рассчитывается приближенно. Отметим, что если конечный элемент представляет собой стержень, то он может быть рассчитан точно и его размеры при этом не ограничиваются [1]. Для континуальных тел точного решения получить невозможно. Поэтому используются приближенные решения. При этом для повышения точности решения применяются различные способы.

Так, например, анализ показывает, что при увеличении количества КЭ сплошное упругое тело и его дискретная расчетная схема будут по характеру работы сближаться между собой. Но подобное утверждение для некоторых конечных элементов не всегда справедливо [5]. На практике инженеры очень часто используют прием локального сгущения сетки узлов КЭ для уточнения полученных результатов.

2.2.2. Аппроксимация перемещений внутри КЭ

В данном методе расчета приходится заранее задавать некоторую зависимость между перемещениями внутренних и узловых точек. В простейшем случае эта зависимость линейная и может быть представлена в матричной форме:

$$\bar{f} = \bar{\Phi}^T \bar{V}, \quad (2.11)$$

где матрица $\bar{\Phi}$ размерами 6×2 имеет следующий вид:

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{E}_2 \Phi_1(x, y) \\ \bar{E}_2 \Phi_2(x, y) \\ \bar{E}_2 \Phi_3(x, y) \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

где \bar{E}_2 – единичная матрица, порядок которой равен числу степеней свободы узла, то есть двум;

$\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$, $\Phi_3(x, y)$ – функции положения точки или функции формы. Для их определения используется предполагаемая линейная связь перемещений и координат внутренних точек (2.13).

$$\begin{cases} u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \\ v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{cases} \quad (2.13)$$

Соотношения (2.13) справедливы также и для узловых точек 1, 2 и 3 с координатами $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1; \\ u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2; \\ u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3; \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 y_1; \\ v_2 = \alpha_4 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 y_2; \\ v_3 = \alpha_4 + \alpha_5 x_3 + \alpha_6 y_3. \end{cases} \quad (2.14)$$

Решая полученные две системы, состоящие каждая из трех уравнений (2.14), относительно шести неизвестных коэффициентов

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ и подставляя последние в выражения (2.13), получим развернутую запись формулы (2.11):

$$\begin{cases} u = [(a_1 + b_1x + c_1y)u_1 + (a_2 + b_2x + c_2y)u_2 + (a_3 + b_3x + c_3y)u_3] \frac{1}{2\Delta}; \\ v = [(a_1 + b_1x + c_1y)v_1 + (a_2 + b_2x + c_2y)v_2 + (a_3 + b_3x + c_3y)v_3] \frac{1}{2\Delta}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Здесь коэффициенты $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ выражаются зависимостями (2.16).

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2; & b_1 &= y_2 - y_3; & c_1 &= x_3 - x_2; \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3; & b_2 &= y_3 - y_1; & c_2 &= x_1 - x_3; \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1; & b_3 &= y_1 - y_2; & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Удвоенная площадь треугольника:

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (2.17)$$

Формулы (2.15) можно записать компактно:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Phi_1(x, y); \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Phi_2(x, y); \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Phi_3(x, y) \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

или

$$\vec{f} = [E_2\Phi_1(x, y); E_2\Phi_2(x, y); E_2\Phi_3(x, y)] \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Здесь, в соответствии с выражениями (2.11), (2.12) и исходя из геометрических функций (2.15), функции, описывающие положения точки, будут равны:

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y) = (a_1 + b_1x + c_1y) / 2\Delta; \\ \Phi_2(x, y) = (a_2 + b_2x + c_2y) / 2\Delta; \\ \Phi_3(x, y) = (a_3 + b_3x + c_3y) / 2\Delta. \end{cases} \quad (2.20)$$

2.2.3. Деформации и напряжения в конечных элементах

Для того чтобы получить матричную форму для деформаций, следует вычислить частные производные от перемещений u, v (2.15) по координатам x, y и, подставляя их в геометрические уравнения (2.3), с учетом обозначений (2.15) и (2.16) получить матричную форму для деформаций КЭ.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{B}\bar{V}, \quad (2.21)$$

где матрица \bar{B} размерами 3×6 состоит из трех подматриц $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3$.

$$\bar{B} = [\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3], \quad (2.22)$$

каждая из которых имеет вид:

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_2 = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & c_2 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_3 = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & c_3 \\ c_3 & b_3 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Напряжения в КЭ вычисляются через деформации (2.22) по закону Гука (2.4):

$$\bar{\sigma} = \bar{D}\bar{\varepsilon} = \bar{D}\bar{B}\bar{V} = \bar{T}\bar{V}. \quad (2.24)$$

Прямоугольная матрица \bar{T} , имеющая размерность 3×6 , может быть записана в развернутом виде. Если имеет место плоское напряженное состояние при изотропном материале, то с учетом (2.5), (2.22) и (2.23) получается выражение

$$\bar{T} = \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_1 & \nu c_1 & b_2 & \nu c_2 & b_3 & \nu c_3 \\ \nu b_1 & c_1 & \nu b_1 & c_2 & \nu b_1 & c_3 \\ \frac{1-\nu}{2} c_1 & \frac{1-\nu}{2} b_1 & \frac{1-\nu}{2} c_2 & \frac{1-\nu}{2} b_2 & \frac{1-\nu}{2} c_3 & \frac{1-\nu}{2} b_3 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

В формулах (2.20) и (2.24) компоненты деформаций ε_x , ε_y , γ_{xy} и напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в формулах (2.21) и (2.24) не зависят от координат внутренних точек x , y , то есть они постоянны в пределах каждого КЭ. В этом проявляется приближенность МКЭ, связанная с аппроксимацией перемещений внутри отдельного элемента.

Иногда для получения большей точности при определении напряжений относят полученные в формулах (2.21) и (2.24) величины к центру тяжести элемента. При этом в узловых точках усредняют соответствующие значения для элементов, примыкающих к данному узлу. Так, например, чаще всего напряжения в узлах принимаются как средние арифметические от напряжений в ближайших элементах.

2.2.4. Уравнения равновесия и матрица жесткости

Для получения решения необходимо определить перемещения узлов конечных элементов. Вектор узловых перемещений получается в результате решения системы уравнений равновесия, которые получаются на основе принципа возможных перемещений. Это является необходимым и достаточным условием минимума полной потенциальной энергии системы (см. вариационный принцип Лагранжа). Нетрудно видеть, что из всех возможных, то есть не противоречащих условиям закрепления тела перемещений действительными оказываются перемещения, для которых сумма возможных работ всех внутренних и внешних сил равна нулю:

$$\delta W = \delta \mathcal{E} - \delta A = 0 \quad \text{или} \quad \delta \mathcal{E} = \delta A. \quad (2.26)$$

Возможная (виртуальная) работа внешних сил на соответствующих им перемещениях вычисляется как скалярное произведение векторов:

$$\delta A = \vec{V}^T \vec{F}. \quad (2.27)$$

Аналогично удельная работа внутренних сил с учетом (2.21) и (2.24) равна:

$$\delta \mathcal{E}_y = \vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma} = (\vec{B}\vec{V})^T \vec{\sigma} = \vec{V}^T \vec{B}^T \vec{\sigma} = \vec{V}^T \vec{B}^T \vec{D}\vec{B}\vec{V}. \quad (2.28)$$

Для поиска вектора узловых перемещений необходимо проинтегрировать выражение (2.28) по объему V рассматриваемого треугольного конечного элемента и приравнять результаты к величине (2.27) согласно принципу возможных перемещений. В результате найдем:

$$\vec{V}^T \vec{F} = \vec{V}^T \left(\int_V \vec{B}^T \vec{D}\vec{B} dV \right) \vec{V}. \quad (2.29)$$

Произведя сокращение, получим уравнение равновесия элемента в матричной форме. Это самая основная система уравнений в МКЭ. Поэтому часто ее называют системой разрешающих уравнений:

$$\vec{F} = \vec{K}\vec{V}, \quad (2.30)$$

где \vec{K} называется матрицей жесткости КЭ.

$$\vec{K} = \left(\int_V \vec{B}^T \vec{D}\vec{B} dV \right). \quad (2.31)$$

Если элемент имеет площадь Δ (2.17) и постоянную толщину t , то интегрирование (2.31) дает нам возможность определить матрицу жесткости перемножением геометрической и физической матриц.

$$\vec{K} = \vec{B}^T \vec{D}\vec{B}t\Delta. \quad (2.32)$$

При учете объемных сил (например собственного веса или сил инерции), если они действуют на элемент и равномерно распределены по площади или объему конечного элемента, их суммарные проекции распределяются поровну между тремя узлами и алгебраически складываются с элементами вектора узловых сил в левой части уравнения (2.30).

Матрица жесткости КЭ 6-го порядка может быть записана в развернутом виде следующим образом:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Смысл элементов матрицы (2.33) заключается в следующем. Каждая квадратная матрица $\bar{K}_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 2-го порядка состоит из элементов, численно равных горизонтальным и вертикальным реакциям в i -м узле КЭ от соответственных единичных смещений j -го узла: $u_i = 1, v_j = 1$. Она вычисляется с учетом зависимостей (2.22) и (2.23) по формуле

$$\bar{K}_{ij} = \bar{B}_i^T \bar{D} \bar{B}_j t \Delta. \quad (2.34)$$

Отметим, что матрица жесткости \bar{K} обладает свойством симметрии согласно теореме о взаимности реакции. Это значит, что элементы, расположенные на главной диагонали, всегда положительные. Это свойство может служить дополнительной проверкой вычислений в случае изотропного материала и равнобедренных КЭ, например, прямоугольников, если стороны 12 и 23 равны и направлены вдоль осей X и Y . Тогда матрица жесткости \bar{K} симметрична также и относительно боковой диагонали.

2.3. Объединение конечных элементов

2.3.1. Система уравнений равновесия МКЭ

Таким образом, очевидно, что расчет конструкций сводится к составлению и решению объединенной системы уравнений равновесия отдельных конечных элементов. Свободные члены в матричных уравнениях получаются путем суммирования внешних нагрузок \vec{F} и реакций для всех узлов конструкции, вызванных искомыми перемещениями \vec{V} , представленными в виде векторов (2.35).

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}_1 \\ \dots \\ \vec{F}_n \end{bmatrix}, \quad \vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \dots \\ \vec{V}_n \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

где n – количество узлов в конечно-элементной системе.

Но поскольку для одного элемента равновесие его узлов обуславливается уравнением (2.30), то для совокупности КЭ получается аналогичное соотношение. Только порядок такой системы исчисляется суммарным количеством степеней свободы всех незакрепленных узлов полной конечно-элементной модели:

$$\vec{F} = \bar{K}\vec{V}. \quad (2.36)$$

Отметим, что матрица жесткости всей системы конечно-элементной модели \bar{K} имеет порядок $2n$, равный числу степеней свободы узлов, и находится как сумма матриц жесткости отдельных l -х КЭ, дополненных до размеров $2n \times 2n$ нулями.

$$\bar{K} = \sum_l \bar{K}_l. \quad (2.37)$$

2.3.2. Получение матриц жесткости всей конструкции

Для получения матрицы жесткости конечно-элементной модели требуется просуммировать коэффициенты в выражении (2.37) по всем конечным элементам. Однако фактически требуется склады-

вать только ненулевые коэффициенты \bar{K}_{ijl} для l -х, примыкавших к l -му узлу, j -х единичных перемещений. Следовательно, i -й и j -й узлы конструкции не связаны между собой l элементами и подматрицы K_{ijl} оказываются нулевыми.

Отметим, что каждой произвольной нумерации узлов соответствует отдельная структура матрицы жесткости. Она будет правильной, но недостаточно эффективной, так как для реальных конструкций в самом общем случае она получается разреженной с большим числом симметрично расположенных нулевых подматриц, расположенных на боковых диагоналях. Однако можно добиться оптимальной нумерации узлов. При этом эффективная нумерация считается такой, при которой матрица жесткости становится ленточной, с наименьшей стороной ленты. Эффективность нумерации заключается в том, что улучшается обусловленность матрицы и повышается точность решения системы уравнений, а также сокращается время решения и объем затрачиваемой оперативной памяти.

Отметим, что правильная оценка эффективности самой матрицы жесткости и алгоритма, реализующего метод конечных элементов, может быть дана только в том случае, если нулевые элементы при вычислениях не принимают участие.

2.3.3. Граничные условия

Обычно при выполнении расчетов по МКЭ перемещения опорных закреплений в системе уравнений (2.36) известны или заданы. Они могут быть заданы в виде чисел или быть равными нулю, если опоры абсолютно жесткие. Неизвестными оказываются усилия или реакции на опорах. Выполнив перегруппировку уравнений (2.36), можно объединить все неизвестные перемещения в вектор \vec{V}_0 , а соответствующие им реакции – в вектор \vec{R} . Так же объединяются неизвестные перемещения в вектор \vec{V}_* и соответствующие неизвестные силы – в вектор \vec{F} . В результате получим матричное уравнение

$$\vec{F} = \bar{K}\vec{V} = \begin{bmatrix} \bar{K}_* & \bar{K}_{*0} \\ \bar{K}_{0*} & \bar{K}_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{V}_* \\ \vec{V}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}_* \\ \vec{R} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Матрица \bar{K}_* получается из матрицы \bar{K} путем вычеркивания строк и столбцов, соответствующих известным перемещениям \bar{V}_0 . После раскрытия скобок и перемножения матриц соотношение (2.36) разделяется на две независимые системы уравнений относительно неизвестных, содержащихся в векторах \bar{V}_* и \bar{R} . Для случая, когда опоры абсолютно жесткие и не смещаются, то есть $\bar{V}_0 = \bar{0}$, первая система уравнений в системе (2.38) приобретает вид:

$$\bar{K}_* \bar{V}_* = \bar{F}_*. \quad (2.39)$$

Порядок системы уравнений (2.39) существенно меньше порядка общей системы равновесия и равен числу степеней свободы узлов закрепленной конструкции. Одним из возможных методов решения такой системы являются обращения матрицы:

$$\bar{V}_* = \bar{K}_*^{-1} \bar{F}_*. \quad (2.40)$$

На практике, однако, находят перемещения путем непосредственного решения системы (2.39), например, методом исключения Гаусса. Такой метод гораздо быстрее по сравнению с методом обращения матрицы.

Далее из векторного уравнения (2.39) вычисляются неизвестные реакции \bar{R} :

$$\bar{R} = \bar{K}_{0*} \bar{V}_* \quad (2.41)$$

или с учетом (2.40):

$$\bar{R} = \bar{K}_{0*} \bar{K}_{0*}^{-1} \bar{F}_*. \quad (2.42)$$

Из соотношения (2.41) следует, что при наличии абсолютно жестких опор формирование матрицы \bar{K}_{0*} обязательно только при расчете конструкций, учитывающих также осадки опор, например, за счет деформаций оснований фундаментов.

В итоге по найденным перемещениям узлов \bar{V}_* напряжения внутри каждого конечного элемента легко вычисляются по формуле (2.24).

2.3.4. Форма хранения матриц жесткости и решение системы разрешающих уравнений

Для реальных конструкций, состоящих из большого количества конечных элементов (несколько сотен или даже тысяч), упорядочивание матрицы жесткости не всегда возможно и не всегда дает высокую эффективность решения. В этом случае следует учитывать наличие подавляющего количества нулевых элементов матрицы. Для решения систем уравнений с сильно разреженной матрицей используется специально разработанная технология, хорошо изложенная в книге С. Писсанецкого [8].

В технологии разреженных матриц важную роль играет форма хранения и обработка списков. Выбор схемы хранения зависит от операций, которые предполагается производить. Эффективность выполнения операций весьма различна для разных схем хранения коэффициентов матриц жесткости и векторов узловых нагрузок.

Отметим, что в методе конечных элементов, как правило, используются алгебраические операции над сильно разреженными матрицами. Сюда можно отнести следующие операции: упаковку полноформатной матрицы в строчный формат, распаковку матрицы из строчного формата в полноформатную, вычеркивание строк или столбцов в матрице, умножение матриц на скаляр, умножение разреженных матриц, факторизация разреженной матрицы, решение системы линейных алгебраических уравнений с сильно разреженной матрицей коэффициентов при неизвестных.

Разреженный строчный формат *RR(C)U* (*Row-wise Representation Complete and Unordered*) предложен Чангом (*Chang*, 1969) и Густовсоном (*Gustavson*, 1972). Это одна из наиболее широко используемых схем хранения разреженных матриц. С технологией операций над сильно разреженными матрицами можно подробно ознакомиться в книге С. Писсанецкого [8].

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПЛАСТИНЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИИ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Дано:

1. Прямоугольная пластина постоянной толщины, закрепленная опорными связями. Пластина нагружена внешними силами, расположенными в срединной плоскости пластины.

2. Расчетная схема пластины состоит из двух треугольных конечных элементов, приведена на рис. 3.1.

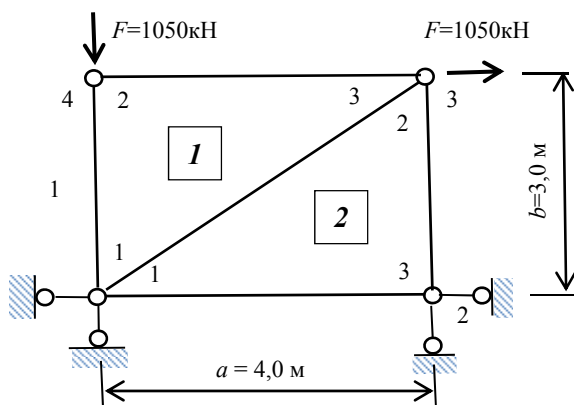


Рис. 3.1. Расчетная схема пластины, составленная из двух конечных элементов

3. Приняты следующие числовые данные: толщина конечного элемента $t = 0,1$ м; размеры конечного элемента $a = 4,0$ м; $b = 3,0$ м; нагрузка $F = 1050$ кН; коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$; модуль упругости $E = 25000$ МПа.

Требуется:

1. Получить матрицу жесткости отдельных конечных элементов, объединенную матрицу и вектор узловой нагрузки;
2. Решить систему уравнений равновесия;
3. Определить опорные реакции;
4. Найти напряжения в конечных элементах;
5. Для каждого конечного элемента вычислить значения главных напряжений и показать положение главных площадок.

Решение. Выделим первый конечный элемент (рис. 3.2) и определим координаты его узлов.

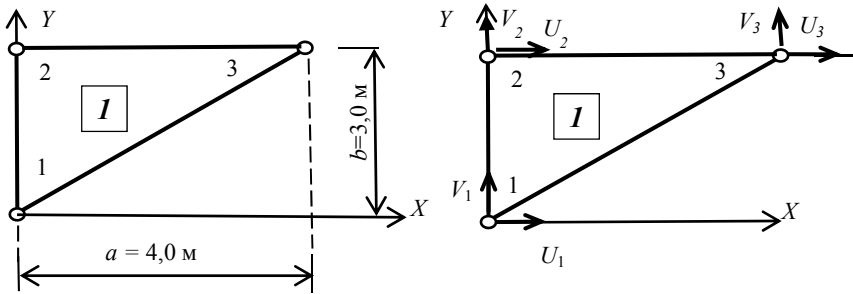


Рис. 3.2. Первый конечный элемент и перемещения его узлов

Примем систему координатных осей и определим координаты узлов конечного элемента:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0; & y_1 &= 0; \\ x_2 &= 0; & y_2 &= 3,0 \text{ м}; \\ x_3 &= 4,0 \text{ м}; & y_3 &= 3,0 \text{ м}. \end{aligned}$$

Вычислим элементы матрицы \bar{B} (2.20) и площадь первого конечного элемента Δ :

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 = 3,0 - 3,0 = 0; & c_1 &= x_3 - x_2 = 4,0 - 0 = 4,0 \text{ м}; \\ b_2 &= y_3 - y_1 = 3,0 - 0 = 3,0 \text{ м}; & c_2 &= x_1 - x_3 = 0 - 4,0 = -4,0 \text{ м}; \\ b_3 &= y_1 - y_2 = 0 - 3,0 = -3,0 \text{ м}; & c_3 &= x_2 - x_1 = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(y_3 - y_1)(x_3 - x_1) = \frac{1}{2}(3,0 - 0)(4,0 - 0) = 6,0 \text{ м}^2.$$

Тогда элементы матрицы $\bar{B} = [\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3]$ будут иметь следующий вид:

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_3 = \begin{bmatrix} b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Матрица физических коэффициентов содержит модуль упругости и коэффициент Пуассона:

$$\bar{D} = E \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Для автоматизации вычислений матрицы первого конечного элемента представим ее в виде девяти подматриц как клеточную матрицу. Проиндексируем подматрицы следующим образом:

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} \end{bmatrix}.$$

Находим элементы подматриц K_{ij} , используя следующую индексацию и значения:

$$\bar{K}_{ij} = \bar{B}_j^T \bar{D} \bar{B}_i t \Delta = \frac{tE}{4\Delta(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix}.$$

Проходя все клетки матрицы жесткости первого конечного элемента \bar{K}_1 и учитывая значения параметров матриц \bar{B}_1 , \bar{B}_2 , \bar{B}_3 , получим значения ее элементов:

$$\bar{K}_1 = \gamma \begin{bmatrix} 6,00 & 0 & -6,00 & 4,50 & 0 & -4,50 \\ 0 & 16,00 & 3,00 & -16,00 & -3,00 & 0 \\ -6,00 & 3,00 & 15,00 & -7,50 & -9,00 & 4,50 \\ 4,50 & -16,00 & -7,50 & 19,375 & 3,00 & -3,375 \\ 0 & -3,00 & -9,00 & 3,00 & 9,00 & 0 \\ -4,50 & 0 & 4,50 & -3,375 & 0 & 3,375 \end{bmatrix}, \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

$$\text{где } \gamma = \frac{tE}{4\Delta(1-\nu^2)} = \frac{0,1 \cdot 25 \cdot 10^3}{4 \cdot 6,0(1-0,25^2)} = 111,11 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}.$$

Физический смысл коэффициентов матрицы жесткости конечного элемента поясним на следующем рисунке (рис. 3.3).

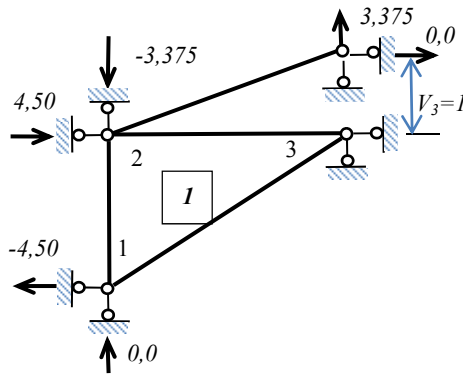


Рис. 3.3. Физический смысл элементов 6-го столбца матрицы жесткости первого конечного элемента

Для определения реакций опор следует приведенные значения умножить на коэффициент γ .

Таким образом, смысл элементов матрицы жесткости состоит в следующем. Если узлы треугольного конечного элемента жестко закреплены, то вертикальное единичное смещение, предположим, третьего узла (рис. 3.3) вызовет реакции на всех опорных связях, которые будут являться элементами шестого столбца матрицы жесткости \bar{K}_1 . Для получения всех элементов матрицы жесткости \bar{K}_1 требуется последовательно смещать узлы по направлению всех связей и находить реакции на всех опорах.

Отметим, что размерность матрицы жесткости конечного элемента с учетом размерности коэффициента γ составляет Н/м.

Аналогичные действия следует выполнить и для матрицы жесткости второго конечного элемента.

Выделим второй конечный элемент (рис. 3.4) и определим координаты его узлов.

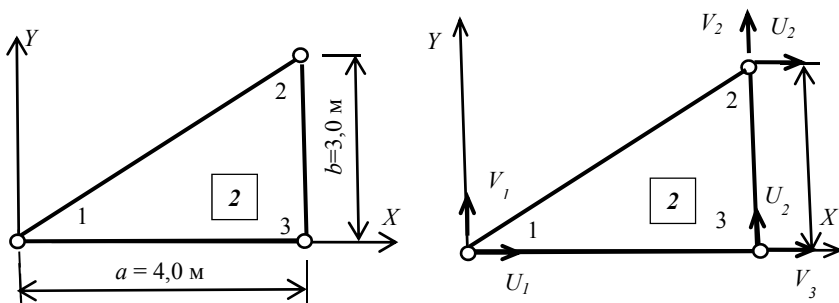


Рис. 3.4. Второй конечный элемент и перемещения его узлов

Примем систему координатных осей для второго конечного элемента и определим координаты узлов конечного элемента:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0; & y_1 = 0; \\ x_2 = 4,0 \text{ м}; & y_2 = 3,0 \text{ м}; \\ x_3 = 4,0 \text{ м}; & y_3 = 0. \end{array}$$

Вычислим элементы матрицы \bar{B} (2.22) и площадь второго конечного элемента Δ :

$$\begin{array}{ll} b_1 = y_2 - y_3 = 3,0 - 0 = 3,0 \text{ м}; & c_1 = x_3 - x_2 = 4,0 - 4,0 = 0; \\ b_2 = y_3 - y_1 = 0 - 0 = 0; & c_2 = x_1 - x_3 = 0 - 4,0 = -4,0 \text{ м}; \\ b_3 = y_1 - y_2 = 0 - 3,0 = -3,0 \text{ м}; & c_3 = x_2 - x_1 = 4,0 - 0 = 4,0 \text{ м}. \end{array}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(y_3 - y_1)(x_3 - x_1) = \frac{1}{2}(3,0 - 0)(4,0 - 0) = 6,0 \text{ м}^2.$$

Тогда элементы матрицы $\bar{B} = [\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3]$ для второго конечного элемента будут иметь следующий вид:

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_3 = \begin{bmatrix} b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Матрица физических коэффициентов так же, как и для первого конечного элемента, содержит модуль упругости и коэффициент Пуассона материала конструкции:

$$\bar{D} = E \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Для автоматизации вычислений матрицы второго конечного элемента представим ее в виде девяти подматриц как клеточную матрицу. Проиндексируем подматрицы следующим образом:

$$\bar{K}_2 = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} \end{bmatrix}.$$

Находим элементы подматриц \bar{K}_{ij} для второго конечного элемента, используя следующую индексацию и значения:

$$\bar{K}_{ij} = \bar{B}_j^T \bar{D} \bar{B}_i t \Delta = \frac{tE}{4\Delta(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix}.$$

Проходя все клетки матрицы жесткости второго конечного элемента \bar{K}_2 и учитывая значения параметров матриц \bar{B}_1 , \bar{B}_2 , \bar{B}_3 , получим значения ее элементов:

$$\bar{K}_2 = \gamma \begin{bmatrix} 9,00 & 0 & 0 & -3,00 & -9,0 & 3,00 \\ 0 & 3,375 & -4,50 & 0 & 4,50 & -3,375 \\ 0 & -4,50 & 6,00 & 0 & -6,00 & 4,50 \\ 3,00 & 0 & 0 & 16,00 & 3,00 & -16,00 \\ -9,00 & 4,50 & -6,00 & 3,00 & 15,00 & -7,50 \\ 3,00 & -3,375 & 4,50 & -16,00 & -7,50 & 19,375 \end{bmatrix}, \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

где γ имеет то же значение, что и для первого конечного элемента:

$$\gamma = \frac{tE}{4\Delta(1-\nu^2)} = \frac{0,1 \cdot 25 \cdot 10^3}{4 \cdot 6,0(1-0,25^2)} = 111,11 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}.$$

Модель рассчитываемой конструкции может содержать большое количество конечных элементов. Поэтому выше перечисленные действия должны выполняться для каждого конечного элемента. Таких элементов в модели может насчитываться до нескольких сотен или даже тысяч. Поэтому понятно, что эта численная работа должна выполняться не вручную, а автоматически в программе. Для реализации этих действий в любой программе предусмотрено три нумерации: местные номера узлов конечных элементов, глобальная нумерация узлов всей модели и нумерация конечных элементов. При этом в программу вкладывается алгоритм поиска местных номеров узлов и глобальных номеров всей системы по номеру конечного элемента.

То есть программа должна уметь находить местные глобальные номера узлов по номеру самого элемента. Затем следует составить вектор узловых сил, который обычно задается проекциями на координатные оси. Для рассматриваемого случая вектор узловых сил представлен в следующем виде:

$$\vec{F} = \gamma[0, 0, 0, 0, F, 0, 0, F]^T.$$

Для объединения матриц жесткости всех конечных элементов требуется расширить их до порядка, равного удвоенному количеству узлов всей конечно-элементной системы. В рассмотренном случае до порядка, равного восьми. Для наглядности процесса объединения представим его в виде схем.

Матрица жесткости первого конечного элемента, полученная программой *Fantom* и выведенная на экран, после перестановки строк имеет следующей вид:

$$\bar{K}_1^r = \gamma \begin{bmatrix} 6,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -4,50 & -6,00 & 4,50 \\ 0,00 & 16,00 & 0,00 & 0,00 & -3,00 & 0,00 & 3,00 & -16,00 \\ -6,00 & 3,00 & 0,00 & 0,00 & -9,00 & 4,50 & 15,00 & -7,50 \\ 4,50 & -16,00 & 0,00 & 0,00 & 3,00 & -3,38 & -7,50 & 19,38 \\ 0,00 & -3,00 & 0,00 & 0,00 & 9,00 & 0,00 & -9,00 & 3,00 \\ -4,50 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 3,38 & 4,50 & -3,38 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Матрица жесткости первого конечного элемента после перестановки его столбцов принимает следующий вид:

$$\bar{K}_1^c = \gamma \begin{bmatrix} 6,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -4,50 & -6,00 & 4,50 \\ 0,00 & 16,00 & 0,00 & 0,00 & -3,00 & 0,00 & 3,00 & -16,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -3,00 & 0,00 & 0,00 & 9,00 & 0,00 & -9,00 & 3,00 \\ -4,50 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 3,38 & 4,50 & -3,38 \\ -6,00 & 3,00 & 0,00 & 0,00 & -9,00 & 4,50 & 15,00 & -7,50 \\ 4,50 & -16,00 & 0,00 & 0,00 & 3,00 & -3,38 & -7,50 & 19,38 \end{bmatrix}, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Программой *Fantom* выполнена перестановка строк матрицы жесткости второго конечного элемента. В результате получена новая матрица:

$$\bar{K}_2^r = \lambda \begin{bmatrix} 9,00 & 0,00 & -9,00 & 3,00 & 0,00 & -3,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 3,38 & 4,50 & -3,38 & -4,50 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -4,50 & -6,00 & 4,50 & 6,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -3,00 & 0,00 & 3,00 & -16,00 & 0,00 & 16,00 & 0,00 & 0,00 \\ -9,00 & 4,50 & 15,00 & -7,50 & -6,00 & 3,00 & 0,00 & 0,00 \\ 3,00 & -3,38 & -7,50 & 19,38 & 4,50 & -16,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Матрица жесткости второго конечного элемента после перестановки столбцов приобретает следующий вид:

$$\bar{K}_2^c = \gamma \begin{bmatrix} 9,00 & 0,00 & -9,00 & 3,00 & 0,00 & -3,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 3,38 & 4,50 & -3,38 & -4,50 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -9,00 & 4,50 & 15,00 & -7,50 & -6,00 & 3,00 & 0,00 & 0,00 \\ 3,00 & -3,38 & -7,50 & 19,38 & 4,50 & -16,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -4,50 & -6,00 & 4,50 & 6,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -3,00 & 0,00 & 3,00 & -16,00 & 0,00 & 16,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}, \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Суммируя окончательно матрицы с переставленными столбцами и строками первого и второго конечных элементов, получим матрицу жесткости всей конечно-элементной модели конструкции:

$$\bar{K}_0 = \gamma \begin{bmatrix} 15,00 & 0,00 & -9,00 & 3,00 & 0,00 & -7,50 & -6,00 & 4,50 \\ 0,00 & 19,375 & 4,50 & -3,375 & -7,50 & 0,00 & 3,00 & -16,00 \\ -9,00 & 4,50 & 15,00 & -7,50 & -6,00 & 3,00 & 0,00 & 0,00 \\ 3,00 & -3,375 & -7,50 & 19,375 & 4,50 & -16,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -7,50 & -6,00 & 4,50 & 15,00 & 0,00 & -9,00 & 3,00 \\ -7,50 & 0,00 & 3,00 & -16,00 & 0,00 & 19,375 & 4,50 & -3,375 \\ -6,00 & 3,00 & 0,00 & 0,00 & -9,00 & 4,50 & 15,00 & -7,50 \\ 4,50 & -16,00 & 0,00 & 0,00 & 3,00 & -3,375 & -7,50 & 19,375 \end{bmatrix}, \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Таким образом, получена система уравнений, записанная в матричной форме:

$$\bar{K}_0 \cdot \vec{V} = \vec{F}.$$

Однако не все узлы системы могут свободно перемещаться, так как они закреплены на абсолютно жестких опорах. То есть их пере-

мещения $U_1 = 0$; $V_1 = 0$; $U_2 = 0$; $V_2 = 0$ равны нулю априори. Уравнения, соответствующие этим условиям, должны быть исключены из системы уравнений. То есть полученная система должна быть сжата. Также должен быть сжат вектор узловых сил:

$$\bar{K}_* \cdot \bar{V}_* = \bar{F}_*.$$

Тогда сжатая матрица жесткости, сжатый вектор узловых сил и вектор узловых перемещений принимают соответственно вид:

$$\bar{K}_* = \gamma \begin{bmatrix} 15,00 & 0 & -9,00 & 3,00 \\ 0 & 19,00 & 4,50 & -3,375 \\ -9,00 & 4,50 & 15,00 & -7,50 \\ 3,00 & -3,375 & -7,50 & 19,375 \end{bmatrix}, \frac{\text{Н}}{\text{м}}, \bar{F}_* = \begin{bmatrix} 1050 \\ 0 \\ 0 \\ -1050 \end{bmatrix}, \text{кН}.$$

Решая это матричное уравнение, получим уплотненный вектор узловых перемещений:

$$\bar{V}_* = \begin{bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00096 \\ -0,00018 \\ 0,00036 \\ -0,00053 \end{bmatrix}, \text{м}.$$

Разуплотняем вектор узловых перемещений, учитывая, что на опорах они равны нулю:

$$\bar{V} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,00095 \ -0,00018 \ 0,00036 \ -0,00053]^T, \text{м}.$$

На рис. 3.5 показаны перемещения узлов конечно-элементной модели и деформации ее элементов. Чтобы проверить найденные реакции на опорах, перемножим матрицу жесткости всей конечно-элементной системы на развернутый вектор узловых перемещений:

$$\gamma = \begin{bmatrix} 15,00 & 0 & -9,00 & 3,00 & 0 & -7,50 & -6,00 & 4,50 \\ 0 & 19,375 & 4,50 & -3,375 & -7,50 & 0 & 3,00 & -16,00 \\ -9,00 & 4,50 & 15,00 & -7,50 & -6,00 & 3,00 & 0 & 0 \\ 3,00 & -3,375 & -7,50 & 19,375 & 4,50 & -16,00 & 0 & 0 \\ 0 & -7,50 & -6,00 & 4,50 & 15,00 & 0 & -9,00 & 3,00 \\ -7,50 & 0 & 3,00 & -16,00 & 0 & 19,375 & 4,50 & -3,375 \\ -6,00 & 3,00 & 0 & 0 & -9,00 & 4,50 & 15,00 & -7,50 \\ 4,50 & -16,00 & 0 & 0 & 3,00 & -3,375 & -7,50 & 19,375 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,00095 \\ -0,00018 \\ 0,00036 \\ -0,00053 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -351,2 \\ 262,5 \\ -692,78 \\ 787,5 \\ 1050 \\ 0 \\ 0 \\ -1050 \end{bmatrix}$$

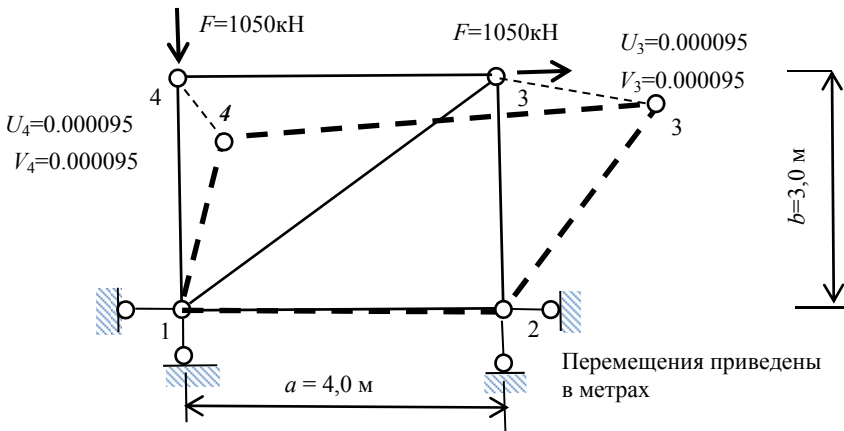


Рис. 3.5. Схема перемещения узлов конечно-элементной системы

Очевидно, что полученные реакции на опорах отличаются от нуля и равны

$$\begin{bmatrix} R_{x1} = -357,20 \\ R_{y1} = 262,50 \\ R_{x2} = -692,78 \\ R_{x1} = 787,50 \end{bmatrix}, \text{ кН.}$$

Остальные силы на узлах 3 и 4 равны заданным нагрузкам. Чтобы убедиться в корректности полученного решения, проверим соблюдение равновесия всей конечно-элементной системы.

$$\sum X = \sum R_x + \sum F_x = -357,2 - 692,78 + 1050 \approx 0,$$

$$\sum Y = \sum R_y + \sum F_y = 262,5 + 787,5 + 0 - 1050 \approx 0.$$

Очевидно, что оба уравнения полностью удовлетворяются.

Для инженерных расчетов важны не столько перемещения, сколько напряжения в конечных элементах. Зная напряжения, мы можем проверить выполнения условия прочности, используя какую-либо теорию прочности. Для вычисления напряжений из общего вектора узловых перемещений выделим векторы узловых перемещений каждого конечного элемента. Так как используются треугольные конечные элементы, то векторы перемещений будут состоять из шести элементов:

$$V_{k1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,00036 \\ -0,00053 \\ 0,00095 \\ -0,00018 \end{bmatrix}, \text{ м; } \quad V_{k2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,00095 \\ -0,00018 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ м.}$$

Составим матрицу, связывающую вектор перемещений и вектор напряжений в первом конечном элементе. При этом используются параметры для первого конечного элемента $b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3$:

$$\bar{T}_1 = \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_1 & \nu c_1 & b_2 & \nu c_2 & b_3 & \nu c_3 \\ \nu b_1 & c_1 & \nu b_2 & c_2 & \nu b_3 & c_3 \\ \frac{1-\nu}{2} c_1 & \frac{1-\nu}{2} b_1 & \frac{1-\nu}{2} c_2 & \frac{1-\nu}{2} b_2 & \frac{1-\nu}{2} c_3 & \frac{1-\nu}{2} b_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{15000}{2 \cdot 6(1-0,25^2)} \begin{bmatrix} 0 & 1,0 & 3,0 & -1,0 & -3,0 & 0 \\ 0 & 4,0 & 0,75 & -4,0 & -0,75 & 0 \\ -1,50 & 0 & -1,50 & 1,13 & 0 & -1,13 \end{bmatrix}, \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}.$$

Перемножим матрицу T_1 на вектор узловых перемещений первого конечного элемента и получим вектор напряжений в пределах первого конечного элемента:

$$\bar{\sigma}_{k1} = \bar{T}_1 \bar{V}_{k1} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,771 \\ 3,691 \\ -2,078 \end{bmatrix}, \text{ МПа.}$$

Составим матрицу связи вектора перемещений и вектора напряжений во втором конечном элементе. При этом уже используются параметры для второго конечного элемента $b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3$:

$$T_2 = \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b_1 & \nu c_1 & b_2 & \nu c_2 & b_3 & \nu c_3 \\ \nu b_1 & c_1 & \nu b_2 & c_2 & \nu b_3 & c_3 \\ \frac{1-\nu}{2} c_1 & \frac{1-\nu}{2} b_1 & \frac{1-\nu}{2} c_2 & \frac{1-\nu}{2} b_2 & \frac{1-\nu}{2} c_3 & \frac{1-\nu}{2} b_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{15000}{2 \cdot 6(1-0,25^2)} \begin{bmatrix} 3,00 & 0 & 0 & -1,0 & -3,0 & 1,00 \\ 0,75 & 0 & 0 & -4,0 & -0,75 & 4,00 \\ 0 & 1,13 & -1,50 & 0 & 1,50 & -1,13 \end{bmatrix}, \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}.$$

Перемножим матрицу T_2 на вектор узловых перемещений второго конечного элемента и получим вектор напряжений во втором конечном элементе:

$$\bar{\sigma}_{k2} = \bar{T}_2 \bar{V}_{k2} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,390 \\ 1,559 \\ -3,172 \end{bmatrix}, \text{ МПа.}$$

Отметим, что напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} в пределах каждого конечного элемента постоянны. То есть в каждой точке отдельного конечного элемента напряжения имеют одинаковые значения. При переходе от одного конечного элемента к рядом расположенному другому конечному элементу напряжения изменяются скачкообразно. В этом и проявляется приближенность метода конечных элементов. Эти погрешности уменьшаются при увеличении количества конечных элементов, содержащихся в численной модели. Согласно принятой линейной аппроксимации, в пределах каждого конечного элемента перемещения изменяются по линейному закону. В узлах, расположенных на границах конечных элементов, перемещения всех примыкающих конечных элементов равны между собой. Поэтому перемещения изменяются непрерывно по всему объему (площади) конструкции.

Для анализа напряженного состояния в каждом конечном элементе вычислим главные напряжения и положение главных площадок.

В первом конечном элементе:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{-2,771 + 3,691}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-2,771 - 3,691)^2 + 4 \cdot (-2,078)^2} = 0,460 \pm 3,842, \text{ МПа;} \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = 0,46 + 3,842 = 4,302 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_3 = 0,46 - 3,842 = -3,382 \text{ МПа.}$$

Недостающее главное напряжение $\sigma_2 = 0$.

Во втором конечном элементе:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} =$$
$$= \frac{0,390 + 1,559}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(3,390 - 1,559)^2 + 4 \cdot (-3,172)^2} = 0,974 \pm 3,225, \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 = 0,974 + 3,225 = 4,199 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = 0,974 - 3,225 = -2,251 \text{ МПа}.$$

Недостающее главное напряжение $\sigma_2 = 0$.

Найдем углы наклона главных площадок в первом конечном элементе:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctg \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| = \frac{1}{2} \arctg \left| \frac{2 \cdot (-2,078)}{-2,771 - 3,691} \right| = 16,37^\circ,$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 = 90^\circ - 16,37 = 73,63^\circ.$$

Найдем углы наклона главных площадок во втором конечном элементе:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctg \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| = \frac{1}{2} \arctg \left| \frac{2 \cdot (-3,172)}{0,390 - 1,559} \right| = 39,78^\circ,$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 = 90^\circ - 39,78 = 50,22^\circ.$$

Покажем главные напряжения и положения главных площадок в первом и втором конечных элементах (рис. 3.6, 3.7).

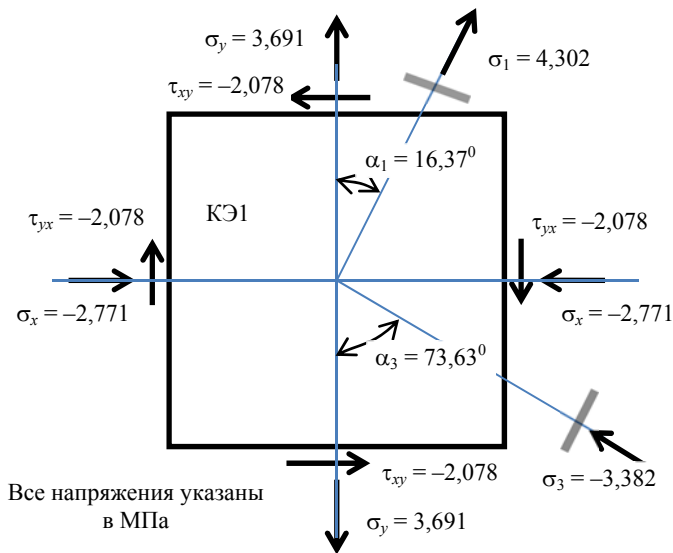


Рис. 3.6. Главные напряжения и положение главных площадок в первом конечном элементе конструкции

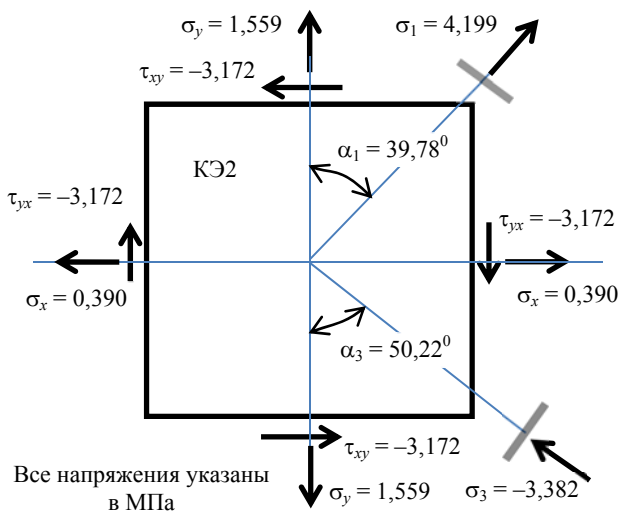


Рис. 3.7. Главные напряжения и положение главных площадок во втором конечном элементе конструкции

4. ИНСТРУКЦИЯ К ПРОГРАММЕ *FANTOM*

Компьютерная программа *Fantom* написана на алгоритмическом языке *Pascal* в среде *Delphi7* и предназначена для проверки самостоятельной работы студентов. Управление программой выполняется с помощью меню. В программе заложена база данных – схемы и числовые данные. Схемы пластины составлены из двух треугольных конечных элементов. В таблице приведены 10 вариантов исходных данных. Интерфейс программы приведен на рис. 4.1.

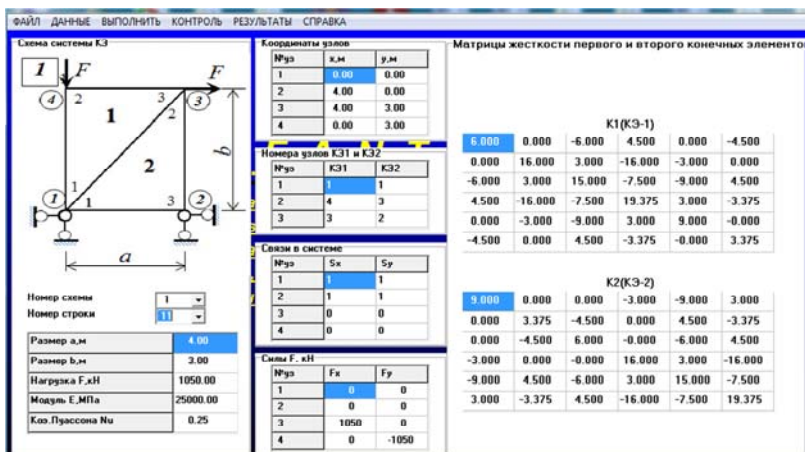


Рис. 4.1. Интерфейс программы *Fantom*

В программу включены следующие варианты меню.

4.1. Файл

Содержит один вариант действия – «**Закончить**». По этой команде программа завершает свою работу и передает управление исходной системе.

4.2. Данные

Содержит две команды: «**Ввести**» и «**Трансформировать**».

По команде «**Ввести**» на экран выводится список номеров схем и список вариантов числовых данных, а также размеры конструк-

ции, нагрузка, модуль упругости и коэффициент Пуассона. Следует выбрать номер схемы и числовой вариант. Размеры конструкции, нагрузка в виде сосредоточенных сил, модуль упругости и значение коэффициента Пуассона могут оперативно корректироваться.

По команде «**Трансформация**» программа преобразует исходные данные в размерности, соответствующие CU , и открывает команду меню «**Выполнить**», что дает возможность продолжить расчет.

4.3. Выполнить

Команда «**Выполнить**» содержит одну подкоманду «**Расчет**».

По команде «**Расчет**» программа выполняет расчет конечно-элементной модели в соответствии с технологией МКЭ, то есть вычисляет матрицы жесткости каждого конечного элемента, объединенную матрицу жесткости всей системы, вектор перемещений, вектор узловых сил, вектор напряжений и главные напряжения.

4.4. Контроль

Команда «**Контроль**» содержит только одну подкоманду «**Выполнить**».

По команде «**Выполнить**» программа проверяет все полученные результаты.

4.5. Результаты

Команда «**Результаты**» содержит 12 подкоманд.

По команде «**Координаты узлов**» программа выводит на экран координаты узлов первого и второго конечных элементов.

По команде «**Элементы матрицы B** » программа выводит на экран геометрические параметры матриц B и C .

Командой «**Матрица T** » на экран выводятся матрицы T для обоих конечных элементов.

Командой «**Матрица жесткости**» на экран дисплея выводятся матрицы жесткости первого и второго конечных элементов.

Командой «**Объединенная матрица жесткости**» программа выводит на экран объединенную матрицу жесткости всей системы конечных элементов.

Командой «**Уплотненная матрица жесткости**» на экран выводится матрица жесткости всей системы конечных элементов после вычеркивания строк и столбцов, соответствующих известным узловым перемещениям.

Программа выводит на экран *полный вектор перемещений* узлов конечно-элементной системы.

На экран выводится *реакция опор*.

По команде программа выводит на экран отдельно *перемещения узлов первого и второго конечных элементов*.

На экран выводятся напряжения в первом и во втором конечных элементах.

По команде «**Главные напряжения**» программа на экран выводит главные напряжения в первом и во втором конечных элементах.

На экран выводятся *угол наклона главных площадок* в первом и угол наклона главных площадок во втором конечном элементе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 540 с.
2. Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1961. – 540 с.
3. Винокуров, Е. Ф. Методические указания в теоретической части расчетно-проектировочных работ по разделу «Метод конечных элементов» / Е. Ф. Винокуров [и др.]. – Мн.: БПИ, 1980. – 42 с.
4. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, О. Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
5. Секулович, М. Метод конечных элементов / М. Секулович. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
6. Вербицкая, О. Л. Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине теории упругости и пластичности / О. Л. Вербицкая, Л. И. Шевчук, С. И. Зиневич. – Мн.: БНТУ, 2014. – 112 с.
7. Снеддон, И. Н. Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон, Д. С. Берри. – М.: Вузовская книга, 2008. – 216 с.
8. Писсанецки, С. Технология разреженных матриц / С. Писсанецки. – М.: Мир, 1988. – 410 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Исходные данные к расчетно-проектировочной работе «Расчет пластины при плоском напряженном состоянии»	4
1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ	6
1.1. Уравнения теории упругости	6
1.2. Основные уравнения метода конечных элементов	12
2. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	17
2.1. Основные уравнения плоского напряженного и плоского деформированного состояний в матричной форме	17
2.2. Матрица жесткости треугольного конечного элемента	20
2.2.1. Дискретизация пластинки	20
2.2.2. Аппроксимация перемещений внутри КЭ	22
2.2.3. Деформации и напряжения в конечных элементах	24
2.2.4. Уравнения равновесия и матрица жесткости	25
2.3. Объединение конечных элементов	28
2.3.1. Система уравнений равновесия МКЭ	28
2.3.2. Получение матриц жесткости всей конструкции	28
2.3.3. Граничные условия	29
2.3.4. Форма хранения матриц жесткости и решение системы разрешающих уравнений	31
3. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПЛАСТИНЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИИ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ	32
4. ИНСТРУКЦИЯ К ПРОГРАММЕ <i>FANTOM</i>	48
4.1. Файл	48
4.2. Данные	48
4.3. Выполнить	49
4.4. Контроль	49
4.5. Результаты	49
ЛИТЕРАТУРА	51

Учебное издание

ВЕРБИЦКАЯ Ольга Леонидовна
ШЕВЧУК Леонид Иванович

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ:
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ
ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН**

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»,
1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»

Редактор *А. С. Мокрушников*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 04.10.2021. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,08. Уч.-изд. л. 2,41. Тираж 100. Заказ 404.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.