

УДК 53: 681.3.06 (075.8)

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК ТЕХНОЛОГИЯ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

В.В. Сидорик, И.З. Джилавдари

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь

*Рассматриваются вопросы технологии компьютерного моделирования при обучении студентов технических вузов. На примере задачи движения тел и летательных аппаратов в атмосфере планет представлены физическая и математическая модели, дан алгоритм достижения учебных целей.*

В современном информационном обществе компьютерное моделирование, как правило, является составной частью любого научного исследования. В этой связи актуальным является внедрение идей компьютерного моделирования в учебный процесс как технологии для подготовки будущих специалистов.

Рассмотрим элементы этой технологии на примере физической задачи движения тел и летательных аппаратов в атмосфере планет [1]. Сложность физической и математической моделей не позволяют включить такую и другие задачи в учебный процесс с использованием классических (не компьютерных) подходов. В тоже время, углубленный анализ физических моделей и процессов, связанных с анализом сложных нелинейных уравнений движения, позволяют отойти от абстрактных задач и приблизить учебный процесс к реалиям. Такой подход не только приближает курс физики к специальным курсам, но и усиливает мотивацию изучения дисциплины.

**Постановка задачи исследования.** Тело массой  $m$ , площадью поперечного сечения  $S$ , коэффициентом лобового сопротивления  $C_D$  и аэродинамическим качеством  $K$  начинает движение в атмосфере планеты с высоты  $h_0$  с начальной скоростью  $\vec{v}_0$  под углом  $\theta$  к местной горизонтали. Требуется провести исследование по изучению вида траектории, характера движения, определению

кинематических характеристик движения в зависимости от: модели гравитационного поля; начальных условий движения; характера зависимости силы сопротивления и подъемной силы от скорости движения; динамических параметров и формы тела.

**Учебные цели.** Исследовать траекторию движения тела в *однородном* и *центральной* неоднородном гравитационном поле планеты при наличии атмосферы. Исследовать влияние атмосферы на *перегрузки* летательных аппаратов. Исследовать условия безопасной посадки космических аппаратов. Исследовать влияние параметров летательных аппаратов (массы, баллистического параметра, аэродинамического качества) на характеристики движения. Исследовать влияние на движение вида зависимости силы лобового сопротивления и подъемной силы от скорости.

**Физическая модель. Гравитационное поле Земли.** Будем рассматривать в пространстве планету Земля как неподвижное твердое тело сферической формы и постоянной плотности. Гравитационное поле Земли является центрально-симметричным.

**Модель однородного гравитационного поля (случай малых скоростей и высот).** В случае, когда начальная скорость тела  $v_0$  меньше 200 м/с и начальная высота запуска  $h_0$  меньше 10 000 м, в данной работе предполагается, что тело движется в однородном гравитационном поле, с  $g = g_0 \approx 9,8 \text{ м/с}^2$ .

**Модель центрально-симметричного гравитационного поля (случай космических скоростей и высот).** В случае, когда начальная скорость тела  $V_0 > 200 \text{ м/с}$  и начальная высота запуска  $h_0 > 10^5 \text{ м}$ , в данной работе предполагается, что тело движется в неоднородном центрально-симметричном гравитационном поле.

**Варьируемые параметры:**  $m$  — масса тела;  $K$  — аэродинамическое качество;  $S$  — площадь поперечного сечения;  $n$  — показатель зависимости силы сопротивления от скорости;  $v_0$  — начальная скорость тела,  $h_0$  — начальная высота над поверхностью планеты,  $\theta$  — угол вхождения в атмосферу.

**Атмосфера Земли.** Модель атмосферы — это модель газа, температура которого не зависит от высоты и плотности, а

плотность уменьшается с увеличением высоты по закону Больцмана

$$\rho = \rho_0 e^{-\hat{\gamma}h}$$

**Спускаемый аппарат.** Спускаемый аппарат будем рассматривать как твердое тело, параметры которого не изменяются в процессе движения. В качестве определяющих параметров будем рассматривать форму тела и его массу, поскольку эти параметры определяют силу лобового сопротивления и подъемную силу, действующие на тело со стороны атмосферы, а также силу гравитационного притяжения, действующую на тело со стороны Земли. Спускаемый аппарат стабилизирован в пространстве так, что его аэродинамическое качество, т. е. отношение подъемной силы к силе лобового сопротивления, не меняется в процессе движения. Траектория движения аппарата (тела) предполагается плоской.

**Коридор входа.** Вид траектории спуска летательного аппарата в атмосфере определяется, в основном, его аэродинамическими характеристиками. Возвращение из космического пространства, когда скорость превышает первую космическую, отличается от спуска с орбиты искусственного спутника. Проблему представляет точность управления, требующая осуществить спуск по траектории без отражений от атмосферы, избежать при этом чрезмерно больших перегрузок ( $a/g > 10$ ). Для этого вводят понятие *коридор входа* (рис.1), т. е. диапазон углов вхождения в атмосферу, при котором достигаются заданная точность приземления и условия безопасной посадки.

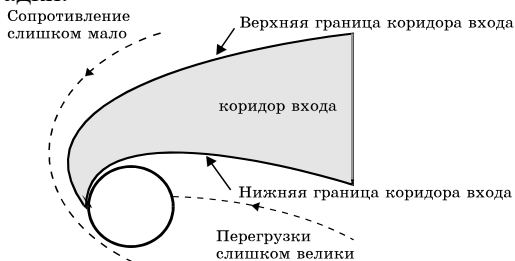


Рис.1. Коридор входа летательного аппарата в атмосферу  
Математическая модель.

**Центрально-симметричное поле.** При движении тела в центрально-симметричном гравитационном поле Земли вывод дифференциальных уравнений движения удобно проводить в полярной системе координат. Расчетная схема представлена на рис. 2, где  $\vec{v}$  — скорость тела,  $\vec{D}$  — сила лобового сопротивления,  $\vec{L}$  — подъемная сила,  $m\vec{g}$  — сила гравитационного притяжения,  $\theta$  — угол вхождения в атмосферу,  $R$  — радиус Земли.

**Сила лобового сопротивления.** Силу лобового сопротивления  $D$  обычно записывают в виде  $D = \frac{1}{2} C_D S_D \rho v^2$ , где  $C_D$  — коэффициент лобового сопротивления (безразмерная величина), величина которого обычно меняется в пределах от 0,03 (хорошо обтекаемые тела) до 2 (плохо обтекаемые тела),  $S_D$  — площадь поперечного сечения тела (проведенного перпендикулярно вектору скорости тела),  $\rho$  — плотность воздуха.

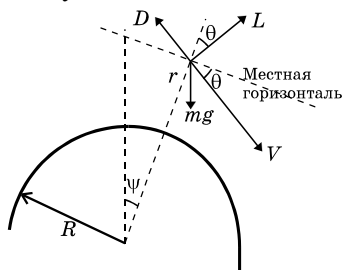


Рис. 2. Расчетная схема в полярной системе координат

**Подъемная сила.** Подъемную силу  $L$  обычно считают пропорциональной силе лобового сопротивления  $L = KD$ . Коэффициент  $K$  называют *аэродинамическим качеством*.

**Уравнение движения.** Уравнение движения тела имеет вид

$$h' = (R+h)(\psi')^2 - g + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\beta} e^{-\gamma \frac{h}{R}} [-h' + K(R+h)\psi'] V,$$

$$\psi'' = -\frac{1}{R+h} \left\{ 2h' \psi' + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\beta} e^{-\gamma \frac{h}{R}} [Kh' + (R+h)\psi'] V \right\}.$$

**Закон зависимости силы сопротивления и подъемной силы от скорости.** Зависимость может быть квадратичной или в общем виде  $v^n$ .

**Уравнение движения в однородном поле.** Уравнение движения имеет вид системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$x' = -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\beta} v^{n-1} (x' + ky) e^{-\gamma y},$$

$$y' = -g - \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\beta} v^{n-1} (y' - kx') e^{-\gamma y}.$$

Для данной задачи имеется практическая реализация.

### *Литература*

1. Сидорик В.В., Джилавдари И.З. Физика в компьютерных моделях: Учебно-метод/ пособие. – Минск : ПИОН, 1998, с. 250

УДК 378.147

## **ПРИМЕНЕНИЕ ОБЛАЧНЫХ СЕРВИСОВ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ**

Сидорик В.В.

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь

*Рассматривается проблема разработки электронных учебно-методических комплексов и особенности технологии ее реализации на платформе облачных технологий.*

В настоящее время актуальным и востребованным является разработка электронных учебно-методических комплексов (ЭУМК) на различных платформах и с использованием различных технологий. Следует отметить, что подготовка ЭУМК, безусловно, требует определенных временных затрат и наличия квалификационных компетенций разработчиков. Исследованию этих вопросов посвящен целый ряд работ [1-3]. Многие