

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра ЮНЕСКО  
«Энергосбережение и возобновляемые источники энергии»

В. Г. Баштовой  
А. Г. Рекс

# ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Учебно-методическое пособие  
для студентов специальности  
1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии  
и энергетический менеджмент»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области энергетики и энергетического оборудования*

Минск  
БНТУ  
2021

УДК 532 (076.5)(075.8)

ББК 22.253.3я7

Б33

Р е ц е н з е н т ы:

канд. физ.-мат. наук, доцент *Ю. В. Жукова*;  
кафедра «Энергосбережение, гидравлика и теплотехника» УО БГТУ,  
зав. кафедрой, канд. техн. наук, доцент *А. С. Дмитриченко*

**Баштовой, В. Г.**

Б33      Одномерные течения жидкостей и газов : учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент» / В. Г. Баштовой, А. Г. Рекс. – Минск : БНТУ, 2021. – 75 с.  
ISBN 978-985-583-694-1.

Методическое пособие предназначено для изучения одномерных течений жидкостей и газов. Материалы включают в себя основные законы сохранения, одномерные течения несжимаемых жидкостей и сжимаемого газа, законы внешнего обтекания тел потоком жидкости и газа.

Методическое пособие составлено в соответствии с учебным планом специальности и программой дисциплины и может быть рекомендовано для студентов энергетических специальностей.

УДК 532 (076.5)(075.8)

ББК 22.253.3я7

ISBN 978-985-583-694-1

© Баштовой В. Г., Рекс А. Г., 2021

© Белорусский национальный  
технический университет, 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ.....	5
1.1. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности.....	6
1.2. Закон сохранения энергии. Уравнение Бернулли .....	7
1.3. Закон сохранения импульса. Уравнение движения.....	10
2. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ.....	12
2.1. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости.....	12
2.2. Уравнение Бернулли для идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости.....	12
2.3. Уравнение Бернулли для вязкой несжимаемой жидкости. Потери энергии, давления и напора .....	14
2.4. Качественные следствия из уравнений неразрывности и Бернулли.....	15
2.5. Кавитация .....	16
2.6. Эжекция .....	18
2.7. Течение несжимаемой жидкости через конфузоры и диффузоры.....	18
2.8. Истечение несжимаемой жидкости через отверстие в баке. Формула Торичелли .....	20
2.9. Внезапное расширение и сужение потока. Формула Борда .....	22
2.10. Дроссельный расходомер.....	25
2.11. Основные задачи и методы гидравлического расчета трубопроводных систем .....	25
2.11.1. Потери давления в трубопроводе .....	26
3. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА .....	33
3.1. Распространение малых возмущений в жидкостях и газах. Звук.....	33
3.1.1. Связь между амплитудами параметров среды в звуковой волне .....	35
3.1.2. Гидравлический удар.....	36
3.2. Основные уравнения одномерных течений сжимаемого газа.....	36

3.2.1. Адиабатически заторможенный газ .....	39
3.2.2. Критические значения параметров газа .....	40
3.2.3. Скоростной коэффициент .....	41
3.3. Истечение газа через отверстие в баке .....	42
3.4. Движение газа в канале переменного сечения .....	46
3.4.1. Движение газа через диффузор .....	48
3.4.2. Движение газа через конфузор .....	48
3.4.3. Условие перехода скорости газа через значение скорости звука .....	48
3.5. Распространение конечных возмущений в газе.	
Ударная волна .....	50
3.5.1. Уравнение ударной адиабаты .....	55
3.5.2. Соотношения между скоростями газа за и перед фронтом ударной волны .....	57
3.5.3. Соотношения для скачков параметров газа в ударной волне .....	60
3.5.4. Скорость ударной волны .....	60
4. ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ И ГАЗА .....	62
4.1. Сила лобового сопротивления .....	62
4.2. Подъемная сила .....	66
4.3. Пограничный слой .....	67
4.3.1. Отрыв пограничного слоя .....	68
4.3.2. Обтекание шара при малых числах Рейнольдса. Формула Стокса .....	69
4.3.3. Обтекание шара при больших числах Рейнольдса .....	70
4.3.4. Эффект Магнуса .....	72
4.3.5. Качество крыла .....	72
ЛИТЕРАТУРА .....	75

# 1. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Возможность установления закономерностей происходящих в природе процессов во многом основывается на фундаментальном факте существования некоторых базовых физических величин, значения которых остаются неизменными.

Законы, устанавливающие постоянство этих величин при протекании различных процессов в физических системах носят название **законов сохранения**. Важным условием для реализации этих законов является замкнутость рассматриваемой физической системы.

Под *замкнутой* будем понимать такую физическую систему, которая не взаимодействует ни с какой другой системой.

В механике такими сохраняющимися величинами являются масса, энергия, импульс и момент импульса. Соответственно, основные уравнения, описывающие течения жидкостей и газов, являются следствием фундаментальных законов природы – законов сохранения массы, энергии, импульса и момента импульса.

При рассмотрении течений жидкостей и газов основным примером замкнутой системы является трубка тока.

**Одномерными течениями** жидкостей газов будем называть такие течения, в которых все параметры потока (скорость, давление, плотность, температура) зависят только от одной координаты, направленной вдоль потока.

В реальности потоки жидкостей и газов являются трехмерными и их характеристики зависят как от продольных, вдоль потока, координат, так и от поперечных. Однако такое полное описание этих потоков сопряжено с большими математическими трудностями.

В связи с этим, в механике жидкостей и газов широко используется приближение одномерных течений, при котором все параметры потока считаются зависящими только от одной координаты, направленной вдоль потока, а реальные значения соответствующих параметров в поперечном сечении потока заменяются на их средние по сечению величины. Такой подход является приближенным. Но, несмотря на приближенный характер получаемых соотношений, они оказываются весьма полезными для многих качественных выводов и большого количества технических расчетов.

## 1.1. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности

*Закон сохранения массы гласит:* масса замкнутой системы есть величина постоянная.

Замкнутой системой для потока жидкости является трубка тока.

В связи с этим к ней может быть применен закон сохранения массы в виде утверждения, что массовый расход жидкости  $Q_m$  через любое сечение трубки тока является величиной постоянной –  $Q_m = \text{const}$ , так как между любыми сечениями потока масса жидкости нигде не исчезает и нигде не возникает.

Вычислим массовый расход жидкости через произвольное сечение трубки тока  $S$ , в котором скорость жидкости имеет значение  $v$ , а плотность –  $\rho$  (рис. 1.1). Плоскость сечения принимается расположенной перпендикулярно вектору скорости течения жидкости.

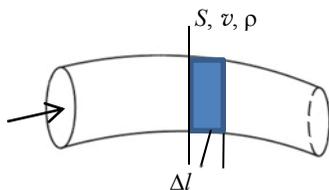


Рис. 1.1. К расходу жидкости

За время  $\Delta t$  через это сечение пройдет объем жидкости  $\Delta V$ , равный произведению площади сечения потока  $S$  на максимально возможное расстояние  $\Delta l$ , которое пройдут частицы жидкости за это время:  $\Delta V = S\Delta l$ . В свою очередь это расстояние равно произведению их скорости на указанный промежуток времени:  $\Delta l = v\Delta t$ . В итоге получаем  $\Delta V = Sv\Delta t$ . А масса  $\Delta m$  этого объема жидкости будет равна  $\Delta m = \rho\Delta V = \rho Sv\Delta t$ . В соответствии с определением массового расхода жидкости  $Q_m = \Delta m/\Delta t$  он получается равным

$$Q_m = \rho v S. \quad (1.1)$$

При этом объемный расход жидкости  $Q_V = \Delta V / \Delta t$  определяется произведением скорости на площадь сечения потока:

$$Q_V = v S.$$

В итоге, из сформулированного закона сохранения массы применительно к течению жидкости в трубке тока вытекает следующее уравнение, связывающее между собой параметры потока  $\rho$ ,  $v$ ,  $S$ :

$$\rho v S = \text{const}, \quad (1.2)$$

которое носит название **уравнение неразрывности**, и смысл которого, как уже было сказано, заключается в том, что массовый расход жидкости есть величина постоянная.

Для двух разных сечений потока уравнение неразрывности может быть записано в виде

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \quad (1.3)$$

## 1.2. Закон сохранения энергии. Уравнение Бернулли

*Закон сохранения энергии гласит:* энергия замкнутой системы есть величина постоянная.

Для потока жидкости замкнутой системой является трубка тока.

Движущаяся жидкость, как и любое движущееся тело с массой  $m$ , может обладать кинетической энергией  $E_k = mv^2/2$  и потенциальной энергией в поле силы тяжести  $E_g = mgz$ , где  $z$  – вертикальная координата рассматриваемого сечения трубки тока.

Особенностью жидкостей является то, что в них действуют силы давления. При течении жидкости эти силы могут совершать работу, придавая тем самым ей энергию. Обозначим эту энергию жидкости, связанную с работой сил давления, как  $E_p$ .

Для возможности характеризовать энергетические характеристики потока жидкости в каждой его точке, т. е. локально, введем понятие **удельной энергии жидкости**  $e$  как отношение энергии  $E$  жидкости к ее массе:  $e = E/m$ . Удельная энергия определяет энергию жидкости, приходящуюся на единицу ее массы, и имеет единицу измерения Дж/кг.

Таким образом, удельная кинетическая энергия жидкости будет равна  $e_k = v^2/2$ , удельная потенциальная энергия в поле силы тяжести будет равна  $e_g = gz$ , а удельная энергия, связанная с работой сил давления, –  $e_p = E_p/m$ .

Сумма этих видов энергии может быть определена как полная удельная энергия жидкости:  $e_{\text{п}} = e_k + e_p + e_g$ .

Для стационарного безвихревого баротропного течения идеальной жидкости закон сохранения энергии применим и к удельной энергии жидкости в следующей формулировке: полная удельная энергия жидкости, представляющая собой сумму удельной кинетической энергии, удельной энергии, связанной с работой сил давления, и удельной потенциальной энергии в поле силы тяжести, есть величина постоянная:

$$e_{\Pi} = e_k + e_p + e_g = \text{const.} \quad (1.4)$$

Удельная энергия, связанная с работой сил давления  $e_p$ , требует отдельного вычисления. Вычислим ее для элементарного объема жидкости, имеющего длину  $dl$  и расположенного в сечении трубки тока с площадью  $S$ , на границах которого действует перепад давления  $dp$ , как изображено на рис. 1.2.

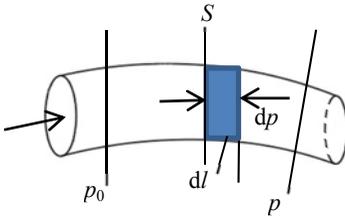


Рис. 1.2. Силы давления, действующие на элементарный объем жидкости в трубке тока

Действующая на рассматриваемый элемент жидкости сила давления  $dF$  будет равна  $dF = dp \cdot S$ , а совершаемая этой силой работа  $dA$  по перемещению этого элемента на расстояние  $dl$  определится как  $dA = dF \cdot dl = dp \cdot S \cdot dl$ .

Масса  $dm$  рассматриваемого элемента будет равна произведению плотности жидкости  $\rho$  на его объем  $dV = Sdl$ . То есть,  $dm = \rho dV = \rho Sdl$ .

В результате, удельная работа  $da = dA/dm = dp \cdot S \cdot dl/dm$  этой силы получится равной  $da = (1/\rho)dp$ .

Именно эта величина и определяет элементарную удельную энергию жидкости, связанную с работой сил давления  $de_p = da$  при перемещении элементарного объема жидкости между точками с перепадом давления  $dp$ .

Если объем жидкости перемещается между конечными значениями давления  $p_0$  и  $p$ , то удельная работа сил давления  $a$  на этом участке будет складываться из удельной работы  $da$  всех элементарных перепадов давления  $dp$  на нем, то есть представлять собой интеграл от вычисленной ранее величины  $da$ .

$$\text{Таким образом, } a = \int_{p_0}^p da = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho} dp.$$

Соответственно, эта величина будет определять удельную энергию жидкости, связанную с работой сил давления  $e_p = a$  при перемещении объема жидкости между точками с конечными значениями давления  $p_0$  и  $p$ :

$$e_p = a = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p)} dp.$$

Эту величину часто называют «функцией давления» и обозначают буквой  $\mathcal{P}(p)$ .

Таким образом, сформулированный выше закон сохранения энергии (1.1) для полной удельной энергии жидкости может быть записан следующим образом:

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + gz = \text{const}, \quad \mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p)} dp. \quad (1.5)$$

Данное соотношение носит название **уравнения Бернулли**, и смысл его заключается в том, что полная удельная энергия жидкости, представляющая собой сумму удельной кинетической энергии, удельной энергии, связанной с работой сил давления, и удельной потенциальной энергии в поле силы тяжести, есть величина постоянная.

Уравнение Бернулли является следствием закона сохранения энергии и является одним из основных уравнений, описывающих одномерные течения жидкостей.

Функция давления  $\mathcal{P}(p)$  вычисляется как интеграл от функции  $1/\rho$ , при написании которой подчеркнуто, что плотность зависит от давления:  $\rho = \rho(p)$ . От вида этой зависимости, то есть вида соответствующего уравнения состояния жидкости или газа, конкретные выражения для функции давления могут быть разными.

### 1.3. Закон сохранения импульса. Уравнение движения

Как известно, импульсом материальной точки  $\vec{K}$  называется произведение ее массы  $m$  на скорость  $\vec{v}$ :  $\vec{K} = m\vec{v}$ .

*Закон сохранения импульса гласит:* импульс замкнутой системы есть величина постоянная:  $\vec{K} = \text{const}$  или  $d\vec{K}/dt = 0$ .

Если система взаимодействует с другими системами, то мерой этого взаимодействия является сила  $\vec{F}$ . При этом импульс системы изменяется, а его изменение за единицу времени равно действующей на систему силе  $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}$ . Это уравнение называется **уравнением движения** и представляет собой второй закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}.$$

Выведем уравнение движения для одномерного течения жидкости.

Пусть жидкость движется в трубке тока и в начальный момент времени рассматриваемый объем жидкости занимает пространство между сечениями 1 и 2, как изображено на рис. 1.3.

Параметры потока будем отмечать нижними индексами, соответствующими номеру рассматриваемого сечения. В сечении 1: площадь  $S_1$ , скорость  $v_1$ , плотность  $\rho_1$  и т. п.

Через малый промежуток времени  $dt$  этот объем переместится по трубке тока и займет положение между сечениями 1', 2'.

Вычислим изменение импульса этого объема при таком перемещении.

Объем жидкости между сечениями 1 и 2 представим в виде суммы двух объемов, находящихся между сечениями 1, 1' и между сечениями 1', 2. Считая перемещение сечения 1 малым, будем полагать, что площади и параметры потока в сечениях 1 и 1' практически не отличаются.

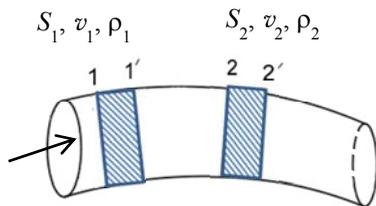


Рис. 1.3. Изменение импульса жидкости в трубке тока

Импульс  $\vec{K}_{11'}$  объема жидкости, расположенного между сечениями 1, 1', будет равен произведению его массы на вектор скорости, равный его значению в сечении 1:  $\vec{K}_{11'} = m_{11'} \vec{v}_1$ .

Масса рассматриваемого объема жидкости  $m_{11'}$  будет равна произведению его плотности в сечении 1 на величину этого объема  $V_{11'}$ , который равен  $V_{11'} = l_{11'} S_1 = v_1 dt S_1$ .

Соответственно,  $m_{11'} = \rho_1 V_{11'} = \rho_1 v_1 S_1 dt$  и для импульса этого объема получаем выражение  $\vec{K}_{11'} = m_{11'} \vec{v}_1 = \rho_1 v_1 \vec{v}_1 S_1 dt$ .

Импульс всего объема жидкости, расположенного между сечения 1 и 2, будет равен сумме импульсов составляющих его частей, расположенных между сечениями 1, 1' и 1', 2':

$$\vec{K}_{12} = \vec{K}_{11'} + \vec{K}_{1'2} = \rho_1 v_1 \vec{v}_1 S_1 dt + \vec{K}_{1'2}.$$

Аналогичным образом можно вычислить импульс объема жидкости через промежуток времени  $dt$ , когда объем займет положение между сечениями 1', 2':

$$\vec{K}_{1'2'} = \vec{K}_{1'2} + \vec{K}_{22'} = \rho_2 v_2 \vec{v}_2 S_2 dt + \vec{K}_{1'2}.$$

Изменение импульса рассматриваемого объема жидкости  $d\vec{K}$  равно разности импульсов в конечный и начальный моменты времени:

$$d\vec{K} = \vec{K}_{1'2'} - \vec{K}_{12} = \vec{K}_{1'2} + \vec{K}_{22'} - \rho_1 v_1 \vec{v}_1 S_1 dt - \vec{K}_{1'2}.$$

Согласно второму закону Ньютона  $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}$ , получаем уравнение движения для жидкости в виде

$$\rho_2 v_2 \vec{v}_2 S_2 - \rho_1 v_1 \vec{v}_1 S_1 = \vec{F}, \quad (1.6)$$

которое с учетом уравнения неразрывности  $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$  можно также записать с использованием массового расхода жидкости:

$$Q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}. \quad (1.7)$$

## 2. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

### 2.1. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

Для несжимаемой жидкости с постоянной плотностью  $\rho = \text{const}$ , уравнение неразрывности (1.2) упрощается и принимает вид

$$vS = \text{const} \quad \text{либо} \quad v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (2.1)$$

Это означает, что для несжимаемой жидкости ее объемный расход  $Q_V = vS$  есть величина постоянная.

Из уравнения неразрывности (2.1) следует важный качественный вывод о том, что при течении несжимаемой жидкости в тех местах потока, где площадь его сечения увеличивается (поток расширяется), там скорость его уменьшается и, соответственно, при сужении потока скорость его увеличивается. Отношение скоростей в этих местах обратно пропорционально отношению площадей сечения потока.

### 2.2. Уравнение Бернулли для идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости

Для несжимаемой жидкости, у которой плотность есть величина постоянная, функция давления получается равной

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\rho} \int_{p_0}^p dp = \frac{1}{\rho} (p - p_0). \quad (2.2)$$

Подставив это выражение в (1.5) и перенеся постоянную составляющую функции давления  $p_0/\rho$  в правую часть, включив ее в стоящую там константу, получим уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости в терминах удельной энергии в следующем виде:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}, \quad (2.3)$$

или для двух разных сечений потока:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2. \quad (2.4)$$

Тогда энергетическая интерпретация уравнения выражается так: полная удельная энергия жидкости, представляющая собой сумму удельной кинетической энергии, удельной энергии, связанной с работой сил давления и удельной потенциальной энергии в поле силы тяжести, есть величина постоянная.

При такой записи каждое слагаемое в уравнении Бернулли имеет размерность Дж/кг.

Уравнение Бернулли можно интерпретировать и по-другому.

Умножим (2.3) и (2.4) на постоянную величину плотности  $\rho$  и получим

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho gz = \text{const}, \quad \frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 + \rho gz_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \rho gz_2. \quad (2.5)$$

Основная суть этого уравнения не изменилась, но размерность каждого из слагаемых стала другой, а именно равной Па.

Тогда, каждое из слагаемых этого уравнения может быть интерпретировано как специфическое давление в жидкости: величина  $\rho v^2/2$  будет называться «динамическим давлением», обусловленным скоростью движения жидкости; величина  $p$  – «пьезометрическим давлением», обусловленным тепловым хаотическим движением молекул;  $\rho gz$  – «геометрическим давлением», обусловленным весом жидкости. А их сумма есть полное давление в жидкости.

В такой записи уравнение Бернулли имеет следующую силовую интерпретацию: полное давление в жидкости, представляющее собой сумму динамического, пьезометрического и геометрического давлений, есть величина постоянная.

Еще одной внесистемной силовой характеристикой потока жидкости является напор,  $h$ . Это понятие часто используется в технических приложениях.

Напор определяется как отношение пьезометрического давления  $p$  к удельному весу жидкости  $\rho g$ :  $h = p/\rho g$ , и измеряется в метрах.

Разделив исходное уравнение Бернулли (2.3) и (2.4) на  $g$ , получим его в виде

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{const}, \quad \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2, \quad (2.6)$$

где размерность каждого из слагаемых есть метр и каждое из них может быть интерпретировано как специфический напор в жидкости: величина  $v^2/2g$  – «динамический напор», величина  $p/\rho g$  – «пьезометрический напор»,  $z$  – геометрический напор, а их сумма есть полный напор в жидкости.

В такой записи уравнение Бернулли имеет следующую силовую интерпретацию: полный напор в жидкости, представляющий собой сумму динамического, пьезометрического и геометрического напоров, есть величина постоянная.

### 2.3. Уравнение Бернулли для вязкой несжимаемой жидкости. Потери энергии, давления и напора

При предыдущем рассмотрении энергетического баланса в потоке жидкости и выводе уравнения Бернулли (2.3), (2.4) вне внимания был оставлен тот факт, что жидкость обладает еще и тепловой энергией, которая может также изменяться при ее движении. Важным является то, что это изменение может происходить не обязательно в результате внешнего подвода или отвода теплоты, а как следствие внутренних источников, обусловленных выделением теплоты за счет действия сил вязкого трения. Таким образом, полученное выше уравнение Бернулли справедливо только для идеальной (невязкой) жидкости. На практике при движении реальной вязкой жидкости часть механической энергии постоянно переходит в тепловую, и механическая энергия жидкости постоянно уменьшается. Эту перешедшую в тепло часть механической энергии жидкости называют **потерями энергии**, главным образом из-за того, что тепловая энергия в последующем уходит безвозвратно в окружающее пространство. В результате этих процессов любой движущийся поток жидкости остановится, если не компенсировать эти потери энергии внешними источниками, роль которых в реальных трубопроводах играют, например, насосы.

Таким образом, при применении уравнения Бернулли к реальной жидкости необходимо учитывать указанные потери энергии.

Если при течении жидкости между двумя сечениями потока 1 и 2, значения механической энергии в которых соответственно  $e_1$  и  $e_2$ , имеют место потери энергии  $\Delta e_{12}$  (рис. 2.1), тогда баланс видов энергии может быть записан в следующем виде:  $e_1 = e_2 + \Delta e_{12}$ , либо

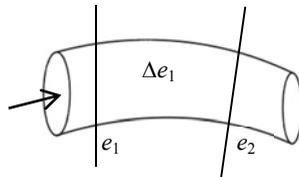


Рис. 2.1. Потери энергии в вязкой жидкости в трубке тока

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \Delta e_{12}. \quad (2.7)$$

Соответственно, в силовой интерпретации уравнение Бернулли (2.5), (2.6) для реальной вязкой жидкости имеет вид

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 + \rho gz_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \rho gz_2 + \Delta p_{12} \quad (2.8)$$

или

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta h_{12}. \quad (2.9)$$

Здесь  $\Delta p_{12} = \rho \Delta e_{12}$  представляет собой потери давления, а  $\Delta h_{12} = \Delta p_{12} / \rho g$  – потери напора в жидкости.

#### 2.4. Качественные следствия из уравнений неразрывности и Бернулли

Пусть поток несжимаемой идеальной жидкости движется горизонтально так, что вертикальные координаты его поперечных сечений одинаковы,  $z = \text{const}$ . Тогда уравнение Бернулли (2.5) записы-

вається в наступному вигляді:  $\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}$ , і з нього одразу випливає

важний якісний висновок про те, що при течії несжимаємої рідини в тих місцях потоку, де швидкість збільшується (перше доданок), там тиск зменшується (друге доданок).

Одночасно з рівняння неперервності випливає, що швидкість потоку збільшується при зменшенні площі його перерізу.

Таким чином, з рівнянь неперервності і Бернуллі можна зробити загальні якісні висновки про те, що:

– в місцях звуження потоку несжимаємої рідини, де площа перерізу зменшується, швидкість рідини збільшується, а тиск зменшується:  $S \downarrow, v \uparrow, p \downarrow$ ;

– в місцях розширення потоку несжимаємої рідини, де площа перерізу збільшується, швидкість рідини зменшується, а тиск збільшується:  $S \uparrow, v \downarrow, p \uparrow$ .

## 2.5. Кавітація

**Кавітація** – це явище закипання рідини в потоці при пониженні тиску в ньому, пов'язаним з збільшенням швидкості потоку в місцях його звуження.

Так, наприклад, якщо рідину з певною температурою  $T_0$  рухають в звужуючому каналі, то, як випливає з рівняння Бернуллі, швидкість її збільшується, а тиск зменшується.

З іншого боку, відомо, що будь-яка рідина має певну температуру кипіння  $T_k$ , при перевищенні якої вона закипає. Відомо також, що температура кипіння рідини залежить від тиску  $T_k = T_k(p)$ : чим менше тиск в рідині, тим нижче температура кипіння і навпаки. Так, наприклад, відомо, що температура кипіння води при тиску  $10^5$  Па або висоті 760 мм рт.ст. дорівнює  $100^\circ\text{C}$ . Однак, при тиску, що відповідає висоті 17 мм рт.ст., вода вже закипає при кімнатній температурі  $20^\circ\text{C}$ .

Таким чином, при русі рідини в звужуючому каналі і відповідному падінні тиску в ній в певному місці потоку може виникнути ситуація, коли температура кипіння рідини при цьому пониженому тиску може стати менше її поточної температури,  $T_k(p) < T_0$ . Це з неминемісністю приведе

к закипанию жидкости в этом месте. Область кипения жидкости, как правило, прилегает к стенкам канала, в котором движется жидкость, и в ситуации, изображенной на рис. 2.2, является замкнутой. Такое закипание жидкости называется **кавитацией**, а область ее кипения называется **кавитационной каверной**.



Рис. 2.2. Кавитация

Кавитация, как и вообще процесс кипения, сопровождается характерным шумом, вибрациями и, что особенно примечательно, интенсивной коррозией металла в области кавитационной каверны, приводящей в итоге к разрушению стенок каналов. С этой точки зрения, кавитация является крайне нежелательным явлением при течении жидкостей в каналах энергетических и других машин.

Кавитация может возникать не только при течении жидкости в каналах, но и при внешнем обтекании тел на тех участках поверхности тела, где скорость потока увеличивается. Например, это может иметь место при обтекании крыловидного профиля, изображенного рис. 2.3, который также имеют лопатки турбины, лопасти гребных винтов судов и т. п.

На выпуклой поверхности такого профиля поток жидкости ускоряется, что приводит к понижению давления в этом месте и может привести к возникновению там кавитации.

Коррозия металла в области кавитационной каверны может служить причиной разрушения этих элементов энергетических машин.

Естественным способом предотвращения кавитации является соответствующее ограничение скорости движения жидкости или обтекаемых ею тел.

Еще одним способом предотвращения кавитации при обтекании тел является придание им специальной формы, при которой кавитационная каверна не замыкается на поверхности профиля, является открытой, и пузыри пара уносятся из нее потоком жидкости (рис. 2.4). Такие профили называются **суперкавитирующими**.

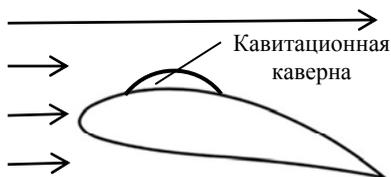


Рис. 2.3. Кавитация при внешнем обтекании тела

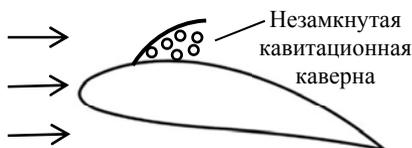


Рис. 2.4. Незамкнутая кавитационная каверна

## 2.6. Эжекция

Эффект эжекции обусловлен теми же причинами, что и кавитация, а именно, понижением давления в местах сужения потока жидкости, где скорость его увеличивается.

В частности, если в сужении канала произойдет понижение давления настолько, что оно станет меньше давления газа в окружающей канал газе ( $p < p_0$ ), то при наличии отверстия в стенке канала, сообщающего газ с жидкостью в канале, газ из внешней среды естественным образом начнет поступать в поток жидкости и уноситься им в виде пузырьков, как изображено на рис. 2.5.

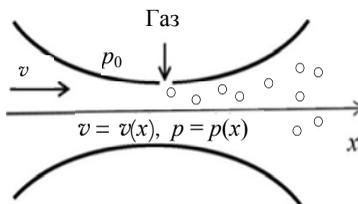


Рис. 2.5. Эжекция

Такой подсос газа в поток жидкости в месте сужения канала называется **эжекцией**.

Эжекция достаточно широко используется в технических системах для создания газожидкостных потоков, в частности, для формирования топливно-воздушных смесей перед сжиганием.

## 2.7. Течение несжимаемой жидкости через конфузоры и диффузоры

**Диффузор** – это канал с плавно увеличивающейся площадью поперечного сечения (рис. 2.6, а).

**Конфузор** – это канал с плавно уменьшающейся площадью поперечного сечения (рис. 2.6, б).

Диффузоры и конфузоры предназначены для осуществления плавного перехода между трубами разного диаметра с целью уменьшения потерь давления при таком переходе.

Изменение параметров потока несжимаемой идеальной жидкости (скорости и давления) при течении в диффузорах и конфузорах описывается уравнениями неразрывности и Бернулли.

Для диффузоров и конфузоров, оси симметрии которых расположены горизонтально и действие силы тяжести несущественно, эти уравнения принимают вид

$$vS = \text{const} \text{ и } \frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}. \quad (2.10)$$

Если параметры потока на входе в них отметить индексом 1, а на выходе – индексом 2, то

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad \frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2. \quad (2.11)$$

Тогда значения скорости и давления на выходе из этих устройств определяются через их значения на входе следующим образом:

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2}, \quad p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \left( 1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right). \quad (2.12)$$

Определяя геометрические характеристики этих устройств степень расширения диффузора и степень сужения конфузора  $n$  как  $n = S_2/S_1$ , получаем

$$v_2 = \frac{v_1}{n}, \quad p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (2.13)$$

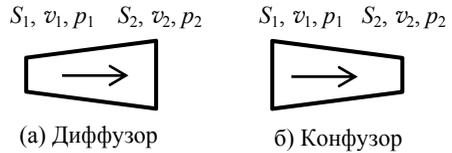


Рис. 2.6. Течение в диффузоре (а) и конфузоре (б)

Для диффузора  $n > 1$ , а для конфузора  $n < 1$ .

Соответственно, из (2.13) при движении в диффузоре скорость уменьшается, а давление увеличивается, а при движении в конфузоре – скорость увеличивается, а давление уменьшается.

## 2.8. Истечение несжимаемой жидкости через отверстие в баке. Формула Торичелли

Пусть несжимаемая жидкость частично заполняет сосуд на высоту  $h$  и находится в поле силы тяжести, характеризуемой ускорением  $g$  (рис. 2.7). Давление газа над поверхностью жидкости в сосуде –  $p$ , а вне сосуда –  $p_0$ . В дне сосуда имеется отверстие, через которое под действием силы тяжести и перепада давления  $p-p_0$  происходит истечение струи жидкости со скоростью  $v$ . Вычислим величину этой скорости.

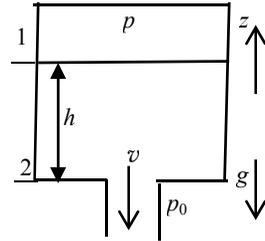


Рис. 2.7. Истечение жидкости через отверстие в баке

Выделим в рассматриваемом потоке жидкости сечение  $1$  на поверхности жидкости, а сечение  $2$  – в струе, на уровне отверстия, и запишем для этих сечений уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 + gz_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + gz_2.$$

Чем больше размеры бака по сравнению с размерами отверстия, тем меньше будет скорость понижения уровня жидкости в баке по сравнению со скоростью жидкости в вытекающей струе.

Примем, что размеры бака велики настолько, что скоростью течения жидкости в баке можно пренебречь по сравнению со скоростью жидкости в струе и принять  $v_1 = 0$ .

С учетом принятых на рис. 2.7 обозначений:  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = v$ ,  $p_1 = p$ ,  $p_2 = p_0$ ,  $z_1 - z_2 = h$ , – уравнение Бернулли будет иметь следующий вид:

$$p + gz_1 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0 + gz_2. \quad (2.14)$$

Из этого уравнения для скорости истечения получается следующее выражение:

$$v = \sqrt{2gh + \frac{2(p-p_0)}{\rho}} = \sqrt{2g \left( h + \frac{p-p_0}{\rho g} \right)} \quad (2.15)$$

или

$$v = \sqrt{2gH}, \quad (2.16)$$

где  $H = h + \frac{p-p_0}{\rho g}$  – сумма геометрического и пьезометрического

напоров в жидкости, под действием которых происходит истечение.

Формула (2.16) носит название **формулы Торичелли**.

Если бак открыт сверху в ту же среду, в которую происходит истечение жидкости, т. е.  $p = p_0$ , то пьезометрический напор отсутствует и формула Торичелли содержит только геометрический напор:

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (2.17)$$

Если давление  $p$  над поверхностью жидкости в баке меньше, чем давление в среде истечения, то такой перепад давления препятствует истечению жидкости и уменьшает скорость истечения вплоть до обращения ее в ноль. Это происходит тогда, когда в соответствии с формулой (2.15)  $p = p_0 - \rho gh$ .

В реальности отверстие представляет собой местное сопротивление, на котором происходят потери давления, неучитываемые при выводе формулы Торичелли. Поэтому реальная скорость истечения будет меньше той, которая определяется этой формулой.

Для учета этого обстоятельства в формулу Торичелли вводится поправочный коэффициент  $\varphi$ , называемый **коэффициентом скорости**, и скорость истечения реальной вязкой жидкости определяется выражением

$$v = \varphi \sqrt{2gH}.$$

Соответственно, объемный расход жидкости  $Q_V$  при таком истечении будет определяться следующим выражением:

$$Q_V = vS_{\text{струи}} = \varepsilon\varphi S_{\text{отв}} \sqrt{2gH} = \mu S_{\text{отв}} \sqrt{2gH}, \quad (2.18)$$

в котором коэффициент  $\mu$  носит название **коэффициента расхода** и включает в себя коэффициент сжатия струи  $\varepsilon = S_{\text{струи}}/S_{\text{отв}}$ , учитывающий в свою очередь тот факт, что при истечении жидкости в отверстии происходит некоторое сжатие струи и площадь ее сечения  $S_{\text{струи}}$  становится меньше площади отверстия  $S_{\text{отв}}$ .

Для снижения потерь давления на отверстии и, соответственно, увеличения скорости и расхода жидкости при истечении через него, отверстием придают плавную форму, используя насадки (рис. 2.8).

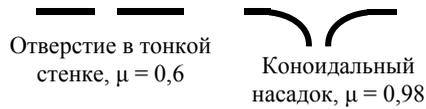


Рис. 2.8. Формы отверстия для истечения жидкости

## 2.9. Внезапное расширение и сужение потока. Формула Борда

Внезапное расширение или сужение потока представляет собой резкий переход между трубами с разными диаметрами (рис. 2.9).

Такого рода переходы представляют собой местные сопротивления, на которых имеют место потери давления.

Геометрические характеристики этих сопротивлений определим степень расширения потока  $n$  в первом случае или степень сужения потока  $n$  – во втором, как  $n = S_2/S_1$ .

Потери давления при внезапном расширении потока  $\Delta p_{\text{расш}}$  могут быть вычислены на основе имеющихся уравнений:

а) неразрывности –  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ ;

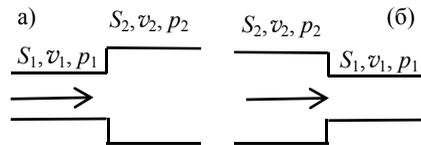


Рис. 2.9. Внезапное расширение (а) и сужение (б) потока

б) Бернулли для вязкой жидкости (в предположении, что трубы расположены горизонтально) –  $\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \Delta p_{\text{расш}}$ ;

в) движения –  $\rho v_2 \vec{v}_2 S_2 - \rho v_1 \vec{v}_1 S_1 = \vec{F}$ .

Сила, действующая в сечении  $S_2$  на расширяющийся поток жидкости в направлении его движения, будет равна разности давлений  $p_1 - p_2$ , умноженной на площадь этого сечения:  $F = (p_1 - p_2)S_2$ .

Тогда уравнение движения в проекции на направление движения жидкости дает  $\rho v_2^2 S_2 - \rho v_1^2 S_1 = (p_1 - p_2)S_2$ .

Подставляя в это уравнение  $v_2 S_2$  вместо  $v_1 S_1$  во второе слагаемое слева и сокращая все слагаемые на  $S_2$ , получаем

$$p_1 - p_2 = \rho v_2^2 - \rho v_1 v_2.$$

Подставляя это выражение в уравнение Бернулли, получим

$$\begin{aligned} \Delta p_{\text{расш}} &= p_1 - p_2 + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2} = \\ &= \rho v_2^2 - \rho v_1 v_2 + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2} = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - 2v_1 v_2 + v_1^2). \end{aligned}$$

Или, окончательно, потери давления при внезапном расширении потока будут определяться следующей формулой:

$$\Delta p_{\text{расш}} = \frac{\rho}{2}(v_1 - v_2)^2, \quad (2.19)$$

которая носит название **формулы Борда**.

С другой стороны, потери давления на местном сопротивлении определяются общими формулами Дарси-Вейсбаха (2.25):

$$\Delta p_{\text{расш}} = \zeta \frac{\rho v^2}{2},$$

и могут вычисляться по скорости в узкой трубе  $v_1$  или по скорости в широкой трубе  $v_2$ :

$$\Delta p_{\text{расш}} = \zeta_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = \zeta_2 \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad (2.20)$$

через соответствующие этим скоростям коэффициенты местного сопротивления  $\zeta_1$  или  $\zeta_2$ .

Используя формулу Борда, для этих коэффициентов также можно получить аналитические выражения.

Вынося за скобки в формуле Борда одно из значений скорости, можно получить

$$\Delta p_{\text{расш}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{\rho v_1^2}{2} = \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2 \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (2.21)$$

Сравнивая это выражение с формулами Дарси-Вейсбаха, можно увидеть, что

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2, \quad \zeta_2 = \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2. \quad (2.22)$$

Определяя геометрические характеристики этого сопротивления степень расширения потока  $n$  как  $n = S_2/S_1$ , получаем с учетом уравнения неразрывности:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} = n \quad \text{или} \quad \zeta_1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2, \quad \zeta_2 = (n - 1)^2. \quad (2.23)$$

Поскольку степень расширения потока может изменяться от 1 до  $\infty$ , постольку пределы изменения коэффициентов сопротивления при внезапном расширении потока определяются следующим образом:  $n = (1 \div \infty)$ ,  $\zeta_1 = (0 \div 1)$ ,  $\zeta_2 = (0 \div \infty)$ .

Следует отметить, что для потерь давления при внезапном сужении потока аналитических выражений не существует и для их определения надо использовать справочники. Необходимо иметь ввиду, что потери давления при внезапном расширении потока

намного больше, чем при сужении. Так, в первом случае, например, при степени расширения потока равном 5, коэффициент сопротивления  $\zeta_2 = 16$ , а при эквивалентном сужении потока он равен 0,35.

## 2.10. Дроссельный расходомер

**Расходомер** – это прибор, предназначенный для измерения объемного расхода жидкости  $Q_V$ .

Принцип действия дроссельного расходомера основан на измерении потерь давления  $\Delta p$  на местном сопротивлении с известным коэффициентом сопротивления  $\zeta$  (рис. 2.10).

Пересчет результатов измерения потерь давления на расход жидкости осуществляется в соответствии с известной формулой

Дарси  $\Delta p = \zeta \frac{\rho v^2}{2}$ . Откуда  $v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho \zeta}}$ , а  $Q_V = vS$ .

В качестве местного сопротивления в дроссельных расходомерах часто используются шайбы.

Дифференциальный манометр

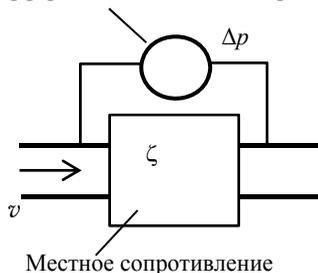


Рис. 2.10. Дроссельный расходомер

## 2.11. Основные задачи и методы гидравлического расчета трубопроводных систем

Трубопроводы представляют собой инженерные сооружения, предназначенные для транспортировки (целенаправленного перемещения в пространстве) текучих сред (жидкостей и газов).

Одной из основных задач гидравлического расчета трубопровода является определение потерь давления  $\Delta p$  в нем и потребной мощности насоса  $N$  для обеспечения заданного объемного расхода  $Q_V$  в трубопроводе. Эта мощность определяется произведением объемного расхода на потери давления в трубопроводе:

$$N = Q_V \cdot \Delta p. \quad (2.24)$$

### 2.11.1. Потери давления в трубопроводе

Основными элементами трубопровода являются трубы и местные сопротивления, на которых и происходят преимущественные потери давления.

С точки зрения течения жидкости, трубы – это такие участки трубопровода, на которых характер течения жидкости не изменяется, а местные сопротивления – сравнительно короткие участки трубопровода, на которых происходит существенное изменение характера течения жидкости. К местным сопротивлениям, в частности, относится трубопроводная арматура (вентили, задвижки, клапаны, а также разветвления, колена и т. п.).

Потери давления на этих элементах при расчетах выражаются через динамическое давление в жидкости  $\rho v^2/2$ .

Так, отношение потерь давления на местном сопротивлении  $\Delta p_m$  к динамическому давлению в жидкости является характеристикой этого местного сопротивления, величиной, безразмерной и называется **коэффициентом местного сопротивления**  $\zeta$ :

$$\Delta p_m / \frac{\rho v^2}{2} = \zeta.$$

Таким образом, потери давления на местных сопротивлениях вычисляются по формуле

$$\Delta p_m = \zeta \frac{\rho v^2}{2}.$$

Значения коэффициентов местных сопротивлений содержатся в справочниках, а также в паспортных данных к ним.

По аналогичной формуле определяются потери давления и в трубах за исключением того, что в нее явным образом вводится множитель, соответствующий отношению длины трубы  $l$  к ее диаметру  $d$ :

$$\Delta p_T = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2},$$

а соответствующий безразмерный коэффициент  $\lambda$  называется **гидравлическим коэффициентом сопротивления**.

Таким образом, потери давления на элементах трубопровода вычисляются по следующим формулам:

$$\Delta p_T = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}, \quad \Delta p_M = \zeta \frac{\rho v^2}{2}, \quad (2.25)$$

которые носят название **формулы Дарси-Вейсбаха**.

Гидравлический коэффициент трения в трубах  $\lambda$  зависит от числа Рейнольдса потока  $Re = vd/v$  и от относительной шероховатости трубы  $\bar{\Delta}$ , представляющей собой отношение абсолютной шероховатости  $\Delta$  к диаметру трубы:  $\bar{\Delta} = \Delta/d$ . Зависимость  $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$  носит название **закона сопротивления в трубах**.

В общем случае значения  $\lambda$  находятся из справочников, но для некоторых ситуаций для его определения существуют достаточно простые формулы.

Так, например, закон сопротивления при ламинарном течении в трубах при  $Re < 2300$  имеет вид  $\lambda = 64/Re$ .

При турбулентном течении  $Re > 2300$  в гладких трубах ( $\Delta = 0$ ) имеет место закон сопротивления Блазиуса:  $\lambda = 0,3164/Re^{0,25}$ .

В зависимости от конфигурации трубопроводы подразделяются на простые (магистральные) и сложные.

*Простой трубопровод* представляет собой последовательное соединение местных сопротивлений одинаковыми (кроме длины) трубами (рис. 2.11).

Пусть в начальную точку Н простого трубопровода насосом подается объемный расход жидкости  $Q$ , который выходит в конечной точке К.

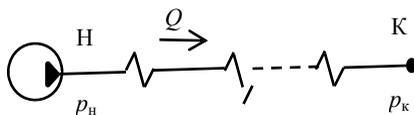


Рис. 2.11. Простой трубопровод

Потери давления в таком трубопроводе при горизонтальном его расположении есть ни что иное, как разность давлений между его начальной и конечной точками, и складываются из потерь давления на каждой трубе и каждом местном сопротивлении. При этом расход жидкости через каждый из элементов трубопровода одинаков.

Потери давления на отдельной  $i$ -той трубе  $\Delta p_T$  и отдельном  $i$ -том местном сопротивлении  $\Delta p_M$  вычисляются по известным формулам Дарси-Вейсбаха, которые для круглых труб ( $S = \pi d^2/4$ ) и с учетом того, что  $v = Q/S$ , принимают вид

$$\Delta p_{Mi} = \zeta_i \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 d^4} \text{ и } \Delta p_{Ti} = \lambda \frac{8l_i \rho Q^2}{\pi^2 d^5}.$$

Таким образом,

$$\Delta p = p_n - p_k = \sum \Delta p_{Mi} + \sum \Delta p_{Ti} = \frac{8\rho}{\pi^2 d^4} \left[ \sum \zeta_i + \frac{\lambda}{d} \sum l_i \right] Q^2.$$

Приняв во внимание, что  $\sum l_i = L$  есть практически полная длина трубопровода, окончательно можно записать:

$$\Delta p = \frac{8\rho}{\pi^2 d^4} \left[ \sum \zeta_i + \frac{\lambda}{d} L \right] Q^2 \equiv C Q^2.$$

Для сокращения дальнейших выражений коэффициент перед  $Q^2$ , включающий в себя все заданные характеристики трубопровода, обозначен буквой  $C$ .

$$\Delta p = C Q^2, \text{ где } C \equiv \frac{8\rho}{\pi^2 d^4} \left[ \sum \zeta_i + \frac{\lambda}{d} L \right].$$

Мощность насоса, необходимая для обеспечения заданного объемного расхода жидкости  $Q$  в заданном простом трубопроводе, определится произведением этого расхода на потери давления в трубопроводе  $N = \Delta p Q$ .

*Сложный трубопровод* всегда можно представить как то или иное соединение простых трубопроводов.

Наиболее типичными соединениями простых трубопроводов являются последовательное соединение, параллельное соединение и разветвленный трубопровод.

*Последовательное* соединение простых трубопроводов представляет собой такое их соединение, при котором конечная точка предыдущего трубопровода соединяется с начальной точкой последующего (рис. 2.12).



Рис. 2.12. Последовательный трубопровод

При таком соединении расход жидкости в каждом из трубопроводов одинаков  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_i = \dots = Q_{n-1} = Q_n$ .

Потери давления при таком соединении простых трубопроводов складываются из потерь давления на каждом из них, которые вычисляются по полученной формуле  $\Delta p_i = C_i Q^2$ :

$$\Delta p = \sum \Delta p_i = Q^2 \sum C_i.$$

Соответственно, необходимая мощность насоса для такого трубопровода при его горизонтальном расположении равна  $N = Q \Delta p$ .

*Параллельное соединение простых трубопроводов* представляет собой такое их соединение, при котором все их начальные точки соединяются между собой и все конечные точки соединяются между собой (рис. 2.13).

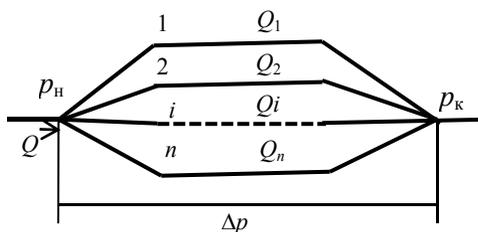


Рис. 2.13. Параллельный трубопровод

В этом случае подводимый к трубопроводу объемный расход жидкости  $Q$  разветвляется по всем простым трубопроводам и, поскольку их характеристики, то есть сопротивления, разные, то и расходы через них разные.

Таким образом, в результате расчета такого трубопровода необходимо определить расходы жидкости через каждый из простых трубопроводов  $Q_i$  и потери давления в них.

Для решения этой задачи, прежде всего необходимо понять, что в силу такого соединения потери давления  $\Delta p$  на всем параллельном трубопроводе и в каждом из составляющих его простых трубопроводов будут одинаковы. Действительно, поскольку начальные точки всех простых трубопроводов соединены вместе, то и давление в начальной точке каждого из них будет одинаковым и равным некоторой величине  $p_n$ . Точно также, поскольку конечные точки всех простых трубопроводов тоже соединены вместе, то и полное давление в них тоже будет одинаковым для всех и равным некоторой величине  $p_k$ . Соответственно, разность этих давлений  $p_n - p_k = \Delta p$ ,

представляющая собой потери давления в каждом из простых трубопроводов, будет для каждого из них одной и той же.

При этом потери давления в каждом из простых трубопроводов связаны с расходами через них известным соотношением  $\Delta p_i = C_i Q_i^2$ , а  $\Delta p_i = \Delta p$ . Эти соотношения надо дополнить еще одним очевидным соотношением, выражающим тот факт, что сумма расходов через все простые трубопроводы, равна подводимому общему расходу  $Q = \sum Q_i$ .

В итоге для нахождения всех расходов через параллельно соединенные простые трубопроводы и потерь давления в каждом из них необходимо решить следующую систему уравнений, количество которых точно равно числу неизвестных:

$$\Delta p = C_1 Q_1^2; \Delta p = C_2 Q_2^2; \Delta p = C_i Q_i^2; \Delta p = C_n Q_n^2; Q_1 + Q_2 + \dots + Q_i + \dots + Q_n = Q.$$

В данной системе неизвестные  $Q_i$  и  $\Delta p$ ;

Проще всего эта система решается выражением всех неизвестных расходов через какой-либо один. Например, приравнявая правые части всех уравнений первому из них, нетрудно получить

$$Q_2 = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} Q_1, Q_3 = \sqrt{\frac{C_1}{C_3}} Q_1, Q_i = \sqrt{\frac{C_1}{C_i}} Q_1, Q_n = \sqrt{\frac{C_1}{C_n}} Q_1.$$

Затем, подставив эти соотношения в последнее уравнение системы и вынеся за скобки  $Q_1$ , получаем

$$\left( 1 + \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} + \sqrt{\frac{C_1}{C_3}} + \dots + \sqrt{\frac{C_1}{C_i}} + \dots + \sqrt{\frac{C_1}{C_n}} \right) Q_1 = Q.$$

Отсюда легко найти  $Q_1$ , а с использованием предыдущих соотношений и все остальные расходы.

Потери давления  $\Delta p$  в параллельном трубопроводе и в каждом из простых трубопроводов находятся из любого из соотношений исходной системы уравнений.

*Разветвленный* трубопровод представляет собой такое соединение простых трубопроводов, при котором у них имеется одна

(начальная) общая точка, то есть все их начальные точки соединяются между собой, а на выходе из конечных точек давления являются заданными и могут быть разными  $p_{ki}$ . Схема такого трубопровода представлена на рис. 2.14 и задачей его расчета является определение расходов и потерь давления в каждом из простых трубопроводов или, поскольку давление на выходе из простых трубопроводов задано, определение расходов в каждом из простых трубопроводов и значение начального давления в общей точке  $p_n$ .

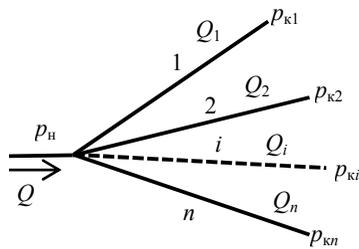


Рис. 2.14. Разветвленный трубопровод

Решение этой задачи также осуществляется на основе системы уравнений, каждое из которых определяет потери давления в каждом простом трубопроводе, а также отражает тот факт, что сумма расходов через все простые трубопроводы, равна подводимому общему расходу  $Q$ .

$$\Delta p_1 = p_n - p_{k1} = C_1 Q_1^2; \quad \Delta p_2 = p_n - p_{k2} = C_2 Q_2^2.$$

$$\Delta p_n = p_n - p_{kn} = C_n Q_n^2; \quad \Delta p_i = p_n - p_{ki} = C_i Q_i^2; \quad Q_1 + Q_2 + \dots + Q_i + \dots + Q_n = Q.$$

В данной системе неизвестные  $Q_i$  и  $p_n$ ;

Или, что тоже самое:

$$\Delta p_1 = p_n - p_{k1} = C_1 Q_1^2; \quad \Delta p_2 = p_n - p_{k2} = C_2 Q_2^2; \quad \Delta p_i = p_n - p_{ki} = C_i Q_i^2;$$

$$\Delta p_n = p_n - p_{kn} = C_n Q_n^2; \quad Q_1 + Q_2 + \dots + Q_i + \dots + Q_n = Q.$$

Эта система состоит из  $n + 1$  уравнения и содержит  $n + 1$  неизвестную ( $Q_i$  и  $p_n$ ) и достаточна для решения поставленной задачи.

Приведенные расчеты справедливы для горизонтально расположенных трубопроводов. Если начальные и конечные точки трубопроводов имеют разность уровней  $h$ , то при поднятии жидкости для преодоления силы тяжести необходимо затратить дополнительную мощность насоса  $N_g = \rho g h Q$ , а при спуске жидкости с высоты, наоборот, сила тяжести может обеспечить эту мощность, компенсируя часть потребной мощности насоса.

После изучения теории из 2 раздела необходимо ответить на следующие вопросы:

1. В каком отношении распределятся расходы по двум горизонтально расположенным, параллельно соединенным трубам разной длины, но с одинаковыми остальными характеристиками?

2. В каком отношении распределятся расходы в разветвленном трубопроводе, состоящем из горизонтально расположенных двух труб разной длины, но с одинаковыми остальными характеристиками и одинаковыми давлениями в конечной точке?

3. В каком отношении распределятся расходы по двум горизонтально расположенным, параллельно соединенным трубам одного диаметра, но разной длины, если режим течения жидкости в трубах ламинарный?

### 3. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

#### 3.1. Распространение малых возмущений в жидкостях и газах. Звук

Если имеются неподвижные жидкость или газ с равновесными значениями параметров, характеризующих их состояние: давлением  $p_0$ , плотностью  $\rho_0$ , температурой  $T_0$ , то любые отклонения от этих значений будем называть **возмущениями** и отмечать верхним индексом «штрих»:  $p'$ ,  $\rho'$ ,  $T'$ . При этом могут иметь место и возмущения скорости  $\vec{v}'$ . Таким образом, в возмущенной области

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad T = T_0 + T', \quad \vec{v} = \vec{v}'. \quad (3.1)$$

**Малыми возмущениями** будем называть такие возмущения, величина которых много меньше равновесных значений параметров состояния среды:  $p' \ll p_0$ ,  $\rho' \ll \rho_0$ ,  $T' \ll T_0$ , а возмущения скорости много меньше скорости звука:  $v' \ll v_{зв}$ .

В жидкостях и газах малые возмущения распространяются в виде волн, которые называются **звуковыми волнами**.

Таким образом, звуковые волны представляют собой совокупность распространяющихся колебаний давления, плотности, температуры и скорости частиц жидкости.

Наряду со звуковыми волнами в природе существуют и другие виды волн, отличающиеся физической природой колеблющихся в них величин.

Так, в электромагнитных волнах испытывают колебания векторы напряженности электрического и магнитного поля; в волнах на поверхности жидкости – колебания уровня (координаты) поверхности и скорости частиц жидкости и т. п.

Поскольку волна представляет собой периодические изменения физических величин как в пространстве, так и во времени, постольку эта периодичность характеризуется длиной волны  $\Lambda$  в пространстве и периодом колебаний  $T$  во времени. При этом отношение длины волны к периоду характеризует фазовую скорость волны,  $v_\phi = \Lambda/T$ . Наряду с этими величинами используют и такие волновые характеристики, как круговая частота  $\omega = 2\pi/T$  и волновое число  $k = 2\pi/\Lambda$ , через которые –  $v_\phi = \omega/k$ .

Также одной из характеристик волны является фаза колебаний.

Кроме того, одной из физических характеристик волны является амплитуда колебаний соответствующей физической величины.

Как известно, периодические процессы описываются функциями синус или косинус.

При этом функция  $\sin(kx - \omega t)$  описывает бегущую волну, а произведение  $\sin(kx) \cdot \sin(\omega t)$  – стоячую.

Таким образом, бегущая звуковая волна будет описываться следующими выражениями:

$$p' = p_a \sin(kx - \omega t), \quad \rho' = \rho_a \sin(kx - \omega t), \quad (3.2)$$

$$T' = T_a \sin(kx - \omega t), \quad v' = v_a \sin(kx - \omega t),$$

где  $p_a, \rho_a, T_a, v_a$  являются амплитудами колебаний соответствующих величин.

Важным является то, что колебания всех величин в звуковой волне, представленных в (3.2), являются взаимосвязанными, то есть изменение любой из них обязательно влечет за собой изменение и всех остальных. Таким образом, звуковая волна может быть возбуждена (генерирована) возмущением любой из этих величин. Чаще всего звуковые волны генерируются возмущениями давления в среде. Также звуковые волны чаще всего воспринимаются приемниками звука, например барабанной перепонкой уха человека, по изменению давления на нее.

Скорость звука  $v_{зв}$  определяется сжимаемостью среды  $dp/d\rho$  следующим образом:

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (3.3)$$

Для идеального газа она может быть вычислена с использованием соответствующих уравнений состояния.

Если считать процесс распространения звука изотермическим ( $T = \text{const}$ ), то из уравнения Клапейрона-Менделеева  $p = R\rho T$  получаем

$$v_{зв}^{из} = \sqrt{RT}. \quad (3.4)$$

Если процесс распространения звука адиабатический, то, используя уравнение адиабаты  $p = Cr^k$ , получаем  $dp/dr = kCr^{k-1} = kp/r$ .

Или с учетом уравнения Клапейрона-Менделеева  $dp/dr = kRT$ .

Таким образом, адиабатическая скорость звука равна

$$v_{зв}^{ад} = \sqrt{kRT}. \quad (3.5)$$

Именно это выражение в наибольшей степени соответствует реальной ситуации и будет использоваться в дальнейшем.

Волны, вообще, и звуковые волны, в частности, играют чрезвычайно важную роль в природных процессах. Именно волны являются основными переносчиками в пространстве информации о происходящих в природе процессах. Всякое изменение, происходящее в какой-либо точке пространства А, будет в состоянии оказать свое воздействие в другой точке Б только после того, как соответствующая волна (звуковая, электромагнитная, поверхностная и т. п.) перенесет в эту точку информацию об этом изменении с соответствующей ей скоростью, то есть через определенный промежуток времени, что иллюстрируется рис. 3.1.

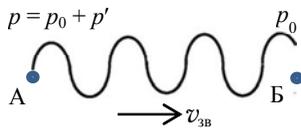


Рис. 3.1. Перенос информации звуковой волной

### 3.1.1. Связь между амплитудами параметров среды в звуковой волне

Прежде всего, установим связь между амплитудами колебаний давления и плотности в звуковой волне, в которой  $p = p(\rho) = p(\rho_0 + \rho')$ .

При малых возмущениях плотности эту функцию можно разложить в степенной ряд и с точностью до членов первого порядка записать:

$$p = p(\rho_0 + \rho') = p(\rho_0) + \frac{dp}{d\rho} \rho' = p_0 + v_{зв}^2 \rho'.$$

Учитывая, что  $p = p_0 + p'$ , видим, что  $p' = v_{зв}^2 \rho'$  или  $p_a = v_{зв}^2 \rho_a$ .

Аналогичным образом могут быть получены соотношения и между амплитудами колебаний других величин в следующем виде:

$$p_a = v_{зв}^2 \rho_a,$$

$$p_a = \rho_0 v_{зв} v_a;$$

$$\rho_a = (\rho_0 / v_{зв}) v_a.$$
(3.6)

### 3.1.2. Гидравлический удар

**Гидравлический удар** представляет собой звуковую волну, генерированную резким изменением скорости потока жидкости, например, при резком закрытии задвижки в трубе (рис. 3.2).

При резкой остановке потока, движущегося с некоторой скоростью  $v_0$ , скорость его изменяется от  $v_0$  до нуля, т. е. возникает возмущение скорости с амплитудой, сравнимой с этой скоростью,  $v_a \sim v_0$ .

Из (3.6)  $p_a = \rho_0 v_{зв} v_a$  и, например, при резкой остановке потока воды в трубе, движущегося со скоростью 1 м/с, при  $\rho_0 \sim 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $v_{зв} \sim 1,5 \cdot 10^3$  м/с и  $v_0 = 1$  м/с имеем величину давления в волне при гидравлическом ударе –  $p_a \sim 1,5 \cdot 10^6$  Па  $\sim 15$  атм. Такое давление может привести к разрушению трубопровода.

Для исключения гидравлического удара регулирование скорости потока жидкости должно происходить достаточно плавно.

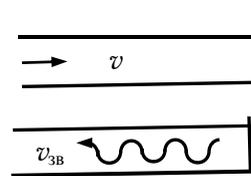


Рис. 3.2. Гидравлический удар

### 3.2. Основные уравнения одномерных течений сжимаемого газа

Как уже было сказано, основные особенности течений газов связаны с их хорошей сжимаемостью, то есть с заметной зависимостью их плотности от давления ( $\rho = \rho(p)$ ).

Для идеального газа эта зависимость определяется уравнением Клапейрона-Менделеева  $p = R\rho T$ , а также для адиабатных течений – уравнением адиабаты  $p = C\rho^k$ .

Относительно небольшие значения скорости звука в газах позволяют реализовать их течения со скоростями, даже превышающими скорость звука.

Течения газов со скоростями, превышающими скорость звука, будем называть **сверхзвуковыми**, а течения со скоростями меньше скорости звука – **дозвуковыми**.

При этом важной характеристикой газового потока является отношение его скорости  $v$  к скорости звука  $v_{зв}$ , называемое **числом Маха**:

$$M = \frac{v}{v_{зв}}. \quad (3.7)$$

Для дозвукового потока –  $M < 1$ , для сверхзвукового –  $M > 1$ .

Для скорости звука будем использовать полученное ранее выражение

$$v_{зв} = \sqrt{kRT}. \quad (3.8)$$

Уравнение неразрывности для газовых потоков сохраняет свой общий вид (1.2), (1.3) с учетом того, что плотность газа есть величина переменная:

$$\rho v S = \text{const}, \quad \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2.$$

Уравнение Бернулли для газовых потоков также сохраняет свой общий вид, но функция давления  $\mathcal{P}$  должна вычисляться для каждого термодинамического процесса отдельно:

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + gz = \text{const}, \quad \mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p)} dp. \quad (3.9)$$

Вследствие малой плотности газа действие силы тяжести на поток, как правило, не существенно. Поэтому последним слагаемым  $gz$  в уравнении Бернулли в дальнейшем будем пренебрегать.

а) Уравнение Бернулли для изотермического течения идеального газа.

$T = \text{const}$ . Необходимо вычислить функцию давления  $\mathcal{P}$

Из уравнения Клапейрона-Менделеева (при постоянной температуре)  $\rho/\rho_0 = p/p_0$  или  $\rho = (\rho_0 / p_0)p$ . Тогда

$$\mathcal{P} = \frac{p_0}{\rho_0} \int_{p_0}^p \frac{1}{p} dp = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0}. \quad (3.10)$$

Тогда уравнение Бернулли для изотермического потока газа примет следующий вид:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} = \text{const}. \quad (3.11)$$

б) Уравнение Бернулли для адиабатного течения идеального газа.

Уравнение адиабаты  $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^k$  или  $\rho = \left( \rho_0 / p_0^{\frac{1}{k}} \right) p^{\frac{1}{k}}$ .

Используя это уравнение, вычисление функции давления приводит к следующим результатам:

$$\mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho} dp = \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0} \int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{k}} dp = \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0} \frac{k}{k-1} \left( p^{\frac{k-1}{k}} - p_0^{\frac{k-1}{k}} \right) = \frac{k}{k-1} \left( \frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right).$$

При этом использовано следующее правило интегрирования:

$$\int x^n dx = x^{n+1} / (n+1).$$

Подставляя полученное соотношение для функции давления в уравнение Бернулли, получим его выражение для адиабатного течения идеального газа:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (3.12)$$

Учтем известные термодинамические соотношения:

$$\begin{aligned}
 k &= c_p / c_v, \quad c_p - c_v = R, \quad c_v = R / (k - 1), \\
 c_p &= Rk / (k - 1), \quad v_{3B} = \sqrt{kRT}, \\
 p &= R\rho T, \quad i = c_p T,
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

где  $c_p, c_v$  – удельные теплоемкости газа;

$i$  – удельная энтальпия газа.

Тогда уравнение Бернулли (3.12) можно записать также несколько в ином виде:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \text{const}, \\
 \text{б) } & \frac{v^2}{2} + \frac{v_{3B}^2}{k-1} = \text{const}, \\
 \text{в) } & \frac{v^2}{2} + c_p T = \frac{v^2}{2} + i = \text{const}.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

### 3.2.1. Адиабатически заторможенный газ

**Адиабатически заторможенным** будем называть газ, переведенный из состояния движения в состояние покоя адиабатическим образом.

Параметры заторможенного газа будем отмечать нижним индексом «0»:  $p_0, \rho_0, T_0, v_{3B0}$ .

Уравнение Бернулли позволяет установить связь между параметрами газа в потоке с параметрами заторможенного газа.

Запишем уравнение Бернулли в форме (3.14, а) для двух разных сечений потока, одно из которых находится в движущемся потоке ( $v \neq 0$ ), а второе – в заторможенном газе, где  $v_0 = 0$ :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT = \frac{k}{k-1} RT_0.$$

Разделим это уравнение на второе слагаемое слева  $-\frac{k}{k-1}RT$ .

$$\text{Получим } \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)v^2}{2kRT}.$$

$$\text{Но } kRT = v_{3B}^2. \text{ С учетом этого, } \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)v^2}{2v_{3B}^2}.$$

Принимая во внимание, что  $v/v_{3B} = M$ , окончательно получаем

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)}{2}M^2. \quad (3.15)$$

Из уравнений Клапейрона-Менделеева и адиабаты следует, что

$$\frac{p_0}{p} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{T_0}{T} \text{ и } \frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^k \text{ или } \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k-1} = \frac{T_0}{T}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\rho_0}{\rho} &= \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(1 + \frac{(k-1)}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \text{б) } \frac{p_0}{p} &= \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^k = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 + \frac{(k-1)}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \\ \text{в) } \frac{v_{3B0}}{v_{3B}} &= \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{(k-1)}{2}M^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Таким образом, уравнения (3.15) и (3.16) дают возможность определить параметры газа в потоке, характеризуемом числом Маха ( $M$ ), по известным параметрам заторможенного газа.

### 3.2.2. Критические значения параметров газа

**Критической точкой в потоке газа** будем называть точку, в которой скорость газа равна скорости звука ( $v = v_{3B}$ ), а число Маха, соответственно, равно единице ( $M = 1$ ).

Параметры газа в критической точке будем отмечать нижним индексом «звездочка, \*»: $p^*$ ,  $\rho^*$ ,  $T^*$ ,  $v_{3B}^*$ .

Связь между критическими параметрами газа и параметрами заторможенного газа получается из уравнений (3.15) и (3.16), если в них положить число Маха, равным единице,  $M = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \frac{T_0}{T^*} &= \frac{(k+1)}{2}, & \text{а) } \frac{T^*}{T_0} &= \frac{2}{k+1}, \\
 \text{б) } \frac{\rho_0}{\rho^*} &= \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}, & \text{б) } \frac{\rho^*}{\rho_0} &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \\
 \text{в) } \frac{p_0}{p^*} &= \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}, & \text{в) } \frac{p^*}{p_0} &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \\
 \text{г) } \frac{v_{3B0}}{v_{3B}^*} &= \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{г) } \frac{v_{3B}^*}{v_{3B0}} &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

### 3.2.3. Скоростной коэффициент

**Скоростным коэффициентом**  $\lambda$  называется отношение локальной скорости газа к общей критической скорости в потоке:  $\lambda = v/v^*$ .

Используя соотношения между скоростями звука газа в потоке, параметрами заторможенного газа и критическими параметрами (3.16, в) и (3.17, г):

$$\lambda = \frac{v}{v_{3B}^*} = \frac{v}{v_{3B}} \frac{v_{3B}}{v_{3B}^*} = M \frac{v_{3B}}{v_{3B0}} \frac{v_{3B0}}{v_{3B}^*},$$

получаем

$$\lambda = M \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}} = \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2} + \frac{1}{M^2}}}. \tag{3.18}$$

При  $M = 1 \lambda = 1$ .

При  $M = \infty \lambda_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ .

Соотношение (3.18) можно также записать в виде

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2} + \frac{1}{M^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2} + 1 + \frac{1}{M^2} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k+1}{2} + \frac{1}{M^2} - 1}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2}{k+1} \left( \frac{1}{M^2} - 1 \right)}}, \end{aligned}$$

из которого видно, что при  $M > 1 \lambda > 1$ ; а при  $M < 1 \lambda < 1$ .

То есть сверхзвуковое течение одновременно является и сверхкритическим, а дозвуковое – докритическим.

Из (3.18) можно получить и обратную зависимость  $M = M(\lambda)$ :

$$M = \frac{\sqrt{\frac{2}{k+1}}}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{k-1}{k+1}}}. \quad (3.19)$$

### 3.3. Истечение газа через отверстие в баке

Пусть в баке находится неподвижный газ с равновесными значениями параметров  $p_0, \rho_0, T_0, v_0 = 0$ , а давление в окружающей баке среде равно  $p$ , как изображено на рис. 3.3.

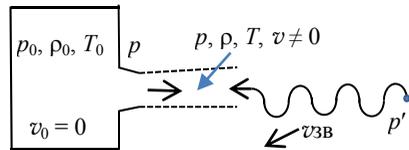


Рис. 3.3. Истечение газа из бака

Если в стенке бака открывается отверстие, а давление газа в баке больше, чем давление газа в окружающей его среде ( $p_0 > p$ ), то газ начнет вытекать струей через это отверстие с некоторой скоростью  $v$ . При достаточно большой скорости истечения теплообмен

между газом в струе и окружающим ее газом происходит не успевает и истечение газа можно считать процессом адиабатическим.

Определим эту скорость.

Чем больше размеры бака по сравнению с размерами отверстия, тем меньше скорость подтекания газа к отверстию внутри бака по сравнению со скоростью газа в струе, вытекающей через отверстие. Это легко объяснимо, если учесть, что при постоянном массовом расходе газа  $Q = \rho v S$  через поперечные сечения бака и струи площадь сечения бака и плотность газа в баке больше, чем в струе.

Примем, что размеры бака велики настолько, что скоростью течения газа в баке можно пренебречь по сравнению со скоростью газа в струе. В этом случае газ в баке может рассматриваться как адиабатически заторможенный по отношению к газу в вытекающей струе.

Запишем уравнение Бернулли для двух сечений рассматриваемого потока газа, одно из которых находится в струе, а другое – в баке:  $\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}$ , из которого легко получается выражение для скорости истечения газа в следующем виде:

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) \right]} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho} \right]}.$$

Давление и плотность газа связаны между собой уравнением адиабаты  $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^k$  либо  $\rho/\rho_0 = (p/p_0)^{\frac{1}{k}}$ . Используя его, окончательно получается соотношение для скорости истечения газа через отверстие в баке:

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}, \quad (3.20)$$

которое носит название **формулы Сен-Венана-Венцеля**.

Из этой формулы, в частности, следует, что при понижении давления в окружающей бак среде при том же давлении газа в баке,

скорость истечения газа возрастает и имеет максимальное значение  $v_{\text{макс}}$  при истечении газа в вакуум, при  $p = 0$ :

$$v_{\text{макс}} = v(p=0) = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} v_{\text{зв}0}. \quad (3.21)$$

Поскольку значение показателя адиабаты  $k$  больше единицы, то из этой формулы следует, что максимальное значение скорости больше скорости звука в заторможенном газе в баке.

С другой стороны, известно соотношение (3.17, з) между скоростью звука в заторможенном газе и скоростью звука в критической точке:  $v_{\text{зв}0} = \sqrt{\frac{k+1}{2}} v_{\text{зв}*}$ . С учетом этого  $v_{\text{макс}} = v(p=0) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} v_{\text{зв}*}$ .

Таким образом, согласно формуле Сен-Венана-Венцеля, максимальная скорость истечения газа может быть больше критической скорости звука ( $v_{\text{макс}} > v_{\text{зв}*}$ ).

Однако, этому препятствует возникающее при истечении газа явление запирания потока.

#### **Явление запирания потока**

возникает, когда при понижении внешнего давления скорость истечения газа на выходе из отверстия достигает скорости звука в струе, то есть на выходе из отверстия формируется критическая точка (рис. 3.4).

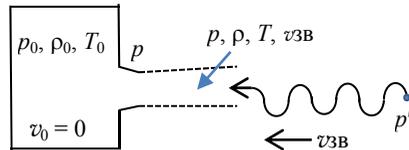


Рис. 3.4. Явление запирания потока газа

Примем во внимание, что все изменения (возмущения) параметров газа, происходящие во внешней среде, проникают в бак посредством звуковых волн со скоростью звука через отверстие в баке по вытекающей струе. Поэтому при движении самой струи со скоростью звука они будут полностью сноситься потоком струи и в бак не проникнут.

Таким образом, явление запирания потока заключается в том, что при скорости истечения струи, равной скорости звука в ней, газ в баке перестает реагировать на любые изменения давления во внешней среде.

Дальнейшее уменьшение внешнего давления не будет приводить к увеличению скорости истечения, как это следует из уравнения Сен-Венана-Венцеля. Соответственно, скорость истечения струи, равная скорости звука в ней, является максимально возможной, также как и массовый расход является максимально возможным.

Вычислим максимально возможный массовый расход газа через отверстие, используя полученные ранее соотношения между параметрами заторможенного газа и его критическими параметрами.

$$Q_{\text{макс}} = \rho_* v_* S,$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{макс}} &= \rho_* v_* S = \rho_0 \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} v_{\text{зв}0} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{2}} S = \\ &= \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \rho_0 \sqrt{kRT_0} S = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \rho_0 \sqrt{k \frac{p_0}{\rho_0}} S, \end{aligned}$$

$$Q_{\text{макс}} = \rho_* v_* S = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{k p_0 \rho_0} S. \quad (3.22)$$

Если графически изобразить зависимость скорости истечения газа от внешнего давления, как это сделано на рис. 3.5, то при понижении этого давления скорость истечения будет увеличиваться согласно уравнению Сен-Венана-Венцеля, но при достижении значения критической скорости звука дальнейший рост ее прекратится и скорость истечения останется равной этой величине.

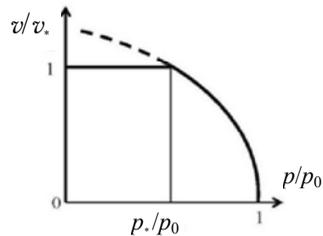


Рис. 3.5. Изменение скорости истечения газа при понижении внешнего давления.

Для воздуха  $p_*/p_0 = 0,528$

### 3.4. Движение газа в канале переменного сечения

Рассмотрим течение газа в канале переменного сечения, когда его площадь  $S$  является некоторой функцией продольной координаты  $x$ :  $S = S(x)$  (рис. 3.6).

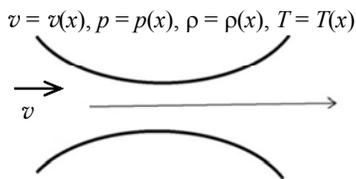


Рис. 3.6. Канал переменного сечения

В этом случае и все характеристики потока газа будут изменяться и являться функциями этой координаты.

В основу рассмотрения положим уравнение неразрывности и уравнение Бернулли:

$\rho v S = \text{const}$  – уравнение неразрывности,

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} = \text{const}, \quad \mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p)} dp \quad \text{– уравнение Бернулли.}$$

1) Продифференцируем по координате  $x$  уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dx} v S + \rho \frac{dv}{dx} S + \rho v \frac{dS}{dx} = 0.$$

Разделим полученное на  $\rho v S$ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = 0. \quad (3.23)$$

2) Продифференцируем по координате  $x$  уравнение Бернулли, используя известное правило дифференцирования сложных функций  $\frac{d}{dx} f[y(x)] = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$ . Тогда

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v^2}{2} \right) \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \mathcal{P}[p(x)] = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}.$$

В итоге

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0. \quad (3.24)$$

Учитывая, что  $\rho = \rho[p(x)]$ , имеем  $\frac{d\rho}{dx} = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dx} = v_{3B}^2 \frac{d\rho}{dx}$ .

После подстановки этого соотношения в уравнение (3.24), его можно записать в виде

$$v \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} v_{3B}^2 \frac{d\rho}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = -\frac{v}{v_{3B}^2} \frac{dv}{dx}. \quad (3.25)$$

С использованием этого соотношения уравнение (3.23) принимает вид

$$\begin{aligned} -\frac{v}{v_{3B}^2} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} &= \left( -\frac{v}{v_{3B}^2} + \frac{1}{v} \right) \frac{dv}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \\ &= \left( -\frac{v^2}{v_{3B}^2} + 1 \right) \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v/v_{3B} = M$ , и перенося второе слагаемое в правую часть, окончательно получаем

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{dx} = \frac{v}{S} \frac{dS}{dx} - \text{уравнение Гюгонио}, \quad (3.26)$$

анализ которого позволяет получить важные особенности течений газов.

### 3.4.1. Движение газа через диффузор

В этом случае в уравнении Гюгонио (3.26) правая часть больше нуля, значит, и левая часть должна быть больше нуля (рис. 3.7). В левой части стоят два множителя, которые должны иметь одинаковый знак.

а) Если  $M < 1$ , то  $(M^2 - 1) < 0$ . Значит и  $\frac{dv}{dx} < 0$ . То есть скорость газа уменьшается.

б) Если  $M > 1$ , то  $(M^2 - 1) > 0$ . Значит и  $\frac{dv}{dx} > 0$ . То есть скорость газа увеличивается.

Таким образом, при движении в диффузоре скорость дозвукового потока газа уменьшается, а сверхзвукового – увеличивается.

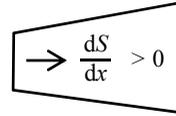


Рис. 3.7. Движение газа через диффузор

### 3.4.2. Движение газа через конфузор

В этом случае в уравнении Гюгонио (3.26) правая часть меньше нуля, значит, и левая часть должна быть меньше нуля (рис. 3.8). Тогда множители в левой части этого уравнения должны иметь разные знаки.

а) Если  $M < 1$ , то  $(M^2 - 1) < 0$ , и  $\frac{dv}{dx} > 0$ .

То есть скорость газа увеличивается.

б) Если  $M > 1$ , то  $(M^2 - 1) > 0$ . Значит  $\frac{dv}{dx} < 0$ . То есть скорость газа уменьшается.

Таким образом, при движении в конфузоре скорость дозвукового потока газа увеличивается, а сверхзвукового – уменьшается.

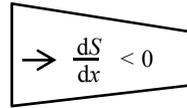


Рис. 3.8. Движение газа через конфузор

### 3.4.3. Условие перехода скорости газа через значение скорости звука

Если скорость газа становится равной скорости звука, то есть число Маха становится равным единице, то левая часть уравнения

Гюгонио (3.26) становится равной нулю. Это означает, что при этом и правая часть должна обращаться нулю. Это возможно только, когда  $\frac{dS}{dx} = 0$ . Точка, в которой производная функции обращается

в нуль, называется **точкой экстремума**, и в ней функция имеет или максимум, или минимум. Таким образом, из уравнения Гюгонио следует, что скорость газа может иметь значение, равное скорости звука только в экстремальном сечении потока.

Рассмотрим, может ли это иметь место в максимальном сечении канала (рис. 3.9), который в этом случае представляет собой сочетание диффузора и конфузора.

а) Если в такой канал входит дозвуковой поток, то скорость его в диффузоре уменьшается. Может ли она стать равной скорости звука на выходе из диффузорной части? Нет.

б) Если в такой канал входит сверхзвуковой поток, то скорость его в диффузоре еще больше увеличивается. Может ли она стать равной скорости звука на выходе из диффузорной части? Нет.

Рассмотрим, может ли это иметь место в минимальном сечении канала (рис. 3.10), который в этом случае представляет собой сочетание конфузора и диффузора.

а) Если в такой канал входит дозвуковой поток, то скорость его в конфузоре увеличивается. Может ли она стать равной скорости звука на выходе из конфузурной части? Да.

б) Если в такой канал входит сверхзвуковой поток, то скорость его в конфузуре уменьшается. Может ли она стать равной скорости звука на выходе из конфузурной части? Да.

Таким образом, скорость газа, имеющая значение, равное скорости звука, может иметь место только в минимальном сечении потока.

Получение газовых потоков с как можно большим значением скорости имеет определяющее значение для многих важных технических устройств, например, реактивных двигателей, газовых турбин и т. п.

В связи с этим необходимы устройства, обеспечивающие ускорение исходно создаваемых дозвуковых потоков до более высоких скоростей, в том числе сверхзвуковых.



Рис. 3.9. Канал с максимальным сечением

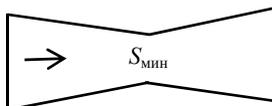


Рис. 3.10. Канал с минимальным сечением

Таким образом, устройство, преобразующее дозвуковой поток газа в сверхзвуковой, должно представлять собой канал, внутри которого скорость газового потока как минимум должна стать равной скорости звука.

Исходя из вышесказанного, такое устройство должно представлять собой сочетание конфузора и диффузора и иметь минимальное сечение при переходе из одного в другое.

В минимальном или критическом сечении параметры газа достигают своих критических значений.

Устройство такой конструкции, предназначенное для преобразования дозвукового потока газа в сверхзвуковой, носит название **сопло Лавалья** (рис. 3.11).

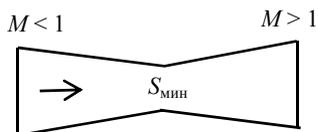


Рис. 3.11. Сопло Лавалья

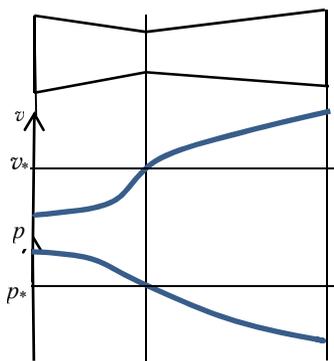


Рис. 3.12. Режим работы сопла Лавалья

Графически нормальный режим работы сопла Лавалья выглядит следующим образом (рис. 3.12).

В конфузоре дозвуковой поток газа должен ускоряться до значения скорости звука в минимальном сечении перед входом в диффузор и продолжить ускорение в диффузоре как сверхзвуковой поток.

При этом давление должно падать от выше критического на входе в конфузор до ниже критического на выходе из диффузора.

### 3.5. Распространение конечных возмущений в газе.

#### Ударная волна

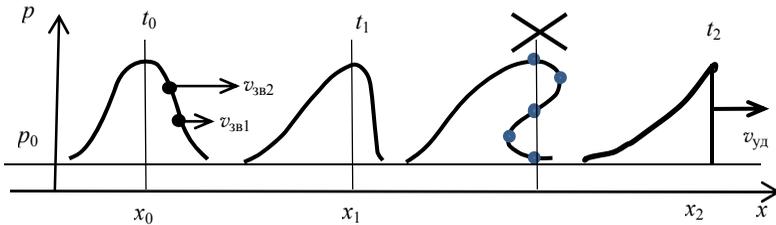
**Конечными возмущениями** будем называть такие возмущения, величина которых сравнима или больше равновесных значений параметров состояния среды:  $p' \sim p_0$ ,  $\rho' \sim \rho_0$ ,  $T' \sim T_0$ , а возмущения скорости сравнимы со скоростью звука  $v' \ll v_{зв}$ .

В таких ситуациях скорость их распространения, определяемая скоростью звука, будет зависеть от величины возмущения. А именно,  $v_{зв} = \sqrt{kRT}$ .

Из уравнений адиабаты и Клапейрона-Менделеева  $p \sim \rho^k$ ,  
 $p \sim \rho T$  или  $T \sim \rho^{k-1}$ ,  $T \sim p^{\frac{k-1}{k}}$ .

То есть  $v_{зв} \sim \sqrt{T} \sim \sqrt{\rho^{k-1}} \sim \sqrt{p^{\frac{k-1}{k}}}$  и чем больше температура, плотность или давление газа, тем больше скорость звука в нем.

Пусть в неподвижном равновесном газе с параметрами  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $T_0$  в начальный момент времени  $t_0$  в некоторой точке с координатой  $x_0$  возникает локальный импульс давления  $p$  (рис. 3.13). В точке  $x_0$  давление  $p$  становится больше, чем равновесное  $p_0$ , а по мере удаления от нее спадает до равновесного. Каждая точка этого импульса представляет собой возмущение давления, которое начинает распространяться в пространстве как звуковая волна.



3.13. Деформация формы конечного импульса давления при его распространении

Рассмотрим распространение этого импульса в целом, предполагая, что величина возмущений давления в нем является не малой, а конечной величиной. Область от максимума импульса в сторону его распространения будем называть **передним фронтом импульса**, а область от максимума в противоположную сторону – **задним фронтом**.

Будем считать, что каждая точка импульса распространяется с присущей ей локальной или местной скоростью звука. Чем выше располагается точка на фронте импульса, тем больше в ней давление и тем выше скорость ее распространения. Следовательно, при

распространении импульса конечного возмущения разные его точки движутся с разными скоростями. Очевидно, если при поступательном движении разные точки какого-либо объекта движутся с разными скоростями, то это должно приводить к деформации объекта, то есть к изменению его формы.

Таким образом, особенностью распространения импульса конечного возмущения является то, что по мере его распространения он деформируется и форма его изменяется.

Рассмотрим этот процесс более детально.

В процессе распространения переднего фронта импульса движущиеся с большей скоростью вышележащие точки (2) начинают догонять нижележащие точки (1). В результате этого в некоторый следующий момент времени  $t_1$ , когда максимум импульса переместится в новую точку  $x_1$ , передний фронт деформируется таким образом, что станет более крутым.

На заднем фронте вышележащие также точки будут обгонять нижележащие, но это приведет к тому, что форма его станет более полой.

Возможно ли возникновение такой ситуации, что в некоторый следующий момент времени  $t_2$  вышележащая точка 2 обгонит нижележащую точку 1 и импульс примет форму, изображенную на рисунке третьей по счету слева?

В природе волну такой формы можно, например, наблюдать у поверхностных волн на море при их набегании на берег (рис. 3.14). Вблизи берега начинает сказываться тормозящее влияние дна на прилегающие слои жидкости, и они начинают двигаться со скоростью, меньшей, чем вершина волны. Однако, у поверхностной волны такой график описывает зависимость координаты поверхности жидкости  $z$  от координаты  $x$  вдоль направления ее распространения.

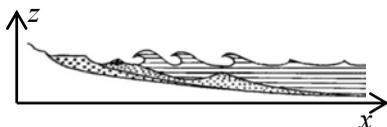


Рис. 3.14. Опрокидывание морской волны

В рассматриваемом случае мы имеем график зависимости давления в жидкости от этой координаты  $x$ . Такого вида график свидетельствует о том, что есть точки, в которых давление имеет три значения. Но это физически невозможно. Поэтому такой деформации переднего фронта волны давления быть не может, когда вышележащая точка на переднем фронте волны обгонит нижележащую. Предельно возможное деформирование этого фронта возможно только до тех пор, пока все вышележащие точки не догонят нижележащие и все они не расположатся на одной прямой. В этом случае этот график будет представлять собой разрывную функцию, а на переднем фронте волны возникнет разрыв или скачок давления. Действие такой волны будет восприниматься как удар, а соответствующая волна будет называться **ударной**.

Таким образом, при распространении конечного возмущения оно трансформируется в ударную волну. Примеры возникновения ударной волны показаны на рис. 3.15.



3.15. Примеры возникновения ударной волны *a* – при взрыве,  
*б* – при преодолении самолетом звукового барьера

Из вышеизложенного следует, что скачок давления возникает на переднем фронте импульса, когда давление при его прохождении повышается, то есть при уплотнении невозмущенного газа. В то же время задний фронт импульса, соответствующий понижению давления при его прохождении, становится все более пологим. Таким образом, можно констатировать, что скачок уплотнения может иметь место, а скачок разрежения – нет.

В рассмотренном случае плоскость скачка располагается перпендикулярно направлению его распространения. Такой скачок будем называть **прямым**, в отличие от также возможного **косого скачка**, когда плоскость скачка и направление его распространения не взаимоперпендикулярны.

Такой распространяющийся скачок уплотнения носит название **ударной волны**, а его местоположение будем называть **фронтом ударной волны**. За скачком уплотнения тоже имеет место движение газа, которое называется **спутным потоком**.

Скачок уплотнения может быть сформирован в результате возмущений в газе, вызванных резким началом движения поршня в трубе, которая в этом случае называется **ударной трубой** и широко используется в исследованиях ударных волн (рис. 3.16).

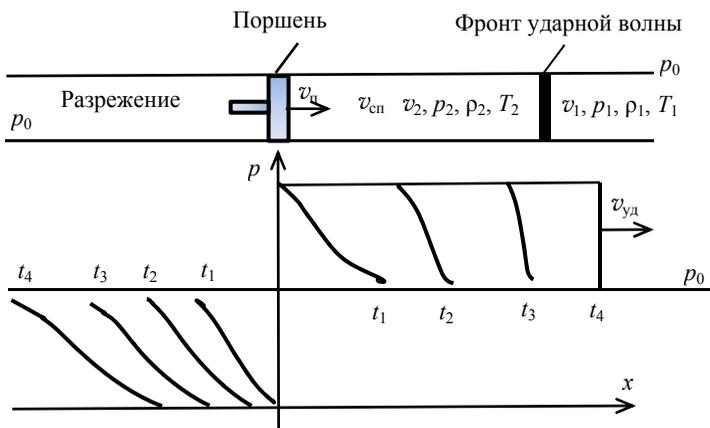


Рис. 3.16. Формирование ударной волны в ударной трубе

В системе координат, связанной с фронтом ударной волны, параметры газа перед фронтом будем отмечать нижним индексом 1, а за фронтом – нижним индексом 2. Таким образом,  $p_1, \rho_1, T_1$  равны значениям давления, плотности и температуры в среде, в которую происходит распространение ударной волны, а  $p_2, \rho_2, T_2$  – значениям этих величин за фронтом ударной волны. При этом  $v_1$  равна скорости ударной волны ( $v_1 = v_{уд}$ ), а скорость спутного потока равна  $v_{сп} = v_1 - v_2$  или  $v_2 = v_{уд} - v_{сп}$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае скачки параметров газа в ударной волне будут иметь следующий вид (рис. 3.17).

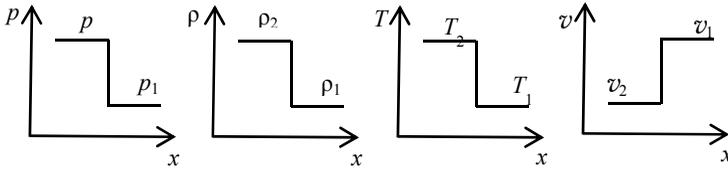


Рис. 3.17. Скачки параметров газа в ударной волне

Применим к газовому потоку перед и за фронтом ударной волны уравнения:

а) неразрывности:  $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$ ;

б) Бернулли:  $\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2}$ ; (3.27)

в) движения:  $\rho_2 v_2 \bar{v}_2 S_2 - \rho_1 v_1 \bar{v}_1 S_1 = \bar{F}$ .

Учитывая, что  $S_1 = S_2 = S$ ,  $\bar{F} = (p_1 - p_2)S$ , имеем в проекции на ось  $x$

а)  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ ,

б)  $v_2^2 - v_1^2 = \frac{2k}{k-1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)$ ; (3.28)

в)  $\rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2 = p_1 - p_2$ .

### 3.5.1. Уравнение ударной адиабаты

Установим соотношения между давлениями и плотностями газа в ударной волне.

Из (3.28, в) с учетом (3.28, а) имеем  $\rho_1 v_1 (v_2 - v_1) = p_1 - p_2$ .

Умножим это уравнение на  $\frac{v_1 + v_2}{\rho_1 v_1}$  и получим с учетом (3.28, а)

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{v_1 + v_2}{\rho_1 v_1} (p_1 - p_2) = \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_1 - p_2). \quad (3.29)$$

Сравнивая это выражение с (3.28, б), имеем

$$\frac{2k}{k-1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_1 - p_2).$$

Собирая вместе слагаемые с  $p_1$  и  $p_2$ , приходим к следующему соотношению:

$$p_1 \left( \frac{2k}{k-1} \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = p_2 \left( \frac{2k}{k-1} \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right),$$

или

$$p_1 \left( \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = p_2 \left( \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right),$$

или

$$p_1 \left( \frac{k+1}{k-1} \rho_2 - \rho_1 \right) = p_2 \left( \frac{k+1}{k-1} \rho_1 - \rho_2 \right).$$

Окончательно

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)\rho_2 - (k-1)\rho_1}{(k+1)\rho_1 - (k-1)\rho_2} = \frac{(k+1)\frac{\rho_2}{\rho_1} - (k-1)}{(k+1) - (k-1)\frac{\rho_2}{\rho_1}}. \quad (3.30)$$

Это уравнение может быть также разрешено относительно отношения плотностей:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1) + (k-1)\frac{\rho_1}{p_2}}{(k-1) + (k+1)\frac{\rho_1}{p_2}}. \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) носит название **уравнения ударной адиабаты** или **адиабаты Гюгонио** и связывает между собой отношение давлений и плотностей за и перед ударной волной, также как уравнение обычной изэнтропической адиабаты (адиабаты Пуассона)

$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k$  связывает эти величины в двух состояниях – в обычном адиабатическом процессе.

Принципиальным отличием ударной адиабаты является то, что рассматриваемые термодинамические состояния газа разделены скачками термодинамических величин, а не являются непрерывно изменяющимися, как обычно.

В силу этого, уравнение ударной адиабаты показывает, что отношение плотностей в ударной волне не может превышать некоторого

предельного значения  $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\text{макс}} = \frac{k+1}{k-1}$ , при котором знаменатель

этой формулы обращается в ноль, а давление  $p_2$  за фронтом ударной волны – в бесконечность (рис. 3.18). Таким образом, даже при бесконечно большом давлении в ударной волне плотность газа в ней остается конечной и не превышающей значения, определенного

формулой, приведенной выше. Для воздуха –  $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\text{макс}} = \frac{k+1}{k-1} = 6$ .

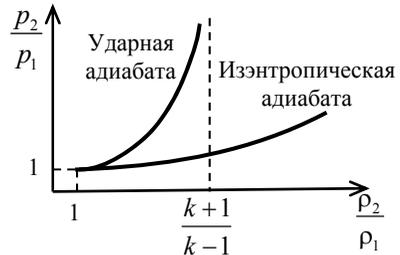


Рис. 3.18. Графики ударной и изэнтропической адиабат

### 3.5.2. Соотношения между скоростями газа за и перед фронтом ударной волны

Интенсивность ударной волны будем характеризовать отношением давления за ее фронтом  $p_2$  к давлению  $p_1$  перед фронтом, имеющему место в невозмущенном газе, в который волна распространяется,  $p_2/p_1$ .

Записав уравнение движения (3.28, в) в виде  $p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2$  и разделив его на уравнение (3.28, а)  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ , получим

$$\frac{p_1}{\rho_1 v_1} - \frac{p_2}{\rho_2 v_2} = v_2 - v_1. \quad (3.32)$$

Применив уравнение Бернулли к движущемуся и заторможенному ( $v_0 = 0$ ) состояниям газа, можно записать

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{kRT_0}{k-1} = \frac{v_{3B0}^2}{k-1}$$

и, используя соотношения между скоростями звука в заторможенном газе и в критической точке (3.17, з)  $\frac{v_{3B0}}{v_{3B*}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ , получаем

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k+1}{2(k-1)} v_*^2.$$

Применим это уравнение к состояниям газа перед и за фронтом ударной волны:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2(k-1)} v_*^2, \quad (3.33)$$

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2(k-1)} v_*^2.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2k} v_*^2 - \frac{k-1}{2k} v_1^2,$$

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2k} v_*^2 - \frac{k-1}{2k} v_2^2.$$

Подставив эти соотношения в (3.32)  $\frac{p_1}{\rho_1 v_1} - \frac{p_2}{\rho_2 v_2} = v_2 - v_1$  –

получим

$$\frac{k+1}{2k} \frac{v_*^2}{v_1} - \frac{k-1}{2k} v_1 - \frac{k+1}{2k} \frac{v_*^2}{v_2} + \frac{k-1}{2k} v_2 = v_2 - v_1,$$

или, группируя попарно слагаемые в левой части,

$$\frac{k+1}{2k} \frac{v_*^2}{v_1 v_2} (v_2 - v_1) + \frac{k-1}{2k} (v_2 - v_1) = v_2 - v_1.$$

Сокращая на  $(v_2 - v_1)$  и принимая во внимание, что  $\frac{k-1}{2k} - 1 = -\frac{k+1}{2k}$ , окончательно получаем  $v_1 v_2 = v_*^2$  или, используя определение скоростного коэффициента  $\lambda = v/v_*$ , приходим к формуле Прандтля

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1, \quad (3.34)$$

где  $\lambda_1 = v_1/v_*$ ,  $\lambda_2 = v_2/v_*$ .

Из (3.34) следует, что произведение скоростных коэффициентов перед и за фронтом ударной волны равно единице.

Поскольку скорость газа перед фронтом ударной волны больше, чем за ним ( $v_1 > v_2$ ), то и значение скоростного коэффициента перед фронтом больше, чем за ним ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ). Так как в соответствии с формулой Прандтля (3.34), произведение этих коэффициентов равно единице, значит больший из них должен быть больше единицы, а меньший – меньше, то есть  $\lambda_1 > 1$ , а  $\lambda_2 < 1$ .

Раньше формулой (3.18) было установлено, если скоростной коэффициент больше единицы, то, соответственно, больше единицы и число Маха ( $M = v/v_{зв}$ ). Таким образом, перед фронтом ударной волны  $\lambda_1 > 1$  и  $M_1 = v_1/v_{зв1} > 1$ , а за ним  $\lambda_2 < 1$  и  $M_2 = v_2/v_{зв2} < 1$ .

В результате, приходим к выводу, что движение газа перед фронтом ударной волны является сверхзвуковым и сверхкритическим, а за фронтом – дозвуковым и докритическим.

### 3.5.3. Соотношения для скачков параметров газа в ударной волне

Полученные выше выражения для скачков параметров газа в ударной волне можно выразить через число Маха:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \frac{p_2 - p_1}{p_1} &= \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1); \\
 \text{б) } \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} &= \frac{M_1^2 - 1}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}; \\
 \text{в) } \frac{T_2 - T_1}{T_1} &= \frac{2(k-1)}{(k+1)^2 M_1^2} (M_1^2 - 1) (1 + kM_1^2).
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

### 3.5.4. Скорость ударной волны

Величиной, характеризующей интенсивность ударной волны, является отношение давлений за ее фронтом и перед ним  $p_2/p_1$ .

Выражение для скорости ударной волны  $v_{уд}$  в зависимости от ее интенсивности  $p_2/p_1$  можно получить из соотношения для скачка давления (3.35, а), учитывая, что число Маха ( $M_1$ ) фактически представляет собой отношение скорости ударной волны ( $v_{уд}$ ) к скорости звука в невозмущенном газе ( $v_{зв1}$ ), в который распространяется ударная волна:  $M_1 = v_1/v_{зв1} = v_{уд}/v_{зв1}$ . Это выражение будет иметь вид

$$v_{уд} = \sqrt{1 + \frac{k+1}{2k} \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right)} v_{зв1}. \tag{3.36}$$

Поскольку  $p_2 > p_1$ , из (3.36) прежде всего, следует:

а) скорость ударной волны в газе всегда больше скорости звука в нем  $v_{уд} > v_{зв1}$ ;

б) при  $p_2/p_1 \rightarrow 1$  имеем  $v_{уд} \rightarrow v_{зв1}$ , то есть ударная волна малой интенсивности переходит в звуковую.

Ударные волны могут возникать в компрессорах турбомашин и холодильных установок и приводить к различным разрушениям, например, к поломкам лопаток турбины.

Актуальной задачей является снижение габаритов и уменьшение количества ступеней в высоконапорных компрессорах. В качестве альтернативы традиционным решениям предлагается использовать принципиально новое устройство – ударно-волновой (волновой) компрессор (УВК), сжатие в котором происходит в оптимальной системе бегущих ударных волн.

Ударные волны также могут возникать при кавитации в результате быстрого схлопывания пузырьков газа и приводить к повреждениям устройств.

В настоящее время ударные волны используются в медицине при так называемой ударно-волновой терапии.

## 4. ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

На тело, находящееся в потоке жидкости или газа, со стороны потока действует сила  $\vec{F}$  (рис. 4.1). Это же справедливо, если тело движется в жидкости или газе.

Проекцию этой силы на направление движения потока будем называть **силой лобового сопротивления**  $F_x$ , а проекцию на направление, перпендикулярное скорости потока – **подъемной силой**  $F_y$ .

Для описания этих сил используется их представление в отношении к динамическому давлению в жидкости  $\rho v^2/2$ , умноженному на характерную площадь их действия  $S$ :

$$F_x = C_x S \frac{\rho v^2}{2} - \text{сила лобового сопротивления}, \quad (4.1)$$

$$F_y = C_y S \frac{\rho v^2}{2} - \text{подъемная сила}.$$

Коэффициенты пропорциональности в этих выражениях называются соответственно **коэффициентом лобового сопротивления**  $C_x$  и **коэффициентом подъемной силы**  $C_y$ .

Характерная площадь  $S$  называется **площадью Миделева сечения** и представляет собой площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной направлению движения потока в том месте, где величина этой площади максимальна.

### 4.1. Сила лобового сопротивления

Физически сила лобового сопротивления обусловлена двумя факторами: 1) силами вязкого трения в жидкости  $F_{xt}$  и 2) силами давления  $F_{xd}$ , действующими на обтекаемое тело.

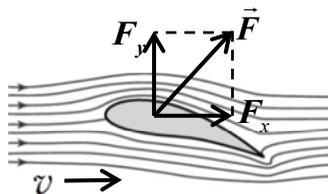


Рис. 4.1. Силы, действующие на тело в потоке

Соответственно силу лобового сопротивления можно представить как сумму этих сил  $F_x = F_{\text{хт}} + F_{\text{хд}}$ , а каждую из них представить в форме (1) и характеризовать соответствующим коэффициентом:

$$F_{\text{хт}} = C_{\text{хт}} S \frac{\rho v^2}{2}, \quad F_{\text{хд}} = C_{\text{хд}} S \frac{\rho v^2}{2},$$

где  $C_{\text{хт}}$  – коэффициент сопротивления трения;

$C_{\text{хд}}$  – коэффициент сопротивления давления.

Не трудно видеть, что полный коэффициент лобового сопротивления равен сумме коэффициентов сопротивления трения и давления:  $C_x = C_{\text{хт}} + C_{\text{хд}}$ .

Как уже было сказано, сила сопротивления трения определяется вязкими напряжениями на поверхности тела  $\vec{\tau}$  и суммированием их действия по всей поверхности тела  $S_{\text{тела}}$ :

$$F_{\text{хт}} = \int_{S_{\text{тела}}} \tau_x dS.$$

Силу сопротивления давления проще всего оценить, представив идеализированную картину обтекания пластины, расположенной перпендикулярно набегающему со скоростью  $v_0$  потоку (рис. 4.2).

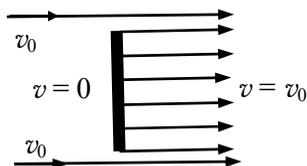


Рис. 4.2. Идеализированное обтекание пластины

Если представить, что перед пластиной поток полностью тормозится и его скорость равна нулю, а за пластиной продолжает двигаться с исходной скоростью  $v_0$ , то, как известно из уравнения Бернулли, в тех местах потока, где скорость меньше, там давление больше и наоборот. В силу этого давление на переднюю (лобовую) часть пластины будет больше, чем на заднюю (кормовую). Таким образом, на обтекаемых сторонах пластины создается перепад давления, который, будучи умноженным на площадь пластины  $S_{\text{пл}}$ , определит силу, действующую на пластину со стороны потока в направлении его движения, то есть силу лобового сопротивления пластины.

Уравнение Бернулли, записанное для сечений потока перед и за пластиной, будет выглядеть следующим образом:

$$p_1 = \frac{\rho v_0^2}{2} + p_2,$$

где  $p_1$  и  $p_2$  – давления в жидкости перед и за пластиной, соответственно.

Таким образом, на обтекаемых сторонах пластины создается перепад давления:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho v_0^2}{2},$$

а сила лобового сопротивления определится следующим образом:

$$F_{\text{хд}} = S_{\text{пл}} \frac{\rho v_0^2}{2}. \quad (4.2)$$

В этом случае коэффициент сопротивления давления максимален и равен единице.

Формула (4.2) может быть успешно использована во многих случаях для оценки силы сопротивления давления для разных тел. В реальности процесс обтекания пластины носит более сложный характер, изображенный на рис. 4.3, и этот коэффициент меньше единицы, но в любом случае скорость потока в лобовой части из-за торможения потока всегда меньше, чем в кормовой.



Рис. 4.3. Реальная картина обтекания пластины

Важным во всех случаях остается то, что сила сопротивления давления создается за счет перепадов давления на поверхности обтекаемого тела, обусловленных разностью скоростей потока в разных точках его поверхности.

Как показывает опыт, сила сопротивления давления в значительной степени зависит от формы тела и его ориентации в потоке. Если при обтекании тела большую часть силы лобового сопротив-

ления составляет сила сопротивления давления ( $C_{хд} > C_{хт}$ ), то такое тело называется **плохо-** или **неудобообтекаемым**. Примерами таких тел могут служить шар, цилиндр или пластина при ее поперечном обтекании.

**Хорошо-** или **удобообтекаемыми** телами называются такие, для которых сила сопротивления давления мала и большую часть лобового сопротивления составляет сопротивление трения ( $C_{хд} < C_{хт}$ ). К ним относятся пластина при продольном обтекании, крыло самолета, сигарообразные тела.

В реальности основной причиной возникновения разности скоростей в лобовой и кормовой частях тела на поверхности обтекаемого тела является образование вихревых зон за кормой обтекаемого тела из-за вязкости жидкости, как изображено на рис. 4.4.

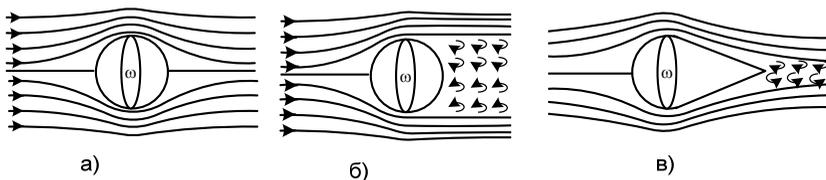


Рис. 4.4. Картина обтекания разных тел

Так, например, при обтекании шара потоком невязкой (идеальной) жидкости картина обтекания была бы симметричной в лобовой и кормовой его частях, как изображено рис. 4.4, а). В этом случае сила лобового сопротивления отсутствует, что противоречит реальности. Поэтому такое обтекание называется **парадоксом Даламбера**.

Однако в реальной вязкой жидкости картина обтекания шара выглядит далеко не симметричной. В лобовой части шара поток тормозится так, что в некоторой точке поверхности, называемой **передней критической точкой**, его скорость обращается в ноль и он разветвляется. В кормовой части происходит отрыв потока и образование вихревой зоны (рис. 4.4, б). Скорости потока в кормовой вихревой зоне больше, чем в лобовой и, соответственно, давление в ней меньше. Таким образом, кормовая вихревая зона представляет собой зону пониженного давления по сравнению с лобовой частью. Между лобовой и кормовой частями тела возникает

перепад давления, обуславливающий силу сопротивления давления, направленную вдоль потока (или против движения тела).

Сила сопротивления давления зависит от площади сечения вихревой зоны и **может быть уменьшена за счет ее уменьшения**. Это называется придать телу хорошо обтекаемую форму.

Придание телу хорошо обтекаемой формы заключается в таком изменении его формы (при той же площади Миделева сечения), при которой обтекание его является более плавным, безотрывным и ширина вихревой зоны будет минимальной. Эта цель, например, достигается приданием телу зауженной к корме сигарообразной формы (рис. 4.4, в). Примерно такую форму имеют фюзеляжи летательных аппаратов, крыло самолета и т. п.

## 4.2. Подъемная сила

Прежде всего зададимся вопросом, может ли иметь место подъемная сила, то есть сила, направление которой перпендикулярно скорости набегающего потока, при обтекании тела, симметричного относительно оси, совпадающей с направлением потока, как изображено на рис. 4.5?

Ответ достаточно очевиден, что нет. В противном случае направление этой силы было бы невозможно определить в силу симметрии ситуации. Поэтому подъемная сила возникает только при несимметричном обтекании тела (рис. 4.6).

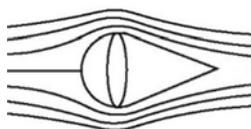


Рис. 4.5. Обтекание симметричного тела без возникновения подъемной силы



Рис. 4.6. Обтекание несимметричного тела с возникновением подъемной силы

При таком обтекании с более выпуклой поверхности тела происходит отрыв потока и за кормой тела образуются вихри (рис. 4.7), вращающиеся против часовой стрелки и создающие соответствующий суммарный момент импульса потока. Исходя из закона сохранения момента импульса, для компенсации этого момента вкрут

тела возникает большой вихрь с противоположным направлением вращения (в рассматриваемой ситуации по часовой стрелке). Линейная скорость этого вихря  $v_B$  накладывается на скорость набегающего потока так, что над более выпуклой частью тела их скорости складываются, а под менее выпуклой – вычитаются. Таким образом, скорость потока над более выпуклой частью обтекаемого тела становится больше, чем под менее выпуклой.

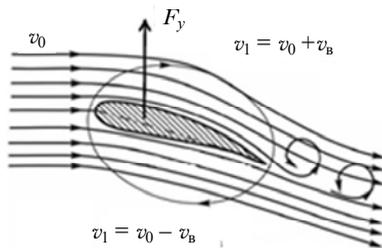


Рис. 4.7. Механизм возникновения подъемной силы

В соответствии с уравнением Бернулли там, где скорость потока больше, там давление – меньше. Таким образом, давление над более выпуклой частью обтекаемого тела становится меньше, чем под менее выпуклой. Эта разность давлений обеспечивает возникновение подъемной силы, действующей на обтекаемое тело.

### 4.3. Пограничный слой

При движении вязкой жидкости вдоль твердой поверхности имеет место прилипание жидкости к этой поверхности, в силу чего скорость жидкости на ней становится равной нулю (относительно поверхности). По мере удаления от твердой поверхности влияние этого эффекта и вязкости уменьшается и скорость жидкости увеличивается. Если поток набегаёт на твердую поверхность с некоторой скоростью  $v_0$ , то по мере удаления от поверхности скорость жидкости стремится к этому значению.

Типичные профили скорости при обтекании пластины вязкой жидкостью в разных точках вдоль пластины показаны на рис. 4.8.

Если на этих графиках отметить точки, где скорость набегающего потока по мере удаления от пла-

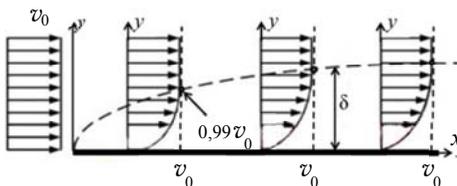


Рис. 4.8. Формирование пограничного слоя

стины достигает значения  $0,99v_0$ , и соединить их некоторой линией (пунктирная линия на рис. 4.8), то область между пластиной и этой линией представляет собой ту часть потока жидкости, в которой происходит практически полное изменение скорости потока от нуля до  $v_0$ , а вне этой области изменение скорости составляет менее одного процента. Эта область называется пограничным слоем вдоль обтекаемой поверхности.

Таким образом, **пограничный слой** – это область вблизи твердой поверхности, обтекаемой вязкой жидкостью, в пределах которой происходит основное изменение скорости набегающего потока от 0 до  $0,99$  скорости набегающего потока.

Расстояние от поверхности тела до границы пограничного слоя называется **толщиной пограничного слоя** и часто обозначается буквой  $\delta$ .

Толщина пограничного слоя зависит от числа Рейнольдса потока, в качестве характерного размера, в который входит продольный размер тела  $l$ :  $Re = v_0 l / \nu$ , и обратно пропорциональна корню квадратному из него:  $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$ .

#### **4.3.1. Отрыв пограничного слоя**

В силу кривизны обтекаемой поверхности давление на ней в обтекаемом ее потоке изменяется так, что его продольный градиент может быть как положительным, так и отрицательным (рис. 4.9). Так, например, в диффузорной части потока он замедляется, а давление вдоль поверхности увеличивается, как в любом диффузоре при дозвуковых течениях. Возникающее противодавление набегающему потоку наиболее сильно сказывается вблизи поверхности, где скорости потока из-за вязкого трения невелики. Поток у поверхности тормозится и при определенном значении этого противодавления у поверхности появляются возвратные течения. Началом их появления является такое изменение профиля скорости, при котором производная скорости по нормали к поверхности обращается в ноль. Накладываясь на основной поток, эти возвратные течения образуют вихри, которые сносятся с поверхности основным потоком. В результате происходит отрыв пограничного слоя от обтекаемой поверхности и образование вихревого следа за ней.

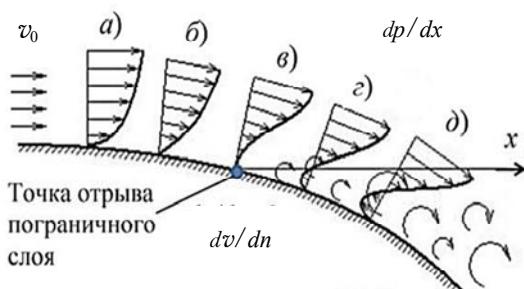


Рис. 4.9. Отрыв пограничного слоя

Точка на поверхности обтекаемого тела, после которой начинается образование вихревой зоны, называется **точкой отрыва пограничного слоя**.

Таким образом, при рассмотрении обтекания тел принимается следующая структура потока: 1) пограничный слой вблизи поверхности тела, 2) область потенциального (невязкого) течения вне пограничного слоя, 3) вихревой след за кормой тела (рис. 4.10).

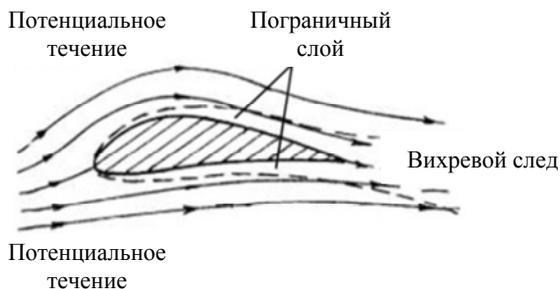


Рис. 4.10. Структура потока при обтекании тела

### 4.3.2. Обтекание шара при малых числах Рейнольдса. Формула Стокса

При малых числах Рейнольдса  $Re \sim 10$  реализуется плавное безотрывное обтекание и основное сопротивление шара составляет сила сопротивления трения.

Если шар радиуса  $R$  движется со скоростью  $v_0$  в жидкости с коэффициентом вязкости  $\eta$ , то для силы лобового сопротивления в этом случае имеет место формула Стокса:

$$F_x = 6\pi\eta Rv_0.$$

Сравнивая эту формулу с выражением для силы лобового сопротивления  $F_x = C_x S \frac{\rho v_0^2}{2}$ , при площади Миделева сечения шара  $S = \pi R^2$ , не трудно получить, что коэффициент лобового сопротивления выражается формулой  $C_x = \frac{24}{Re}$   $C_x = \frac{24}{Re}$ , где  $Re = \frac{v_0 d}{\nu}$ ,  $d = 2R$  есть диаметр шара, а  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости жидкости ( $\nu = \eta/\rho$ ). Это есть так называемый закон сопротивления шара при малых числа Рейнольдса.

### ***4.3.3. Обтекание шара при больших числах Рейнольдса***

В общем случае при увеличении числа Рейнольдса обтекание шара сопровождается формированием разнохарактерных вихревых зон за его кормой.

В первой зоне при  $0 < Re < 10^2$  обтекание происходит практически без отрыва пограничного слоя, и характер зависимости близок к той, которая дается формулой  $C_x = 24/Re$  (рис. 4.11). При этом коэффициент сопротивления уменьшается в силу того, что сила сопротивления в этой области становится пропорциональной первой степени скорости, а не ее квадрату.

Во второй зоне  $10^2 < Re < 4 \cdot 10^3$  за кормой шара формируется след за шаром, в виде расширяющейся вихревой зоны, в конце которой точка отрыва пограничного слоя  $S$  занимает положение, составляющее угол  $87^\circ$  с направлением потока. Коэффициент сопротивления замедляет свое снижение, а закон сопротивления приближается к квадратичному.

В третьей  $4 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^4$  и четвертой  $2 \cdot 10^4 < Re < 2 \cdot 10^5$  зонах сохраняется установившееся положение точки отрыва пограничного слоя, в силу чего коэффициент сопротивления практически не изменяется. Небольшое его увеличение в четвертой зоне связано

с начинающейся вдали от шара турбулизацией следа в точке  $T$ , которая с ростом числа Рейнольдса приближается к поверхности шара и сближается с точкой  $S$ .

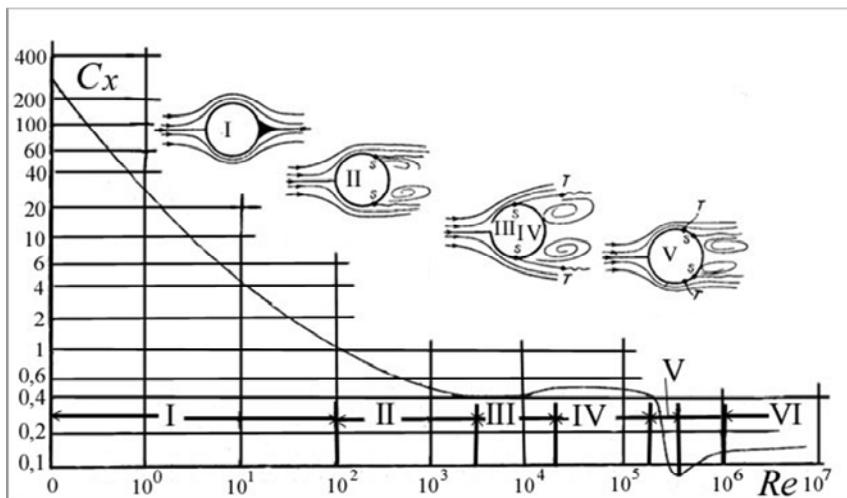


Рис. 4.11. Зависимость коэффициента лобового сопротивления шара  $C_x$  от числа Рейнольдса  $Re$

В начале пятой зоны при  $Re = 2 \cdot 10^5$  точка турбулизации следа  $T$  переходит на поверхность шара, смыкаясь с точкой  $S$ . Отрывающийся поток полностью становится турбулентным, точка его отрыва резко смещается в кормовую часть шара и занимает положение, составляющее угол  $110^\circ$  с направлением потока. При этом резко уменьшаются размеры вихревой зоны, что в диапазоне чисел Рейнольдса  $2 \cdot 10^5 < Re < 4 \cdot 10^5$  приводит к резкому уменьшению коэффициента сопротивления и резкому снижению лобового сопротивления шара. Это явление называется **кризисом сопротивления**.

Таким образом, кризис сопротивления связан с переходом ламинарного потока в турбулентный. Поэтому его можно инициировать специальными методами искусственной турбулизации потока, что применяется на практике для снижения сопротивления летательных аппаратов, а также при движении жидкостей в каналах.

#### 4.3.4. Эффект Магнуса

Эффект Магнуса заключается в возникновении подъемной силы при обтекании симметричного тела при его вращении. Например, при обтекании шара, вращающегося вокруг оси, перпендикулярной направлению скорости набегающего потока, как изображено на рис. 4.12, прилегающие к его поверхности слои жидкости за счет прилипания увлекаются во вращение и приобретают линейные скорости, которые в определенных местах складываются со скоростью набегающего потока, а в других местах – вычитаются. Таким образом, создаются разности скоростей на поверхности шара и соответствующие перепады давления в направлении, перпендикулярном скорости потока. В тех местах, где скорость потока больше, там давление меньше, и наоборот. Вызванная этим перепадом давления сила и является подъемной силой, действующей на вращающийся шар.

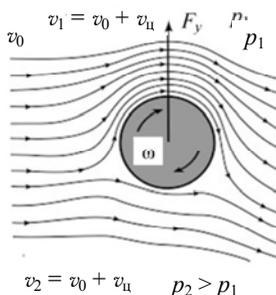


Рис. 4.12. Эффект Магнуса

Поскольку подъемная сила действует в направлении, перпендикулярном скорости потока или скорости движения тела, постольку она вызывает искривление траектории движущегося тела, что с успехом используется в спортивных состязаниях с круглыми мячами (футбол, теннис и т. п.) (рис. 4.13). Кроме того, вращающиеся цилиндры, обтекаемые ветром, теоретически могут являться заменой лопастям ветроэнергетических роторов, парусов судов и т. п.



Рис. 4.13. Искривление траектории движения футбольного мяча

#### 4.3.5. Качество крыла

Подъемная сила крыла самолета зависит не только от вида его профиля, но и от угла, под которым оно ориентировано в потоке, который называется углом атаки.

**Угол атаки  $\alpha$**  – угол между хордой крыла и направлением набегающего потока (рис. 4.14).

**Хорда крыла** – отрезок прямой на профиле крыла, соединяющий переднюю и заднюю точки контура профиля, которые можно определить как крайние точки касания контура плоскостями, перпендикулярными скорости набегающего потока.

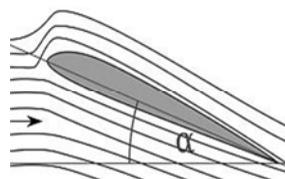


Рис. 4.14. Обтекание крыла

Как видно из рис. 4.15, коэффициент подъемной силы крыла  $C_y$  не равен нулю даже при нулевом угле атаки, увеличивается с его увеличением, но до определенного, примерно в 13 градусов, значения, после чего начинает уменьшаться.

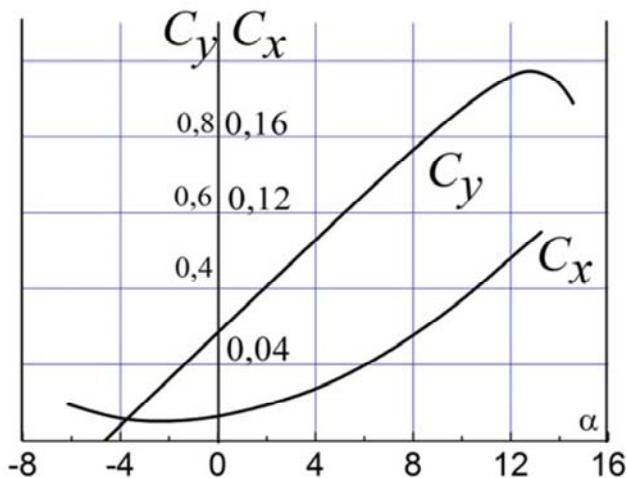


Рис. 4.15. Зависимость  $C_y$  и  $C_x$  от угла атаки  $\alpha$

При больших углах атаки уменьшение подъемной силы может привести, например, к сваливанию самолета в штопор, то есть к его неуправляемому движению по крутой нисходящей спирали с одновременным вращением вокруг всех трех его осей.

Положительная подъемная сила сохраняется и при некоторых отрицательных углах атаки, но до определенного предела (примерно минус 5 градусов на графиках рис. 4.15), после чего становится

отрицательной и самолет переходит в режим пикирования, выход из которого не всегда является успешным.

Аэродинамическое качество летательного аппарата характеризуется отношением его коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления  $K = C_y/C_x$  и чем это отношение больше, тем качество выше.

В более простом представлении, аэродинамическое качество можно оценивать как отношение расстояния, которое в состоянии пролететь летательный аппарат с некоторой высоты без двигателя, к этой высоте. Например, на планере качество обычно около 30, а на дельтаплане – 10. С высоты в 1 километр планер сможет пролететь в идеальных условиях приблизительно 30 км, а дельтаплан – около 10 км. У Боинга 737  $K = 15$ , Ту-134А~18,5.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Повх, И. Л. Техническая гидромеханика / И. Л. Повх. – Л.: Машиностроение, 1976. – 504 с.
2. Емцев, Б. Т. Техническая гидромеханика / Б. Т. Емцев. – М.: Машиностроение, 1987. – 440 с.
3. Дейч, М. Е. Гидрогазодинамика / М. Е. Дейч, А. Е. Зарянкин. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 384 с.

Учебное издание

**БАШТОВОЙ** Виктор Григорьевич  
**РЕКС** Александр Георгиевич

## **ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ**

Учебно-методическое пособие  
для студентов специальности  
1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии  
и энергетический менеджмент»

Редактор *Е. О. Германович*  
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 29.10.2021. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 4,42. Уч.-изд. л. 3,45. Тираж 100. Заказ 556.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.