МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

МАТЕМАТИКА. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ: ПРАКТИКУМ

Пособие

Минск
БНТУ
2021

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

МАТЕМАТИКА. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ: ПРАКТИКУМ

Пособие
для обучающихся по специальностям
1-69 01 01 «Архитектура»,
1-69 01 02 «Архитектурный дизайн»

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области строительства и архитектуры

Минск
БНТУ
2021

УДК 51(076.1)(076.5)
ББК 22.1я7
М34

Составители:
О. А. Мороз, *И. А. Голубева*

Рецензенты:
доцент кафедры общей математики и информатики БГУ,
канд. физ.-мат. наук *А. А. Самодуров*;
кафедра высшей математики УО «Военная академия Республики Беларусь» (зав. каф., д-р техн. наук, профессор *В. А. Липницкий*)

М34 **Математика**. Типовые задачи: практикум : пособие для обучающихся по специальностям 1-69 01 01 «Архитектура», 1-69 01 02 «Архитектурный дизайн» / сост.: О. А. Мороз, И. А. Голубева. – Минск : БНТУ, 2021. – 55.
ISBN 978-985-583-301-8.

Издание содержит теоретический и практический материал по программе курса математики для студентов архитектурного факультета. В данном пособии приводятся задачи для самоконтроля, решенные варианты, а также основные теоретические вопросы и указания.

УДК 51(076.1)(076.5)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-583-301-8

§ 1. Матрицы и операции над ними

1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\\ 4 & 4\end{pmatrix}$. Найти $2A-3B$.

1.2. Найти A^T и B^T, если $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$.

1.3. Решить матричное уравнение $-2X+3A=E,$ если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

1.4. Найти m и n:

а) $A_{3\times 5}\cdot B_{5\times 2}=C_{m\times n}$;

б) $A_{2\times 4}\cdot B_{m\times n}=C_{2\times 6}$;

в) $A_{4\times m}\cdot B_{n\times 1}=C_{4\times 1}$;

г) $A_{m\times 2}\cdot B_{2\times n}=C_{3\times 5}$.

1.5. Даны матрицы $A_{3\times 4}$, $B_{1\times 3}$, $C_{4\times 1}$. Существуют ли произведения: $A\cdot B$; $B\cdot A$; $A\cdot C$; $C\cdot A$: $A\cdot C\cdot B$; $C\cdot B\cdot A$?

1.6. Найти произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & -5\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 2 & 5 & 6\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

1.7. Найти A^3, если а) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1.8. Проверить равенство $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответы:

1.1. $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$;

1.2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

1.3. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & 2 & 9 \\ 6 & -3 & 11 \end{pmatrix}$;

1.4. а) $m=3, n=2$; б) $m=4, n=6$; в) $m=n\in N$; г) $m=3, n=5$;

1.5. $A\cdot B, C\cdot A-$нет;

1.6. а) $\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}$; б) (-11); в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & -10 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 8 & 12 & 23 \\ 14 & 21 & 46 \end{pmatrix}$;

1.7. а) $\begin{pmatrix} -53 & -102 \\ 153 & 253 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

1.8. не выполняется.

Замечания:

1. Складывать можно только матрицы одного размера.

2. Чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

3. При транспонировании матрицы каждая ее строка заменяется столбцом с тем же номером.

4. Можно умножать только согласованные матрицы, т. е. количество столбцов первой матрицы должно совпадать с количеством строк второй. При произведении матриц работает правило «строка на столбец».

5. В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример 1. Найти матрицу X из уравнения $3X + 2B = C^T$, если

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$3X + 2B = C^T \Rightarrow X = \frac{1}{3}\left(C^T - 2B\right);$$

$$2B = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$X = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -7 & 0 \\ -7 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -7/3 & 0 \\ 7/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведение матриц $A \cdot B \cdot C,$ если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.
Сначала умножим матрицу A на матрицу B:

$$A_{2\times2} \cdot B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \left| \begin{matrix} \text{правило} \\ \text{«строка на столбец»} \end{matrix} \right| =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+(-2)\cdot 2 & 1\cdot 0+(-2)\cdot 5 & 1\cdot 1+(-2)\cdot 3 \\ 3\cdot(-1)+4\cdot 2 & 3\cdot 0+4\cdot 5 & 3\cdot 1+4\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -10 & -5 \\ 5 & 20 & 15 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A_{2\times2} \cdot B_{2\times3} \cdot C_{3\times1} = 5\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 5\begin{pmatrix} -1\cdot(-1) & -2\cdot 4 & -1\cdot 2 \\ 1\cdot(-1) & 4\cdot 4 & 3\cdot 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -9 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/5 \\ 21/5 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Определители

2.1. Вычислить определители 2-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$;   б) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$.

2.2. Вычислить определители 3-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;   б) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;   в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2.3. Вычислить определители 4-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$;   б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

2.4. Построить график функции:

$$y = \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}, \quad b \neq a.$$

Ответы:
2.1. а) –13; б) 2;
2.2. а) –7; б) 0; в) –3;
2.3. а) 27; б) 75;
2.4. парабола.

Замечания:

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-\left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{12}a_{21}a_{33}\right) - \text{правило треугольника;}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13},$$

где $A_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} \cdot M_{ij}$, M_{ij} – определитель, полученный из исходного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

2. Определитель 4-го порядка сводится к определителю 3-го порядка с помощью элементарных преобразований и теоремы о разложении определителя по элементам ряда.

Пример. Вычислить определитель:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Способ 1. По правилу треугольника:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot \left(-3\right) \cdot \left(-4\right) + 3 \cdot 1 \cdot \left(-1\right) -$$

$$-\left(2 \cdot \left(-1\right) \cdot \left(-4\right) + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot \left(-3\right) \cdot 3\right) = 68.$$

Способ 2:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 - 3 \cdot \left(-8\right) - 4 \cdot \left(-10\right) = 68.$$

§ 3. Обратная матрица

3.1. Найти матрицы, обратные данной:

а) $\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2. Найти матрицу X из уравнений:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

3.3. Определить при каких α существует матрица, обратная данной:

а) $\begin{pmatrix} \alpha+1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 4 \\ 1 & 1+\alpha & 9 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответы:

3.1. а) $\frac{1}{29}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$;

г) не существует; д) $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -21 & 11 \\ 1 & -12 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; е) $\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -16 & -6 \end{pmatrix}$;

3.2. а) $\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -14 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 22 & -2 \\ -25 & 3 \end{pmatrix}$;

3.3. а) $\alpha \neq -1$; б) $\alpha -$ не существует.

Замечание:

Обратная матрица находится по формуле (на примере квадратной матрицы 3-го порядка):

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T .$$

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \Rightarrow \exists A^{-1}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -9 \\ 5 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

§ 4. Невырожденные системы линейных уравнений

4.1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$;

4.2. Решить систему матричным методом:

а) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$;

Ответы:

4.1. а) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

4.2. а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Замечание:

Формула Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где $\Delta = |A|$;

Δ_j получается из $|A|$ заменой j-го столбца столбцом из свободных членов.

Формула матричного метода:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}.$$

Решение.

1. Применим формулы Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -9; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & -5 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 9; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -6 \\ 3 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -9.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{-9} = 0; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{9}{-9} = -1; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-9}{-9} = 1.$$

$$X = (0, -1, 1).$$

2. Матричный метод. Для данной системы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{-9} = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 4 \\ -19 & 5 & 11 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{9} = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 4 \\ -19 & 5 & 11 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

§ 5. Произвольные системы линейных уравнений. Ранг матрицы.

5.1. Определить ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 12 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5.2. При каких α ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ равен: а) 1; б) 2; в) 3?

5.3. Исследовать каждую из систем и в случае совместности решить ее.

а) $\begin{cases} 7x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13; \\ x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0. \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

Ответы:

5.1. а) $r = 2$; б) $r = 3$; в) $r = 2$;

5.2. а) $\alpha_1 = -4$; б) $\alpha_2 \neq -4$; в) нет;

5.3. а) несовместна; б) $X^T = (3,\ 0,\ -2)$; в) $X^T = (1,\ 0,\ -2)$.

Замечания:

1. Ранг матрицы равен числу отличных от нуля строк после приведения расширенной матрицы системы к треугольной (трапециевидной) форме с помощью элементарных преобразований.

2. Суть метода Гаусса – приведение расширенной матрицы системы к треугольной (трапециевидной) форме.

3. Теорема Кронекера – Капелли. Для совместности системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

Пример 1. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & -10 & 20 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -10 & 20 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2.$$

Пример 2. Исследовать систему $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$ на совместность и найти ее решение.

Решение.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -17 & 34 \end{array}\right).$$

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 3 = n,$$

следовательно, система совместна и имеет единственное решение.

$$-17x_3 = 34;\ \ x_3 = -2;$$

$$3x_2 + 4x_3 = -5;\ \ x_2 = 1;.$$

$$x_1 + x_3 = -2;\ \ x_1 = 0;$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

§ 6. Векторы. Основные понятия

6.1. По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить их линейные комбинации:

а) $2\bar{a}+\bar{b}$; б) $\bar{a}-3\bar{b}$; в) $-3\bar{a}-\dfrac{1}{2}\bar{b}$.

6.2. Даны векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (рис. 6.1).

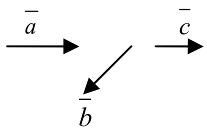

Рис. 6.1

Построить вектор $4\bar{a}-\dfrac{1}{2}\bar{b}-2\bar{c}$.

6.3. Начало вектора находится в точке $M(4;\,–3;\,5)$, конец – в точке $N\,(6;\,–2;\,3)$. Найти координаты вектора $\overline{MN}$ и его длину.

6.4. Заданы векторы $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$. Для вектора $\bar{c}=2\bar{a}+3\bar{b}$ найти $\text{Пр}_{\bar{l}}\bar{c}$, где $\left(\widehat{\bar{c},\bar{l}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

6.5. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти длину вектора $\bar{a}$.

а) $A(4;6;3)$, $B(-5;2;6)$, $C(4;-4;-3)$, $\bar{a}=4\overline{CB}-\overline{AC}$;

б) $A(4;3;-2)$, $B(-3;-1;4)$, $C(2;2;-1)$, $\bar{a}=-5\overline{AC}+2\overline{CB}$.

Ответы:

6.3. $\overline{MN}=(2,1,-2)$, $\left|\overline{MN}\right|=3$;

6.4. $\text{Пр}_{\bar{l}}\bar{c}=\sqrt{194}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

6.5. а) $\left|\bar{a}\right|=\sqrt{4216}$; б) $\left|\bar{a}\right|=\sqrt{82}$.

Замечания:

Вектором называется направленный отрезок в пространстве или упорядоченная пара точек. Вектор изображается отрезком прямой, на котором указано его направление, и обозначается $\overline{AB}$ или $\overline{a}$.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается 0.

Длина отрезка, изображающего вектор, называется длиной *(модулем) вектора* и обозначается так: $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{a}\right|$.

Векторы, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой, называются *коллинеарными*.

Векторы, расположенные в одной плоскости или параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Произведением вектора $\overline{a}$ на число $\lambda \in R$ называется вектор $a\lambda = \lambda a$, длина которого $|\lambda a|$ равна произведению $|\lambda|$ на $|a|$, т. е. $\left|\lambda\overline{a}\right| = |\lambda|\left|\overline{a}\right|$, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, или противоположно ему, если $\lambda < 0$.

Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, обозначаемый $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец – с концом вектора $\overline{b}$ при условии, что вектор $\overline{b}$ отложен из конца вектора $\overline{a}$ (рис. 6.2):

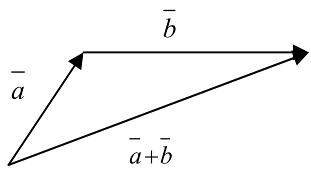

Рис. 6.2

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ отложены из одной точки, то сумма этих векторов есть диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 6.3):

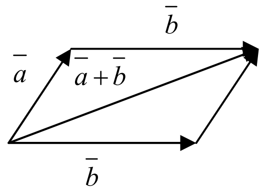

Рис. 6.3

Сумма конечного числа векторов находится по правилу замыкания цепочки этих векторов (рис. 6.4):

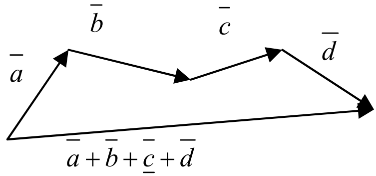

Рис. 6.4

Разностью $\overline{a} - \overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, который в сумме с $\overline{b}$ дает $\overline{a}$.

Чтобы получить разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, нужно отложить их из одной точки и соединить конец второго вектора с концом первого (рис. 6.5):

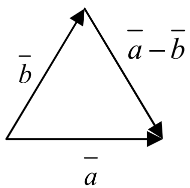

Рис. 6.5

Разность $\overline{a} - \overline{b}$ можно рассматривать и как сумму $\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$, где $\left(-\overline{b}\right)$ – вектор, противоположный вектору $\overline{b}$.

Проекцией вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ на ось l называется произведение длины $\left|\overline{AB}\right|$ на косинус угла между вектором $\overline{AB}$ и направлением l:

$$\text{Пр}_{\overline{l}}\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{l}\right) = \left|\overline{a}\right| \cos\varphi, \; 0 \le \varphi \le \pi.$$

Координатами вектора $\overline{a}$ называются его проекции на оси координат Ox, Oy, Oz. Они обозначаются соответственно буквами x, y, z. Записывают $\overline{a} = (x, y, z)$.

Если даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Длина вектора $\overline{a} = (x, y, z)$ вычисляется по формуле:

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пример 1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (см. рис. 6.6). Изобразить на рисунке вектор $3\overline{a} - 4\overline{b}$.

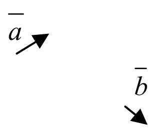

Рис. 6.6

Решение

Выбираем на плоскости произвольную точку O и откладываем от нее вектор $3\overline{a}$. Затем из конца вектора $3\overline{a}$ откладываем вниз $-4\overline{b}$. Соединяем точку O с концом вектора $-4\overline{b}$ – это и есть искомый вектор (рис. 6.7).

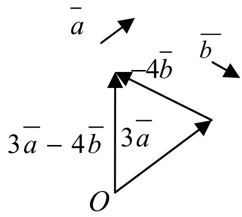

Рис. 6.7

Пример 2. Заданы векторы $\overline{a}=5\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}-\frac{1}{2}\overline{j}+3k$. Для вектора $\overline{c}=\overline{a}-2\overline{b}$ найти $\text{Пр}_{\overline{l}}\overline{c}$, где $\left(\overline{c}\,\hat{,}\,\overline{l}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Решение.

$$\overline{a}(5;-1;2) \quad \overline{b}\left(1;-\frac{1}{2};3\right); \quad -2\overline{b}=(-2;1;-6); \quad \overline{c}=a-2\overline{b}=(3;0;-4);$$

$$\left|\overline{c}\right|=\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=5;$$

$$\text{Пр}_{\overline{l}}\overline{c}=\left|\overline{c}\right|\cos\frac{\pi}{3}=5\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

§ 7. Скалярное произведение векторов

7.1. Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если

$$\left|\overline{a}\right| = 3; \quad \left|\overline{b}\right| = 4; \quad \varphi = \frac{\pi}{3},$$

где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

7.2. Вычислить скалярное произведение векторов, заданных своими координатами $\overline{a}(6;-2;1)$, $\overline{b}(1;8;-3)$.

7.3. Найти угол между векторами, заданными координатами

$$\overline{a}(4;-10;1);\ \overline{b}(11;-8;-7).$$

7.4. Даны вершины треугольника $A(1;7;2)$, $B(5;-3;3)$, $C(12;-1;-5)$. Найти внутренний угол $\alpha = \angle BAC$.

7.5. Даны векторы $\overline{a}(2;-3;1)$, $\overline{b}(-3;1;2)$, $\overline{c}(1;2;3)$. Найти $\text{Пр}_{\overline{b}+\overline{c}}\,\overline{a}$.

7.6. При каком значении α вектора $\overline{a} = \alpha\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - \alpha\overline{k}$ взаимно перпендикулярны?

7.7. Вычислить $\left|\overline{a} - \overline{b}\right|$, если $\left|\overline{a}\right| = 2\sqrt{2}$, $\left|\overline{b}\right| = 4$ и $\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right) = 135^\circ$.

Ответы:

7.1. 6;

7.2. –13;

7.3. $\frac{\pi}{4}$;

7.4. $\frac{\pi}{4}$;

7.5. $\frac{-8}{\sqrt{38}}$;

7.6. $\alpha = -6$;

7.7. $2\sqrt{10}$.

Замечания:

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (обозначают $\overline{a}\cdot\overline{b}$ или $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$) называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е.

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right).$$

Основные свойства:

1. $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\overline{b},\overline{a}\right)$.
2. $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=0\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$.
3. $\left(\overline{a},\overline{a}\right)=\left|\overline{a}\right|^2$.
4. $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left|\overline{a}\right|\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\text{Пр}_{\overline{b}}\overline{a}$.
5. $\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=\dfrac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}$.

Если вектор $\overline{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\overline{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$, то $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=x_1x_2+$ $+y_1y_2+z_1z_2$.

Пример 1. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi=120^\circ$. Зная, что $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=4$, вычислить $\left(3\overline{a}-2\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)$.

Решение.

$$\left(3\overline{a}-2\overline{b}\right)\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)=3\overline{a}\cdot\overline{a}-2\overline{b}\cdot\overline{a}+6\overline{a}\cdot\overline{b}-4\overline{b}\cdot\overline{b}=$$

$$=3\left|\overline{a}\right|^2+4\overline{a}\cdot\overline{b}-4\left|\overline{b}\right|^2=3\cdot3^2+4\overline{a}\cdot\overline{b}-4\cdot4^2=27-64+4\overline{a}\cdot\overline{b}=$$

$$=27-64+4\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos120^\circ=27-64+4\cdot3\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=27-64-24=-61.$$

Пример 2. Найти внутренний угол $\varphi = \angle ABC$ треугольника с вершинами $A(1;7;2)$, $B(5;-3;3)$, $C(12;-1;-5)$.

Решение.

Последовательно находим:

$$\overline{BC}(7;2;-8);\ \overline{BA}(-4;10;-1);$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{BA} = 7 \cdot (-4) + 2 \cdot 10 + (-8) \cdot (-1) = -28 + 20 + 8 = 0;$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{49 + 4 + 64} = \sqrt{117};$$

$$\left|\overline{BA}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 10^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 100 + 1} = \sqrt{117};$$

$$\cos\varphi = \frac{0}{\sqrt{117}\sqrt{117}} = 0 \Rightarrow \angle\varphi = \arccos 0 = 90^\circ.$$

§ 8. Векторное произведение векторов

8.1. Найти векторное произведение $\left[\overline{a},\overline{b}\right]$ в каждом из следующих случаев:

а) $\overline{a}=2\overline{i}+11\overline{j}-10\overline{k}$, $\overline{b}=3\overline{i}+6\overline{j}-2\overline{k}$;

б) $\overline{a}=(1;-5;8)$, $\overline{b}=(5;6;-2)$.

8.2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=(2;1;2)$ и $\overline{b}=(3;-4;2)$.

8.3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;1;3)$, $B(3;-1;6)$, $C(5;1;-3)$.

8.4. Даны векторы $\overline{a}=(3;-1;-2)$ и $\overline{b}=(1;2;-1)$. Найти координаты векторов $\overline{a}\times\overline{b}$ и $\left(2\overline{a}-\overline{b}\right)\times\left(2\overline{a}+\overline{b}\right)$.

8.5. Даны векторы $\overline{a}=3\overline{i}-\overline{j}-2\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$. Найти их произведение $\left[2\overline{a}-\overline{b},\ \overline{a}+2\overline{b}\right]$.

8.6. Вычислить синус угла, образованного векторами $\overline{a}=(1;0;-1)$ и $\overline{b}=(2;-1;2)$.

8.7. При каких значениях m и n векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, если $\overline{a}(2;m;4)$, $\overline{b}(n;2;8)$.

Ответы:

8.1. а) $\overline{a}\times\overline{b}=38\overline{i}-26\overline{j}-21\overline{k}$; б) $a\times b=(-38;42;31)$;

8.2. 15;

8.3. 14;

8.4. $(5;1;7)$; $(20;4;28)$;

8.5. $25\overline{i}+5\overline{j}-35\overline{k}$;

8.6. $\sin\varphi=1$; $\varphi=\arcsin 1=90°$;

8.7. $m=1$; $n=4$.

Замечания:

Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$ с длиной $|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)$, направленный перпендикулярно перемножаемым векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ так, что если смотреть из его конца, то кратчайший поворот от $\overline{a}$ и $\overline{b}$ происходит против часовой стрелки. Обозначают $\overline{c} = \left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ или $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$.

Основные свойства:

1. $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = -\left[\overline{b}, \overline{a}\right]$.
2. $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}$.
3. $\left[\overline{a}, \overline{a}\right] = 0$.

Геометрический смысл произведения векторов – его модуль $\left|\left[\overline{a}, \overline{b}\right]\right|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Если $\overline{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\overline{a} = \left(x_2, y_2, z_2\right)$, то $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} S_{\text{парал}} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{a}, \overline{b}\right]\right|.$$

Пример 1. Найти векторное произведение $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ в каждом из следующих случаев:

а) $\overline{a} = 7\overline{i} + 4\overline{j} + 6\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$;

б) $\overline{a} = (1; 2; -2)$, $\overline{b} = (8; 6; 4)$.

Решение.

а) $$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=\bar{i}\left(-8-12\right)-\bar{j}\left(-14-6\right)+\bar{k}\left(14-4\right)=-20\bar{i}+20\bar{j}+10\bar{k};$$

б) $$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 8 & 6 & 4 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\left(8+12\right)-\bar{j}\left(4+16\right)+\bar{k}\left(6+6\right)=20\bar{i}-20\bar{j}-10\bar{k}\,.$$

Пример 2. Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$, если даны вершины $A\left(7;-5;6\right)$, $B\left(9;-4;8\right)$, $C\left(6;0;6\right)$.

Решение.

Найдем последовательно $\overline{BA}\left(-2;-1;-2\right)$ и $\overline{BC}\left(-3;4;-2\right)$:

$$\overline{BA}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=i\left(2+8\right)-j\left(4-6\right)+k\left(-8-3\right)=10\bar{i}+2\bar{j}-11\bar{k};$$

$$S=\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|=\sqrt{10\ +2\ +\left(-11\right)}\ =15.$$

Пример 3. Даны векторы $\bar{a}=\left(3;-1;-2\right)$ и $\bar{b}=\left(1;2;-1\right)$. Найти координаты вектора $\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{b}$.

Решение.

Найдем $2\bar{a}=\left(6;-6;-4\right)$, $2\bar{a}+\bar{b}=\left(7;0;-5\right)$:

$$\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=i\left(0+10\right)-j\left(-7+5\right)+k\left(14-0\right)=10\bar{i}+2\bar{j}+14\bar{k}.$$

Итак, $\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{b}=(10;2;14)$.

Пример 4. Вычислить синус угла, образованного векторами $\overline{a}=(2;-2;1)$ и $\overline{b}=(2;3;6)$.

Решение.

$$\text{Т. к. } \left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)\Rightarrow\sin\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)\Rightarrow\frac{\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}.$$

Найдем:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=i(-12-3)-j(12-2)+k(6+4)=-15\overline{i}-10\overline{j}+10\overline{k};$$

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\sqrt{(-15)^2+(-10)^2+(10)^2}=\sqrt{425}=5\sqrt{17};$$

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=3;$$

$$\left|\overline{b}\right|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=\sqrt{4+9+36}=7;$$

$$\sin\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=\frac{5\sqrt{17}}{3\cdot 7}=\frac{5\sqrt{17}}{21}.$$

Пример 5. Дано: $\left|\overline{a}\right|=\left|\overline{b}\right|=5;$ $\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=\frac{\pi}{4}.$ Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}-2\overline{b}$ и $3\overline{a}+2\overline{b}$.

Решение.

$$\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)\times\left(3\overline{a}+2\overline{b}\right)=3\overline{a}\times\overline{a}-6\overline{b}\times\overline{a}+2\overline{a}\times\overline{b}-4\overline{b}\times\overline{b}=$$
$$=6\overline{a}\times\overline{b}+2\overline{a}\times\overline{b}=8\overline{a}\times\overline{b};$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 8\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = 4\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right) =$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot 5\sin\frac{\pi}{4} = 4 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}.$$

Пример 6. Определить при каких значениях m и n векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, если $\overline{a}(m;4;-3)$, $\overline{b}(3;-2;n)$.

Решение.

Векторы коллинеарны, если пропорциональны их координаты, тогда

$$\frac{m}{3} = \frac{4}{-2} = \frac{-3}{n} \Rightarrow k = -2;\ \frac{m}{3} = -2;\ m = -6;$$

$$-\frac{3}{n} = -2 \Rightarrow -3 = -2n \Rightarrow n = \frac{3}{2}.$$

§ 9. Смешанное произведение векторов

9.1. Вычислить смешанное произведение $\overline{abc}$:

а) $\overline{a}=(1;2;1)$, $\overline{b}=(1;2;-3)$, $\overline{c}=(8;6;4)$;

б) $\overline{a}=(1;2;3)$, $\overline{b}=(3;1;2)$, $\overline{c}=(2;3;1)$.

9.2. Выяснить компланарны ли векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$:

1) $\overline{a}=\overline{i}+7\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=8\overline{i}+\overline{j}+8\overline{k}$, $\overline{c}=\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$;

2) $\overline{a}=(1;1;-1)$, $\overline{b}=(3;-3;2)$, $\overline{c}=(3;-3;1)$.

9.3. Проверить лежат ли точки $A(-1;2;1)$, $B(-3;1;2)$, $C(3;-2;2)$ и $D(3;-4;3)$ в одной плоскости.

9.4. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(2;1;1)$, $B(6;-2;2)$, $C(4;3;2)$, $D(-6;8;7)$. Вычислить длину высоты, проведенную из вершины D.

9.5. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(0;0;0)$, $B(5;2;0)$, $C(2;5;0)$, $D(1;2;4)$. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенную из точки A на грань BCD.

Ответы:

9.1. а) –40; б) 18;

9.2. 1) да; 2) нет;

9.3. да;

9.4. $\frac{22}{3}$;

9.5. $V_{\text{пир}}=14;\quad H=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Замечания.

Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называют число $\left(\left|\overline{a},\overline{b}\right|,\overline{c}\right)$, которое обозначают $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения.

Модуль смешанного произведения $\left|\overline{abc}\right|$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, как на ребрах.

Если $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объем пирамиды, построенный на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$, находится:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\left(\overline{abc}\right).$$

Пример 1. Вычислить смешанное произведение $\overline{abc}$, если $\overline{a}(-4;-3;-9)$, $\overline{b}(1;0;-1)$, $\overline{c}(-5;-4;3)$.

Решение.

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} -4 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-9-36) + (16-15) = 45 + 1 = 46.$$

Пример 2. Выяснить компланарны ли векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$, если $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 4\overline{i} + 5\overline{j} + 6\overline{k}$, $\overline{c} = 7\overline{i} + 8\overline{j} + 9\overline{k}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (45-48) - 2(36-42) + 3(32-35) - 3 + 12 - 9 = 0.$$

Значит векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ – компланарны.

Пример 3. Доказать, что четыре точки $A(1;2;3)$, $B(3;7;1)$, $C(5;1;6)$, $D(9;11;2)$ лежат в одной плоскости.

Решение.

Четыре точки лежат в одной плоскости, если три вектора, их соединяющие, компланарны.

Возьмем векторы $\overline{AB}(2;5;-2)$, $\overline{AC}(4;-1;3)$, $\overline{AD}(8;9;-1)$ и найдем их смешанное произведение:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}2 & 5 & -2\\ 4 & -1 & 3\\ 8 & 9 & -1\end{vmatrix}=0.$$

Значит, данные точки лежат в одной плоскости.

Пример 4. Вычислить объем треугольной пирамиды $ABCD$, если $A(6;1;4)$, $B(2;-2;-5)$, $C(7;1;3)$, $D(1;-3;7)$.

Решение.

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}\right|;$$

$$\overline{AB}=(-4;-3;-9);\ \ \overline{AC}=(1;0;-1);\ \ \overline{AD}=(-5;-4;3);$$

$$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}=\begin{vmatrix}-4 & -3 & -9\\ 1 & 0 & -1\\ -5 & -4 & 3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-3 & -9\\ -4 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-4 & -3\\ -5 & -4\end{vmatrix}=$$

$$=-(-9-36)+16-15=+45+1=+46;$$

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\cdot 46=\frac{23}{3}\ \text{ед}^3.$$

Пример 5. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;3;8)$.

Вычислить ее объем и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Решение.

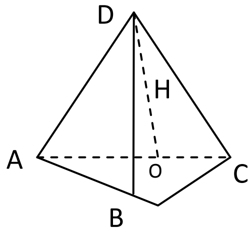

Рис. 9.1.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H.$$

Найдем $S_{\text{осн}} = S_{\Delta ABC}$:

$$\overline{AB} = (-2;3;0); \ \overline{AC} = (-2;0;6);$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 18\bar{i} + 12\bar{j} + 6\bar{k};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{18^2 + 12^2 + 6^2} = \frac{1}{2}\sqrt{504} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}; \ \overline{AD} = (0;3;8);$$

$$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -2(-18) - 3(-16) = 84;$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{84}{6} = \frac{42}{3} = 14; \quad H = \frac{3V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot 14}{3\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

§ 10. Прямая на плоскости

10.1. Даны две прямые: $y = 2x + 3$ и $y = -x + 4$. Построить эти прямые и проверить, проходят ли они через точки $A(-1;1)$, $B(4;0)$.

10.2. Найти точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$.

10.3. Определить угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси ординат прямой $5x + 2y - 8 = 0$.

10.4. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;1)$:

1) параллельно данной прямой;
2) перпендикулярно к данной прямой.

10.5. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(2;-3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

10.6. Найти проекцию точки $P(-6;4)$ на прямую $4x - 5y + 3 = 0$ и расстояние от точки P до этой прямой.

10.7. Точка $A(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь этого квадрата.

Ответы:
10.2. (3,–5);
10.3. $k = -2{,}5$ и $b = 4$;
10.4. $2x + 3y - 7 = 0$ и $3x - 4 = 0$;
10.5. $3x - 2y = 0$; $2x - 3y - 13 = 0$;
10.6. $P^*(-2,-1)$ и $d = \sqrt{41}$;
10.7. $S = 5$.

Замечания:
1. Виды уравнений прямой l на плоскости:
а) $y = kx + b$ (с угловым коэффициентом k);
б) $Ax + By + c = 0$ (общее уравнение l с нормальным вектором $\overline{n}(A;B)$);

в) $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0$ (общее уравнение l с $\overline{n}(A;B)$, проходящей через точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$);

г) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (уравнение прямой l через две точки $M_1\left(x_1;y_1\right)$ и $M_2\left(x_2;y_2\right)$).

2. Формула расстояния от точки $M_0\left(x_0;y_0\right)$ до прямой l:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Пример. Найти точку M_1, симметричную точке $M_2(8;9)$ относительно прямой, проходящей через две точки $A(3;–4)$ и $B(–1;–2)$.

Решение.

Составим уравнение прямой AB:

$$\frac{x-3}{-1-3}=\frac{y+4}{-2+4}\Rightarrow\frac{x-3}{-4}=\frac{y+4}{2},\ \overline{S}_{AB}=\left(-4;2\right)\equiv\overline{n}_{M_1M_2}.$$

Тогда уравнение прямой M_1M_2: $-4\left(x-8\right)+2\left(y+9\right)=0$ или $2x-$ $-y-25=0$.

Найдем точку пересечения прямых AB и M_1M_2:

$$\begin{cases}\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+4}{2}\\ 2x-y-25=0;\end{cases}\quad x=9,\ y=-7.$$

Используя формулу координат середины отрезка, получим координаты точки M_1:

$$\frac{x_1+8}{2}=9;\quad\frac{y_1-9}{2}=-7\Rightarrow M_1\left(10;-5\right).$$

§ 11. Кривые II-го порядка

11.1. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке:

1) (2;–3) и радиус $R = 5$;

2) (0;4) и проходящей через точку (5;–8).

11.2. Определить центр и радиус окружности, заданной уравнением: $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0.$ Построить данную окружность.

11.3. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если:

1) его полуоси равны 4 и 5;

2) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;

3) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;

4) его малая ось равна 10, эксцентриситет равен $\frac{12}{13}$.

11.4. Определить вид кривой, построить ее и найти все характеристики:

1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

2) $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0.$

11.5. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если:

1) расстояние между вершинами равно 8, расстояние между фокусами 10;

2) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен $\frac{3}{2}$;

3) уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами равно 20.

11.6. Определить вид кривой, построить ее и найти все характеристики:

1) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$;

2) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0.$

11.7. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если:

1) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси OX и ее параметр равен 3;

2) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси OX и ее параметр равен 0,5;

3) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси OY и ее параметр равен $\frac{1}{4}$;

4) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси OY и ее параметр равен 4.

11.8. Определить вид кривой, построить ее и найти все характеристики:

1) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$;

2) $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$.

Ответы:

11.1. 1) $x^2 + (y-4)^2 = 169$; 2) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$;

11.3. 1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;

3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 4) $\frac{x^2}{26^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$;

11.4. 1) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$; 2) $\frac{(x+2)^2}{28} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1$;

11.5. 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 3) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$;

11.6. 1) $\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$; 2) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$;

11.7. 1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -x$; 3) $x^2 = \frac{1}{2}y$; 4) $x^2 = -8y$;

11.8. 1) $(y-1)^2 = 10(x+2)$; 2) $(x-3)^2 = 4(y-5)$.

Замечание:

Канонические уравнения кривых 2-го порядка имеют вид:

а) $x^2 + y^2 = R^2$ – окружность;

б) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс, $c^2 = a^2 - b^2$, $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$;

в) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – гипербола, $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, $y = \pm\dfrac{b}{a}x$;

г) $y^2 = 2px$ – парабола, $F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$.

Пример. Определить вид кривой, построить ее и найти все характеристики: $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$.

Решение.

Приведем уравнение кривой к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0;$$

$$\left(5x^2 + 10x\right) - \left(6y^2 + 12y\right) - 31 = 0;$$

$$5\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) - 6\left(y^2 + 2y + 1 - 1\right) - 31 = 0;$$

$$5(x+1)^2 - 6(y+1)^2 = 30.$$

$\dfrac{(x+1)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2} - \dfrac{(y+1)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = 1$ – гипербола с центром $O(-1; -1)$ и полуосями $a = \sqrt{6}$ и $b = \sqrt{5}$.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{11} \Rightarrow F_{1,2}\left(-1 \pm \sqrt{11}; -1\right).$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{11}{6}}.$$

§ 12. Плоскость и прямая в пространстве

12.1. Задана плоскость $P:\ 3x-4y+z+1=0$ и точка $M\left(2;-3;0\right)$. Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку M параллельно плоскости P.

12.2. Составить уравнение плоскости P', проходящей через точки $M_1\left(1;2;-3\right)$ и $M_2\left(2;-1;1\right)$ перпендикулярно плоскости $P:\ 2x-y+2z+5=0$.

12.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M\left(2;5;-1\right)$ параллельно векторам $\overline{a}_1\left(2;4;1\right)$ и $\overline{a}_2\left(-1;0;1\right)$.

12.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1\left(3;-1;2\right)$, $M_2\left(4;-1;-1\right)$, $M_3\left(2;0;2\right)$.

12.5. Определить взаимное расположение плоскостей и найти либо расстояние между ними, либо косинус угла:

1) $4x+2y-4z+5=0,\ 2x+y-2z-1=0;$

2) $2x-5y+z=0,\ x+2z-3=0.$

Ответы:

12.1. $3x-4y+z-18=0;$

12.2. $-2x+6y+5z+5=0;$

12.3. $4x-3y+4z+11=0;$

12.4. $3x+3y+z-8=0;$

12.5. 1) $\frac{7}{6}$; 2) $\frac{4}{5\sqrt{6}}$.

Замечания:

1. Уравнение плоскости с нормальным вектором $\overline{n}\left(A,B,C\right)$:

$$Ax+By+Cz+D=0 \text{ или } A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0,$$

где $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)\in P$.

2. Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости P равно

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример. Даны две точки $M_1(2;4;-3)$ и $M_2(3;1;1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору M_1M_2.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (2;4;-3),\ \overline{M_1M_2} = (1;-3;4) \equiv \overline{n}_p = (A, B, C).$$

Тогда уравнение плоскости:

$$1 \cdot (x - 2) - 3(y - 4) + 4(z + 3) = 0 \text{ или } x - 3y + 4z + 22 = 0.$$

12.6. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;-2;5)$ параллельно:

1) вектору $\overline{q}(5;4;-3)$;

2) прямой $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+4}{1}$;

3) оси OX ;

4) прямой $\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$;

5) прямой $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

12.7. Написать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(3;0;4)$, $M_2(1;-1;2)$.

12.8. Задана прямая $l: \ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{0}$ и точка $M(2;0;1)$. Написать:

1) уравнение плоскости, проходящей через прямую l и точку M;

2) уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой l.

Ответы:

12.6. 1) $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-5}{-3}$; 2) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-5}{1}$;

3) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-5}{0}$; 4) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{1}$;

5) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{-1}$;

12.7. $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{2}$;

12.8. 1) $4x-2y-5z-3=0$; 2) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

Замечание:

Виды уравнений прямой l в пространстве:

1) $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ – каноническое, где $M_0(x_0,y_0,z_0)\in l$, $\overline{s}(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой;

2) $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt, \quad t\in R \end{cases}$ – параметрическое;

3) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей.

Пример. Доказать, что прямая $\begin{cases} 2x-3y+5z-6=0 \\ x+5y-7z+10=0 \end{cases}$ пересекает ось OY.

Решение. Приведем уравнение прямой к каноническому виду. Сначала найдем направляющий вектор данной прямой:

$$\overline{s}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}=-4\overline{i}+19\overline{j}+13\overline{k}=(-4;19;13).$$

Выберем какую-либо точку на прямой.

Положим $z=0$ и решим систему:

$$\begin{cases} 2x-3y=6 \\ x+5y=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}.$$

Таким образом, точка $M(0;-2;0)$. Тогда l:

$$\frac{x-0}{-4}=\frac{y+2}{19}=\frac{z-0}{13}.$$

Так как точка $M(0;-2;0) \in OY \Rightarrow$ прямая пересекает ось OY.

§ 13. Поверхности II-го порядка

13.1. Установить тип заданных поверхностей и построить их.

1) $y^2 - x^2 - z^2 + 4z = 0$;

2) $z^2 + 2y^2 - x^2 + 2z + 1 = 0$;

3) $x^2 - y^2 = 2 - 2y$;

4) $x^2 + z^2 = 6z$;

5) $x^2 + y^2 - z + 2 = 0$;

6) $y^2 - 2y - z = 0$.

Ответы:

13.1. 1) однополостный гиперболоид; 2) конус 2-го порядка;
3) гиперболический цилиндр; 4) круговой цилиндр;
5) эллиптический параболоид; 6) параболический цилиндр.

Замечание:

Канонические уравнения, определяющие тип поверхности:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ – сфера;

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – эллипсоид;

3) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - z^2 = 1 - \text{однополостный} \\ x^2 + y^2 - z^2 = -1 - \text{двуполостный} \end{array}\right\}$ гиперболоид;

4) $x^2 + y^2 = z^2$ – конус второго порядка;

5) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2pz - \text{эллиптический} \\ x^2 - y^2 = 2pz - \text{гиперболический} \end{array}\right\}$ параболоид;

6) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \text{эллиптический} \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \text{гиперболический} \\ y^2 = 2px - \text{параболический} \end{array}\right\}$ цилиндр 2-го порядка.

Пример. Определить тип поверхности:

$$5x^2+y^2+10x-6y-10z+14=0..$$

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду, выделяя полные квадраты:

$$5x^2+y^2+10x-6y-10z+14=0;$$

$$5x^2+10x+y^2-6y-10z+14=0;$$

$$5\left(x^2+2x+1-1\right)+\left(y^2-6y+9-9\right)-10z+14=0;$$

$$5(x+1)^2-5+(y-3)^2-9-10z+14=0;$$

$$5(x+1)^2+(y-3)^2=10z;$$

$$\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{(y-3)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=2z$$ – эллиптический параболоид.

§ 14. Числовая последовательность и ее предел

14.1. Записать первые четыре члена последовательности, общий член которой имеет вид:

1) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n^2}$;

2) $a_n = \dfrac{n!}{3n+5}$;

3) $a_n = \dfrac{2n}{3n-1}$.

14.2. Записать формулу общего члена последовательности:

1) $\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{5}; -\dfrac{1}{6}; \ldots;$

2) $2; \dfrac{4}{3}; \dfrac{6}{5}; \dfrac{8}{7}; \ldots;$

3) $\dfrac{5}{3}; \dfrac{7}{7}; \dfrac{9}{11}; \dfrac{11}{15}; \ldots;$

4) $0; 2; 0; 2; \ldots$

14.3. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{5n-4}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3n+1}{5-6n-3n^2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

5) $\lim \dfrac{n^3 + n + 2}{n-1}$;

6) $\lim \dfrac{2n+3}{n^2 + n - 8}$.

Ответы:

14.1. 1) $\left\{0; \dfrac{1}{2}; 0; \dfrac{1}{8}\right\}$; 2) $\left\{\dfrac{1}{8}; \dfrac{2}{11}; \dfrac{6}{14}; \dfrac{24}{17}\right\}$; 3) $\left\{1; \dfrac{4}{5}; \dfrac{6}{8}; \dfrac{8}{11}\right\}$;

14.2. 1) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+2}$; 2) $\dfrac{2n}{2n+1}$; 3) $\dfrac{2n+3}{4n-1}$; 4) $(-1)^n + 1$;

14.3. 1) $\dfrac{3}{5}$; 2) $\dfrac{-2}{3}$; 3) 0; 4) $\dfrac{1}{2}$; 5) ∞; 6) 0.

Замечание:

Число a называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}, n \in N$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Сама последовательность при этом называется сходящейся.

Пример. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-n}{2n+1}-\frac{3n^2+2}{4n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(3-n)\left(4n^2+1\right)-(2n+1)\left(3n^2+2\right)}{(2n+1)\left(4n^2+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3+9n^2-5n+1}{8n^3+4n^2+2n+1}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(-10+\frac{9}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(9+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}=-\frac{10}{8}=-\frac{5}{4}.$$

§ 15. Предел функции

15.1. Вычислить предел функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-4}{3x^2-5x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x-2}{2x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{x^4+x^2+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$;

5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+6x-16}{3x^2-5x-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

8) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x+5}-3}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x}{\mathrm{tg}\,2x}$;

11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{1-\cos6x}$;

12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos6x-1}{x\sin2x}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+5}\right)^{2x}$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{4x}$;

15) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{2+x}{x}}$.

Ответы:

15.1. 1) 2; 2) ∞; 3) 0; 4) $\dfrac{7}{6}$; 5) $\dfrac{10}{7}$; 6) $\dfrac{-1}{16}$; 7) $\dfrac{5}{3}$; 8) 3; 9) 5; 10) 3; 11) $\dfrac{4}{9}$; 12) –9; 13) e^{-16}; 14) e^{-2}; 15) e^{-6}.

Замечания:

1. Число a называют пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0 и пишут $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из условия $0<|x-x_0|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$.

2. Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Пример. Вычислить пределы функций:

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x-2}{x^2+2x+12}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(6-\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}=6;$$

б) $$\lim_{x\to6}\frac{x^2-9x+18}{3x^2-17x-6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to6}\frac{(x-6)(x-3)}{3(x-6)\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to6}\frac{x-3}{3x+1}=\frac{3}{19};$$

в) $$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{5+x}-2\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}{\left(\sqrt{5+x}+2\right)\left(\sqrt{8-x}-3\right)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(5+x-4)\cdot6}{4\cdot(8-x-9)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\cdot6}{-(x+1)\cdot4}=-\frac{3}{2};$$

г) $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}2x-\sin2x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x\left(\frac{1}{\cos2x}-1\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x(1-\cos2x)}{\cos2x\cdot x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot2\sin^2x}{1\cdot x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4x^3}{x^2}=0;$$

д) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x-3}-2\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{3x}=$$

$$=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\left(\frac{2x-3}{4}\right)\left(\frac{4}{2x-4}\right)3x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{12x}{2x-4}}=e^6.$$

§ 16. Производная функции

16.1. Найти производные функций:

1) $y=5x^6+3x^3-4x-1$; 5) $y=\dfrac{x^3}{\left(1+x\right)^2}$; 9) $y=e^{\operatorname{ctg}x}\ln\left(1-x^2\right)$;

2) $y=\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}+e$; 6) $y=\sin^2 7x$; 10) $y=2^{\cos x}\operatorname{arctg}2x$;

3) $y=e^x\arcsin x$; 7) $y=\arcsin^2 3x$; 11) $y=\cos\sqrt{x}\dfrac{1}{x}$.

4) $y=\operatorname{tg}x\ln x$; 8) $y=e^{-x}\sqrt{4x-x^2}$;

Ответы:

16.1. 1) $y'=30x^5-9x^2-4$; 2) $\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}-\dfrac{6}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}$;

3) $e^x\left(\arcsin x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; 4) $\dfrac{\ln x}{\cos^2 x}+\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$; 5) $\dfrac{x^3+3x^2}{\left(1+x\right)^3}$;

6) $7\sin 14x$; 7) $\dfrac{6\arcsin 3x}{\sqrt{1=9x^2}}$; 8) $\dfrac{e\left(x^2-5x+2\right)}{\sqrt{4x-x^2}}$;

9) $-e^{\operatorname{ctg}x}\left(\dfrac{\ln\left(1-x^2\right)}{\sin^2 x}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$;

10) $2^{\cos x}\left(-\ln 2\sin x\operatorname{arctg}2x+\dfrac{2}{1+4x^2}\right)$; 11) $\dfrac{-\sin\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{\cos\sqrt{x}}{x^2}$.

Замечания:

1. Производной функции $y=f\left(x\right)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

2. Правила дифференцирования:

$$(f \pm g)' = f' \pm g';$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g \pm f \cdot g';$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2};;$$

$$f\left(g\left(x\right)\right) = f' \cdot g', \text{ где } f = f\left(x\right) \text{ и } g = g\left(x\right).$$

3. Таблица производных:

$c' = 0;$

$\left(a^x\right)' = a \cdot x^{a-1};$

$\left(a^x\right)' = a^x \ln a;$

$\left(e^x\right)' = e^x;$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a};$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2};$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}.$

Пример. Найти производные функций:

а) $y = \dfrac{2}{x} + \sqrt{x^5} - 7x^4 + 2$:

$$y' = \left(2x^{-1} + x^{\frac{5}{2}} - 7x^4 + 2\right)' = -2x^{-2} + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - 28x^3;$$

б) $y = \sin x \cos x$:

$$y' = \left(\sin x \cos x\right)' = \left(\sin x\right)' \cos x + \sin x\left(\cos x\right)' =$$
$$= \cos x \cos x + \sin x\left(-\sin x\right) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x;$$

в) $y = \dfrac{2x^2}{2x-1}$:

$$y' = \left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)' = \frac{\left(2x^2\right)'\left(2x-1\right) - 2x^2\left(2x-1\right)'}{\left(2x-1\right)^2} =$$
$$= \frac{4x\left(2x-1\right) - 2x^2 \cdot 2}{\left(2x-1\right)^2} = \frac{8x^2 - 4x - 4x^2}{\left(2x-1\right)^2} = \frac{4x^2 - 4x}{\left(2x-1\right)^2};$$

г) $y = \mathrm{tg}^3 2x$:

$$y' = \left(\left(\mathrm{tg}\, 2x\right)^3\right)' = 3\mathrm{tg}^2 2x \frac{1}{\cos^2 2x} 2 = \frac{6\mathrm{tg}^2 2x}{\cos^2 2x};$$

д) $y = \ln^2\left(1 + e^{-x}\right)$:

$$y' = \left(\left(\ln\left(1 + e^{-x}\right)\right)^2\right)' = 2\ln\left(1 + e^{-x}\right)\frac{1}{1 + e^{-x}}\left(-e^{-x}\right).$$

§ 17. Приложения производной

17.1. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, если:

1) $y = x^2 - 7x + 3, \quad x_0 = 1;$

2) $y = \sqrt{x-4}, \quad x_0 = 8.$

17.2. Найти точку на кривой $y = -x^2 + 7x + 16,$ касательная в которой параллельна прямой $y = 3x + 4.$

17.3. Для указанных функций найти интервалы возрастания и убывания, точки экстремума:

1) $y = \dfrac{2x}{(x-3)^2};$ 3) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}};$

2) $y = \dfrac{2x^2}{2x-1};$ 4) $y = (x-1)e^{3x+1}.$

17.4. Чтобы оградить клумбу, имеющую форму кругового сектора, имеется кусок проволоки длиной 20 м. Какой следует взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

17.5. Доказать, что конический шатер данной вместимости требует наименьшего количества материи, когда его высота в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса основания.

17.6. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

17.7. Картина в 1,4 м высотой повешена на стену так, что ее нижний край на 1,8 м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен стоять наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (т. е., чтобы угол зрения был наибольшим)?

Ответы:

17.1. 1) $y + 3 = -5(x-1);$ 2) $y + 3 = \dfrac{1}{5}(x-1);$

3) $y - 2 = \dfrac{1}{4}(x-8);$ 4) $y - 2 = -4(x-8);$

17.2. (2,26);

17.3. 1) $x_{\max}=-3$; 2) $x_{\max}=0$; 3) $x_{\max}=e^2$; 4) $x_{\min}=\dfrac{2}{3}$;

17.4. $R=10$;

17.6. $H=2R$;

17.7. $d=2{,}4$ м.

Замечания:

1. Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

2. Уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

3. Если непрерывная на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемая внутри него функция имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) на этом отрезке.

4. Если функция $y=f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ экстремум, то либо $f'(x)=0$, либо $f'(x)$ не существует.

5. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x=x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если $f'(x)$ при $x<x_0$ положительна, а при $x>x_0$ отрицательна, то при $x=x_0$ функция имеет максимум.

Пример. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом (рис. 17.1). Задан периметр p этой фигуры. При каких размерах x и y окно будет пропускать наибольшее количество света?

Решение.

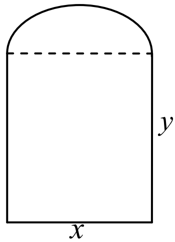

Рис. 17.1.

$$p = x + 2y + \pi\frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(p - x - \frac{\pi x}{2}\right);$$

$$S_{\text{ф.}} = xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2;$$

$$S_{\text{ф.}} = x\frac{1}{2}\left(p - x - \frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{8}\pi x^2 = \frac{1}{2}px - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}\pi x^2;$$

$$S'_{\text{ф.}} = \frac{1}{2}p = x - \frac{1}{4}\pi x;$$

$$S'_{\text{ф.}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}p - x - \frac{1}{4}\pi x = 0 \Rightarrow x = \frac{2p}{4+\pi}.$$

Тогда

$$y = \frac{1}{2}\left(p - \frac{2p}{4+\pi} - \frac{\pi \cdot 2p}{2(4+\pi)}\right) = \frac{1}{2}\left(p - \frac{2p}{4+\pi} - \frac{\pi p}{4+\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(p - \frac{2p + \pi p}{4+\pi}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – М. : Наука, 1980. – 240 с.

2. Красс, М. С. Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. – 464 с.

3. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 576 с.

4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М. : Рольф, 2002. – Ч. 1. – 288 с.

5. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие / А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 2016. – Ч. 1. – 304 с.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Матрицы и операции над ними 3
§ 2. Определители 7
§ 3. Обратная матрица 9
§ 4. Невырожденные системы линейных уравнений 11
§ 5. Произвольные системы линейных уравнений.
Ранг матрицы. 13
§ 6. Векторы. Основные понятия 16
§ 7. Скалярное произведение векторов 21
§ 8. Векторное произведение векторов 24
§ 9. Смешанное произведение векторов 29
§ 10. Прямая на плоскости 33
§ 11. Кривые II-го порядка 35
§ 12. Плоскость и прямая в пространстве 38
§ 13. Поверхности II-го порядка 42
§ 14. Числовая последовательность и ее предел 44
§ 15. Предел функции 46
§ 16. Производная функции 48
§ 17. Приложения производной 51
Список литературы 54

Учебное издание

МАТЕМАТИКА. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ: ПРАКТИКУМ

Пособие
для обучающихся по специальностям
1-69 01 01 «Архитектура»,
1-69 01 02 «Архитектурный дизайн»

Составители:
МОРОЗ Ольга Александровна
ГОЛУБЕВА Ирина Анатольевна

Редактор *Е. И. Беницевич*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 20.09.2021. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,26. Уч.-изд. л. 2,55. Тираж 100. Заказ 811.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.