МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Инженерная математика»

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-38 01 01 «Механические и электромеханические приборы
и аппараты»; 1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные приборы
и системы»; 1-38 02 02 «Биотехнические и медицинские аппараты
и системы»; 1-52 02 01 «Технология и оборудование ювелирного
производства»; 1-54 01 01-01 «Метрология, стандартизация
и сертификация (машиностроение и приборостроение)»

В 3 частях

Часть 1

*Рекомендовано учебно-методическими объединениями по образованию
в областях приборостроения и обеспечения качества*

Под редакцией М. А. Князева

Минск
БНТУ
2021

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7
М34

А в т о р ы:
Л. В. Бокуть, *Е. И. Гацкевич*,
И. В. Прусова, *Н. А. Кондратьева*

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра логистики и информационно-математических дисциплин УО «БИП – Университет права и социально-информационных технологий», зав. кафедрой *А. В. Остапенко*;
профессор кафедры физики УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»,
д-р физ.-мат. наук *В. Л. Малевич*

М34 **Математика:** учебно-методическое пособие для студентов специальностей 1-38 01 01 «Механические и электромеханические приборы и аппараты», 1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные приборы и системы», 1-38 02 02 «Биотехнические и медицинские аппараты и системы», 1-52 02 01 «Технология и оборудование ювелирного производства»; 1-54 01 01-01 «Метрология, стандартизация и сертификация (машиностроение и приборостроение)»: в 3 ч. / Л. В. Бокуть [и др.]; под ред. М. А. Князева. – Минск: БНТУ, 2021. – Ч. 1. – 60 с.
ISBN 978-985-583-676-7 (Ч. 1).

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной или заочной формы обучения при самостоятельном изучении дисциплины «Математика». В пособии содержатся материалы к тестированию по следующим темам: «Элементы линейной и векторной алгебры», «Аналитическая геометрия», «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-583-676-7 (Ч. 1)
ISBN 978-985-583-677-4

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для проведения письменного контроля знаний студентов очного и заочного отделений инженерных специальностей приборостроительного факультета БНТУ. Пособие включает контрольные вопросы и большой набор типовых задач по разделам дисциплины «Математика» первого семестра обучения. Содержит следующие темы: «Линейная и векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Пределы», «Производная и ее приложения».

Пособие может быть использовано при проведении практических занятий и проверочных контрольных работ.

Авторы ставили цель повысить уровень мотивации студентов при подготовке к экзаменам и зачетам по математике. Самостоятельное решение подобранных задач позволит осуществить первичное закрепление материала и систематизировать знания обучающихся.

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИКА»

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов:

– изучение материала по учебникам в печатном или электронном виде;

– решение задач;

– ответы на вопросы для самопроверки.

В помощь заочникам университет организует чтение лекций и практические занятия. Кроме этого студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь университета будет достаточно эффективной. Завершающим этапом изучения отдельных частей дисциплины «Математика» является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Чтение учебника

1. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, выполняя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и вычерчивая имеющиеся в учебнике чертежи.

2. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий курса, которые отражают количественную сторону или пространственные свойства реальных объектов и процессов и возникают в результате абстракции из этих свойств и процессов. Без этого невозможно успешное изучение математики. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п. На полях конспекта следует от-

мечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.

Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.
2. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать, а зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями.
3. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т. п.
4. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Консультации

Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации.

Лекции, практические занятия и лабораторные работы

Во время экзаменационно-лабораторных сессий для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Они носят преимущественно обзорный характер. Их цель – обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретического материала, привести факты из истории науки. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

Зачеты и экзамены

На экзаменах и зачетах выясняется, прежде всего, четкое усвоение всех теоретических и практических вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должно проделываться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть выполнена аккуратно и четко. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену учебный материал рекомендуется повторять по учебнику и конспекту.

2. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

2.1. Вопросы к экзамену

1. Матрицы, операции над ними. Определители 2-го и высших порядков; их вычисление. Обратная матрица. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера.

2. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.

3. Векторы в пространстве R^2, R^3, R^n. Операции над ними. Их свойства. Проекция вектора на ось. Направляющие косинусы. Длина вектора. Примеры использования понятия вектора (определение координат центра масс).

4. Скалярное произведение векторов, его свойства. Длина вектора, угол между векторами в координатной форме. Условие ортогональности. Механический смысл скалярного произведения. Векторное произведение, его свойства. Условие коллинеарности двух векторов.

5. Вычисление векторного произведения. Простейшие приложения векторного произведения.

6. Смешанное произведение векторов. Геометрический смысл определителя 3-го порядка. Условие компланарности.

7. Линейное (векторное) пространство. Скалярное произведение векторов. Евклидово пространство. Неравенство Коши – Буняковского. Ортогональный базис. Линейные операторы. Собственные значения и собственные векторы.

8. Свойство собственных значений и собственных векторов самосопряженного линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора, координат вектора при переходе к новому базису.

9. Виды уравнений прямой на плоскости.

10. Виды уравнений прямой и плоскости в пространстве.

11. Условия параллельности и перпендикулярности: а) прямых; б) плоскостей; в) прямой и плоскости.

12. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности и его свойства. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности.

13. Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Теоремы о пределах. Замечательные пределы. Предел монотонной функции.

14. Непрерывность функции в точке. Непрерывность основных элементарных функций. Непрерывность сложных и обратных функций.

15. Классификация точек разрыва.

16. Бесконечно малые и бесконечно большие величины, их свойства. Сравнение бесконечно малых. Символы «о» и «О».

17. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.

18. Понятие дифференцируемой функции в точке, производная функции, ее геометрический смысл. Правила дифференцирования. Дифференциал функции. Уравнение касательной и нормали к кривой.

19. Производная сложной и обратной функции. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Дифференцирование функций, заданных параметрически, неявно.

20. Точки экстремума функции. Теорема Ферма. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя.

21. Производная и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Представление

функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора в вычислительной математике.

22. Условия монотонности функции. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке. Исследование выпуклости функции, точки перегиба.

23. Асимптоты функции. Общая схема исследования функций.

2.2. Рекомендуемая литература

1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Введение в анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной: пособие / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2017. – 198 с.

2. Ряды. Теория функций комплексной переменной / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2016. – 94 с.

3. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / В. Г. Кротов [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2019. – 431 с.

4. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Дифференциальные уравнения : учебно-методическое пособие / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2018. – 188 с.

5. Дифференциальные операторы теории поля : учебно-методическое пособие / М. А. Князев [и др.]. – Минск : БНТУ, 2019. – 40 с.

6. Математика : практикум: в 4 ч. / сост. А. В. Метельский [и др.]. – Минск : БНТУ, 2018. – Ч. 4. – 156 с.

7. Матвеева, Л. Д. Математический анализ : учебно-методическое пособие / Л. Д. Матвеева, А. Н. Рудый. – Минск : БНТУ, 2016. – 129 с.

8. Лошкарева, С. Ю. Кратные интегралы. Ряды. Ряды Фурье : учебно-методическое пособие / С. Ю. Лошкарева, О. Б. Савченко, Л. В. Бань. – Минск : БНТУ, 2016. – 36 с.

9. Математика в примерах и задачах: учебно-методическое пособие: в 10 ч. / О. М. Королева [и др.]. – Минск : БНТУ, 2017. – Ч. 1: Элементы линейной алгебры. – 53 с.

10. Основы высшей математики: курс лекций : учебно-методическое пособие / Ю. А. Меленцова. – Екатеринбург : Изд-во Урал. унта, 2017. – 88 с.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

3.1. Контрольная работа № 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Задание 1.1.
Доказать совместность системы уравнений и решить ее:
а) по формулам Крамера;
б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 6; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6; \\ 5x_1 - 4x_2 - 7x_3 = 4; \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2; \\ 2x_1 - 2x_3 = -3; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9; \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 = 2; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 7x_2 - x_3 = 7; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -9; \\ -x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 13; \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -4; \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3; \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3; \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6; \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5; \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2; \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28; \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1; \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5; \end{cases}$

13 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11; \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -2; \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10; \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1; \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 1; \\ 5x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 4; \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 10; \\ -x_1 + 10x_2 - x_3 = 8; \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 18; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1; \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2; \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 13; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -1; \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 = -31; \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 17; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 17; \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -2; \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4; \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -5; \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -8; \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9; \end{cases}$

28. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 = -4; \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 12; \end{cases}$

30. $\begin{cases} 8x_1 - 15x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13; \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$

Задание 1.2.

Найти фундаментальную систему решений и записать общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений.

1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3-6x_4=0; \\ 4x_1-x_2-x_3-4x_4=0; \\ x_1+4x_2+3x_3-2x_4=0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-2x_4+4x_5=0; \\ 4x_1-2x_2+5x_3+x_4+7x_5=0; \\ 2x_1-x_2+x_3+8x_4+2x_5=0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} -x_1+x_4=0; \\ x_1+x_2-x_3-2x_4=0; \\ 2x_2-2x_3-3x_4=0; \\ x_2-x_3-x_4=0; \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3+x_4=0; \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=0; \\ -2x_1-x_2+7x_3+3x_4=0; \\ 4x_1+3x_2-x_3+5x_4=0; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0; \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0; \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0; \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0; \\ 3x_1-x_2-x_3=0; \\ 2x_1+3x_2+x_3=0; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0; \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0; \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0; \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0; \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0; \\ x_1+x_2-x_3-2x_4=0; \\ x_1+x_2-7x_3-11x_4=0; \\ x_1+x_2-9x_3-14x_4=0; \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2; \\ -2x_1-3x_2+2x_3-x_4=2; \\ x_1+3x_2-x_3+11x_4=-10; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+x_4=0; \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0; \\ 5x_1+x_2-x_4=0; \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3-2x_4=0; \\ x_1+x_2+2x_3-x_4=0; \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0; \\ 2x_1+x_2-2x_3=0; \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0; \\ x_1+x_2-x_3-2x_4=0; \\ x_1+x_2-7x_3-11x_4=0; \\ x_1+x_2-9x_3-14x_4=0; \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0; \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0; \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0; \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0; \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_2 - x_3 + 8x_4 = 0; \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0; \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0; \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 - 5x_5 = 0; \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 0; \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0; \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$

26. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 13x_3 - 4x_4 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

29. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 12x_4 = 0; \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 = 0; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

Задание 1.3.
По координатам точек A, B, C для указанных векторов найти:
а) модуль вектора $\overline{a}$;

б) скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

в) проекцию вектора $\overline{c}$ на вектор $\overline{d}$;

г) координаты точки M, делящей отрезок l в отношении $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

1. $A(1; 1; 1)$, $B(0; –2; 1)$, $C(–4; 1; 3)$
$\overline{a} = \overline{CB} - \overline{AC},\ \overline{b} = \overline{AB},\ \overline{c} = \overline{CB},\ \overline{d} = \overline{AC},\ l = AB,\ \alpha = 3,\ \beta = 4.$
2. $A(3; 3; 1)$, $B(–3; –4; 1)$, $C(1; 6; 3)$
$\overline{a} = \overline{AB} + \overline{CB},\ \overline{b} = \overline{AB},\ \overline{c} = \overline{AC},\ \overline{d} = \overline{CB},\ l = BC,\ \alpha = 2,\ \beta = 3.$
3. $A(–4; –4; 8)$, $B(1; 3; –2)$, $C(3; 12; 6)$
$\overline{a} = \overline{AC} + \overline{BA},\ \overline{b} = \overline{BC},\ \overline{c} = \overline{BC},\ \overline{d} = \overline{AC},\ l = BA,\ \alpha = 2,\ \beta = 1.$
4. $A(10; 1; –1)$, $B(–3; 2; 1)$, $C(3; 0; 3)$
$\overline{a} = \overline{BA} + \overline{AC},\ \overline{b} = \overline{BA},\ \overline{c} = \overline{b},\ \overline{d} = \overline{AC},\ l = BA,\ \alpha = 1,\ \beta = 3.$
5. $A(0; 2; 1)$, $B(5; 1; –3)$, $C(–4; –2; –1)$
$\overline{a} = \overline{AB} - \overline{AC},\ \overline{b} = \overline{BC},\ \overline{c} = \overline{b},\ \overline{d} = \overline{AB},\ l = AB,\ \alpha = 2,\ \beta = 3.$
6. $A(0; –2; 1)$, $B(0; –2; –1)$, $C(–3; 1; 3)$
$\overline{a} = \overline{AB} - \overline{AC},\ \overline{b} = \overline{BC},\ \overline{c} = \overline{b},\ \overline{d} = \overline{AB},\ l = AB,\ \alpha = 3,\ \beta = 2.$
7. $A(3; 5; 6)$, $B(2; –1; 4)$, $C(0; –1; 5)$
$\overline{a} = \overline{AC} - \overline{BC},\ \overline{c} = \overline{b} = \overline{AB},\ \overline{c} = \overline{AC},\ \overline{d} = \overline{AC},\ l = AC,\ \alpha = 1,\ \beta = 7.$
8. $A(1; 10; 1)$, $B(–2; 10; 3)$, $C(–2; 0; 0)$
$\overline{a} = \overline{AC} - \overline{CB},\ \overline{b} = \overline{c} = \overline{AC},\ \overline{d} = \overline{CB},\ l = AC,\ \alpha = 2,\ \beta = 1.$
9. $A(4; –1; 1)$, $B(–1; 1; 7)$, $C(–3; –5; 0)$
$\overline{a} = \overline{CB} - \overline{AC},\ \overline{b} = \overline{c} = \overline{BA},\ \overline{d} = \overline{AC},\ l = AB,\ \alpha = 5,\ \beta = 2.$
10. $A(3; –7; 1)$, $B(3; –1; 3)$, $C(–2; 8; 1)$
$\overline{a} = \overline{AB} + \overline{CB},\ \overline{b} = \overline{c} = \overline{AC},\ \overline{d} = \overline{AB},\ l = AC,\ \alpha = 3,\ \beta = 2.$
11. $A(–6; 1; 1)$, $B(0; –3; 6)$, $C(–10; 1; 3)$
$\overline{a} = \overline{AC} - \overline{BC},\ \overline{b} = \overline{c} = \overline{AB},\ \overline{d} = \overline{BC},\ l = AB,\ \alpha = 4,\ \beta = 2.$
12. $A(–4; –6; –8)$, $B(2; –4; 0)$, $C(3; 12; 15)$
$\overline{a} = \overline{AC} - \overline{BC},\ \overline{b} = \overline{c} = \overline{AB},\ \overline{d} = \overline{AC},\ l = BC,\ \alpha = 1,\ \beta = 3.$

13. $A(-6; 1; 0)$, $B(7; -1; 1)$, $C(-3; 3; -7)$

$\overline{a} = \overline{AB} - \overline{BC}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overline{AC}$, $\overline{d} = \overline{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

14. $A(10; 6; 3)$, $B(-6; 8; 10)$, $C(3; -4; -6)$

$\overline{a} = \overline{AC} - \overline{CB}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overline{BA}$, $\overline{d} = \overline{AC}$, $l = AC$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

15. $A(3; 2; 4)$, $B(-1; 2; 4)$, $C(2; -2; -1)$

$\overline{a} = \overline{AC} - \overline{BC}$, $\overline{b} = \overline{AB}$, $\overline{c} = \overline{AC}$, $\overline{d} = \overline{BC}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.

16. $A(1; -6; 1)$, $B(0; 9; 3)$, $C(3; -2; 3)$

$\overline{a} = \overline{AC} - \overline{CB}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overline{AB}$, $\overline{d} = \overline{CB}$, $l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

17. $A(1; 3; -1)$, $B(8; -2; 10)$, $C(6; -1; -3)$

$\overline{a} = \overline{AC} - \overline{BC}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overline{AC}$, $\overline{d} = \overline{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 5$, $\beta = 1$.

18. $A(4; 5; 3)$, $B(-3; 4; 3)$, $C(7; -4; 0)$

$\overline{a} = \overline{AC} - \overline{BC}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overline{CA}$, $\overline{d} = \overline{BA}$, $l = BC$, $\alpha = 5$, $\beta = 3$.

19. $A(8; 1; -9)$, $B(10; -2; 1)$, $C(11; 1; -3)$

$\overline{a} = \overline{BA} + \overline{BC}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overline{AC}$, $\overline{d} = \overline{BC}$, $l = BA$, $\alpha = 4$, $\beta = 3$.

20. $A(2; 3; 6)$, $B(-2; 5; 1)$, $C(7; -3; -8)$

$\overline{a} = \overline{BC} + \overline{BA}$, $\overline{b} = \overline{BC}$, $\overline{c} = \overline{AB}$, $\overline{d} = \overline{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

21. A(13; 1; –1), B(–6; 0; 1), C(2; 2; 11)

$\overline{a} = \overline{BC} + \overline{CA}$, $\overline{b} = \overline{BA}$, $\overline{c} = \overline{CA}$, $\overline{d} = \overline{BC}$, $l = BA$, $\alpha = 5$, $\beta = 3$.

22. $A(3; 4; 7)$, $B(-2; 6; 4)$, $C(7; -2; -3)$

$\overline{a} = \overline{BC} + \overline{CA}$, $\overline{b} = \overline{BA}$, $\overline{c} = \overline{CA}$, $\overline{d} = \overline{BC}$, $l = BA$, $\alpha = 3$, $\beta = 5$.

23. $A(1; 1; -3)$, $B(-3; -5; 0)$, $C(-2; 2; 4)$

$\overline{a} = \overline{AC} + \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overline{BC}$, $\overline{d} = \overline{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

24. $A(4; 2; 4)$, $B(-1; 4; -3)$, $C(3; -1; -1{,}5)$

$\overline{a} = \overline{AC} + \overline{CB}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overline{AB}$, $\overline{d} = \overline{CB}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

25. $A(2; 7; -4)$, $B(-4; 3; 2)$, $C(4; 5; 2)$

$\overline{a} = \overline{BC} + \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overline{CA}$, $\overline{d} = \overline{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

26. $A(-2; 2; -1)$, $B(-3; 1; 3)$, $C(0; -2; -1)$

$\overline{a} = \overline{CB} - \overline{AC}$, $\overline{b} = \overline{AB}$, $\overline{c} = \overline{CB}$, $\overline{d} = \overline{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

27. $A(-8; 1; 4)$, $B(7; -2; 1)$, $C(-10; 7; 5)$

$\overline{a} = \overline{AB} - \overline{CB}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overline{AC}$, $\overline{d} = \overline{CB}$, $l = BC$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$.

28. $A(9; 1; -8)$, $B(-1; 1; 7)$, $C(4; -1; 1)$
$\overline{a} = \overline{AC} - \overline{BA}$, $\overline{b} = \overline{CB}$, $\overline{c} = \overline{BA}$, $\overline{d} = \overline{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 4$, $\beta = 3$.
29. $A(1; 3; 2)$, $B(6; 12; 3)$, $C(2; 6; 4)$
$\overline{a} = \overline{BA} - \overline{AC}$, $\overline{b} = \overline{AB}$, $\overline{c} = \overline{BA}$, $\overline{d} = \overline{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.
30. $A(5; -2; -1)$, $B(-4; 1; -3)$, $C(5; -1; 1)$
$\overline{a} = \overline{AB} - \overline{AC}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overline{BC}$, $\overline{d} = \overline{AB}$, $l = AB$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

Задание 1.4.

Даны векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Необходимо:

а) найти модуль векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

б) проверить, будут ли коллинеарны векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и проверить, будут ли они компланарны.

1. $\overline{a} = 3\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{c} = -\overline{i} + 5\overline{j}$;
2. $\overline{a} = -14\overline{i} + 4\overline{j}$, $\overline{b} = 4\overline{i} - 12\overline{j} + 8\overline{k}$, $\overline{c} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 4\overline{k}$;
3. $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 9\overline{k}$;
4. $\overline{a} = -9\overline{i} - 3\overline{j} - 15\overline{k}$, $\overline{b} = 6\overline{i} - 12\overline{j} + 24\overline{k}$, $\overline{c} = 9\overline{i} + 21\overline{j} - 3\overline{k}$;
5. $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{c} = 7\overline{i} - 9\overline{j} - \overline{k}$;
6. $\overline{a} = 18\overline{i} - 6\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} - 15\overline{j} + 21\overline{k}$, $\overline{c} = 2\overline{i} - 5\overline{j} + 7\overline{k}$;
7. $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{c} = 8\overline{i} - \overline{j} - 7\overline{k}$;
8. $\overline{a} = -10\overline{i} + 4\overline{j} - 4\overline{k}$, $\overline{b} = 14\overline{i} - 10\overline{k}$, $\overline{c} = 4\overline{i} + 6\overline{j} - 4\overline{k}$;
9. $\overline{a} = \overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{c} = -3\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$;
10. $\overline{a} = 21\overline{i} - 12\overline{j} - 5\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 11\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{c} = 5\overline{i} + 5\overline{j} + 3\overline{k}$;
11. $\overline{a} = 4\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{b} = 6\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{c} = 9\overline{i} + \overline{j} - 5\overline{k}$;
12. $\overline{a} = -6\overline{i} + 4\overline{j} + 14\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 10\overline{k}$, $\overline{c} = 12\overline{i} + 8\overline{j} - \overline{k}$;
13. $\overline{a} = 8\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = 6\overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k}$, $\overline{c} = -2\overline{i} + 10\overline{j}$;
14. $\overline{a} = -3\overline{i} + 15\overline{k}$, $\overline{b} = -9\overline{i} + 6\overline{j} + 6\overline{k}$, $\overline{c} = -6\overline{i} - 12\overline{j} + 3\overline{k}$;
15. $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - \overline{j}$, $\overline{c} = 6\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k}$;
16. $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - \overline{j}$, $\overline{c} = 6\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k}$;
17. $\overline{a} = 8\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k}$, $\overline{b} = 4\overline{i} + 6\overline{j} - 10\overline{k}$, $\overline{c} = 14\overline{i} + 4\overline{j} + 8\overline{k}$;

18. $\overline{a}=2\overline{i}-2\overline{j}+4\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}+3\overline{j}-2\overline{k}$, $\overline{c}=5\overline{i}+7\overline{j}-2\overline{k}$;

19. $\overline{a}=8\overline{i}-28\overline{j}+20\overline{k}$, $\overline{b}=-4\overline{i}+8\overline{j}-24\overline{k}$, $\overline{c}=12\overline{i}+8\overline{j}-16\overline{k}$;

20. $\overline{a}=3\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{c}=5\overline{i}+5\overline{k}$;

21. $\overline{a}=-3\overline{i}+8\overline{j}$, $\overline{b}=4\overline{i}+6\overline{j}-4\overline{k}$, $\overline{c}=8\overline{i}+12\overline{j}-8\overline{k}$;

22. $\overline{a}=3\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{b}=4\overline{i}+3\overline{j}-2\overline{k}$, $\overline{c}=\overline{i}+\overline{k}$;

23. $\overline{a}=10\overline{i}-3\overline{j}+4\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-4\overline{j}-2\overline{k}$, $\overline{c}=6\overline{i}+10\overline{j}-14\overline{k}$;

24. $\overline{a}=2\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=3\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{c}=-5\overline{i}-4\overline{k}$;

25. $\overline{a}=-4\overline{i}+8\overline{j}-6\overline{k}$, $\overline{b}=5\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}$, $\overline{c}=7\overline{i}+4\overline{j}-\overline{k}$;

26. $\overline{a}=-2\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{c}=-\overline{i}+8\overline{j}+\overline{k}$;

27. $\overline{a}=3\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}-2\overline{j}+7\overline{k}$, $\overline{c}=3\overline{i}-6\overline{j}+21\overline{k}$;

28. $\overline{a}=3\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-4\overline{j}+6\overline{k}$, $\overline{c}=10\overline{i}+2\overline{k}$;

29. $\overline{a}=4\overline{i}-5\overline{j}-4\overline{k}$, $\overline{b}=10\overline{i}-\overline{j}$, $\overline{c}=2\overline{i}+4\overline{j}-3\overline{k}$;

30. $\overline{a}=\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{c}=6\overline{i}-21\overline{j}+30\overline{k}$.

Задание 1.5.

Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ и $A_4(x_4, y_4, z_4)$.

Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$;

б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Вычислить синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Вариант	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1, 1, 3	–1, –1, –2	1, –3, –3	1, 2, –1
2	1, –3, –4	2, 1, 5	1, 1, 4	1, 1, –1
3	2, 2, 1	4, –2, 9	–1, 2, –2	1, 1, –1
4	5, 2, –2	–1, –2, –1	–1, 2, 1	2, 3, –1
5	–4, 2, –6	1, –2, 1	–1, 2, 3	3, 1, –1
6	1, –1, 1	4, –2, 2	–1, 3, 2	–1, 1, –2
7	5, –1, 9	2, –2, 4	3, 1, 7	3, –2, –2

8	–2, 1, –1	2, –2, 2	3, 1, 4	1, –1, –2
9	–3, 1, 2	1, –4, –5	3, 1, 4	2, –3, –2
10	–4, 1, –7	2, –3, 3	3, 1, 7	1, –2, 3
11	–3, 1, –1	6, –4, 7	3, 1, 1	–2, 3, 1
12	–3, –1, –3	4, 1, 7	3, 1, 6	–2, 3, 1
13	–3, –1, –3	–1, 1, 2	3, 1, 8	–2, 2, –1
14	4, –1, 1	3, 1, 2	–3, –2, –2	1, 3, –1
15	1, –1, 12	–2, 1, –7	–1, –1, 2	1, 3, –1
16	2, 1, 1	–2, 3, –6	–1, 3, –5	3, 5, –2
17	–1, 3, 7	2, –3, 1	2, 1, 9	2, 1, –3
18	–2, 7, 25	2, 1, 13	2, –3, –3	–1, 1, –3
19	–2, 3, 4	–3, 1, 1	2, 5, 10	2, 1, –3
20	–2, –2, –4	3, 1, 8	4, –5, 6	5, 2, 3
21	1, –2, 3	4, 1, 12	4, –5, 9	3, 2, –1
22	–2, 1, –1	2, –1, 4	4, –3, 7	–1, 2, –5
23	–3, 2, –2	–2, 1, –1	2, 2, 1	–1, 2, –5
24	–3, 2, 1	–2, 1, 0	–2, –2, –2	–7, 3, –2
25	–5, –2, 2	–2, 1, –1	2, 2, –3	2, 4, –2
26	–1, –2, 10	–2, 1, 6	3, –1, –13	2, 1, –2
27	–3, 2, 7	–1, –4, –1	3, –1, –7	3, 1, –2
28	–5, –2, –7	–2, 1, 1	2, 2, –5	2, 3, –2
29	–3, 2, 5	–1, 3, 3	3, –1, –5	–2, 1, –1
30	3, –2, –2	–1, 3, 1	4, –1, –2	–2, 5, –1

Задание 1.6.

Решить следующие задачи:

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2; –3; –4)$ и $N(2; 3; –1)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(2; –2; –1)$ и $B(3; 2; –1)$.

2. Написать каноническое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 0; \\ 4x - y - 5z + 6 = 0. \end{cases}$$

3. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(–2; 7; 3)$ параллельно плоскости $x – 4y + 5z – 1 = 0$.

4. Проверить, лежат ли точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 3; 0)$ и $D(5; 0; -6)$ в одной плоскости.

5. Написать каноническое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} x + 3y - z + 7 = 0; \\ 2x - 5y + 3z - 15 = 0. \end{cases}$$

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1; 3; -4)$ и $N(-2; 2; -3)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(4; -2; 1)$ и $B(-3; 2; -1)$.

7. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2; 1; -1)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

8. Написать каноническое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0; \\ 4x - y - 4z + 6 = 0. \end{cases}$$

9. Проверить, лежат ли точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 3; 0)$ и $D(1; -2; 1)$ в одной плоскости.

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1; 5; 6)$, $M_2(-1; 7; 10)$.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1; -3; -2)$ и $N(-1; 2; -3)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(1; -2; 1)$ и $B(-2; 2; -1)$.

12. Написать каноническое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} 3x - y - 4z + 3 = 0; \\ 5x - y + 4z + 9 = 0. \end{cases}$$

13. Проверить, лежат ли точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 3; 0)$ и $D(1; -2; 4{,}5)$ в одной плоскости.

14. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2; -1; 1)$ параллельно плоскости $x + 4y + 2z + 5 = 0$.

15. Написать каноническое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} x - y - 4z - 4 = 0; \\ 5x - y + 4z - 12 = 0. \end{cases}$$

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2; -3; 1)$ и $N(-1; 3; -2)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(-1; 1; 3)$ и $B(-1; -2; 1)$.

17. Определить, при каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x - 3y + 2z + 5 = 0$ будут перпендикулярны.

18. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$ параллельно плоскости $x + 4y - 2z + 3 = 0$.

19. Написать каноническое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 4z + 6 = 0; \\ 3x + y + 4z - 13 = 0. \end{cases}$$

20. Лежат ли точки A, B, C, D в одной плоскости, если $A(1; 6; -2)$, $B(0; 9; -4)$, $C(3; 8; -2)$, $D(4; 5; 0)$?

21. Написать каноническое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 2z = 0; \\ x + 3y - 4z - 15 = 0. \end{cases}$$

22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(3; -3; 1)$ и $N(-1; 3; -5)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(-4, 1, 3)$ и $B(-1; -2; 1)$.

23. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(1; -1; 3)$ параллельно плоскости $2x + 4y - 2z + 3 = 0$.

24. Написать каноническое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z + 1 = 0; \\ x - 2y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

25. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 5; -1)$, $B(-3; 1; 3)$ параллельно оси Oy.

26. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(4; -7; 2)$ перпендикулярно плоскости α: $-3x + 2y = 4$.

27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(-3; 5; 1)$ и $N(-1; -3; -5)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(-4, -1, 3)$ и $B(-1; -2; 5)$.

28. Написать каноническое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z - 13 = 0; \\ 2x - 3y - 4z + 6 = 0. \end{cases}$$

29. Найти расстояние от точки $M(2; 0; -0{,}5)$ до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

30. Написать каноническое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} 3x + 3y - 2z - 7 = 0; \\ x + 5y - 4z - 7 = 0. \end{cases}$$

Задание 1.7.

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y + 13 = 0$ и $4x + 2y + 2 = 0$ перпендикулярно первой прямой.

2. Найти проекцию точки $A(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2; -3)$ и $C(-5; 1)$.

3. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция, если $A(3; 6)$, $B(5; 2)$, $C(-1; -3)$, $D(-5; 5)$.

4. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; 1)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(2; 5)$, $C(1; 0)$.

5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 2)$ параллельно прямой MN, если $M(-3; -2)$, $N(1; 6)$.

6. Найти проекцию точки $A(8; 5)$ на прямую, проходящую через точки $B(-2; -5)$ и $C(-5; 1)$.

7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y - 19 = 0$ и $4x + 2y - 14 = 0$ перпендикулярно второй прямой.

8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 2)$ параллельно прямой MN, если $M(-3; -2)$, $N(1; 6)$.

9. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 2)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(3; 5)$, $C(1; -1)$.

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 5; -1)$, $B(-3; 1; 3)$ параллельно оси Oy.

11. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; 1)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(5; 4)$, $C(2; 1)$.

12. Найти проекцию точки $A(4; 7)$ на прямую, проходящую через точки $B(-4; -1)$ и $C(2; 3)$.

13. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - y - 12 = 0$ и $4x - 2y - 18 = 0$ перпендикулярно первой прямой.

14. Найти проекцию точки $A(4; 7)$ на прямую, проходящую через точки $B(1; -1)$ и $C(3; -2)$.

15. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; 1)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(5; 7)$, $C(2; 1)$.

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3; 4; -1)$, $B(-2; -1; 3)$ параллельно оси Oy.

17. Найти проекцию точки $A(3; 2)$ на прямую, проходящую через точки $B(4; -2)$ и $C(3; -2)$.

18. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(-1; 4)$, $C(-2; 1)$.

19. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x - y - 2 = 0$ и $x - 2y - 3 = 0$ перпендикулярно второй прямой.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 5; -1)$, $B(-3; 1; 3)$ параллельно оси Oy.

21. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения $2x - y - 3 = 0$ и $3x - 2y - 5 = 0$ перпендикулярно первой прямой.

22. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; 5)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(-2; 3)$, $C(4; -1)$.

23.Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(5; 3; -1)$, $B(-3; 1; 3)$ параллельно оси Oz.

24. Найти проекцию точки $A(2; 1)$ на прямую, проходящую через точки $B(2; -1)$ и $C(5; -2)$.

25. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 5)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(2; -3)$, $C(6; -1)$.

26. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения $3x + y - 2 = 0$ и $2x + 3y + 1 = 0$ перпендикулярно первой прямой.

27. Найти проекцию точки $A(2; 5)$ на прямую, проходящую через точки $B(-2; -3)$ и $C(7; -2)$.

28. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения $3x + 4y + 6 = 0$ и $2x - 4y - 16 = 0$ перпендикулярно второй прямой.

29. Найти проекцию точки $A(7; 2)$ на прямую, проходящую через точки $B(4; -1)$ и $C(5; -3)$.

30. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(5; 3; -1)$, $B(-3; 1; 3)$ параллельно оси Ox.

Задание 1.8.

Записать уравнение кривой в каноническом виде и построить кривую.

Номер задания	Уравнение (а)	Уравнение (б)
1	$25x^2 - 50x + 4y^2 + 24y - 39 = 0$	$y^2 + 6y - 6x - 3 = 0$
2	$9x^2 - 90x + 4y^2 + 8y + 193 = 0$	$y^2 + 6y + 6x - 3 = 0$
3	$9x^2 + 54x - 4y^2 + 40y - 55 = 0$	$y^2 + 8y + 6x + 10 = 0$
4	$4x^2 + 24x - 9y^2 + 18y - 9 = 0$	$y^2 + 10y + 6x + 13 = 0$
5	$9y^2 - 24x - 4x^2 - 18y - 63 = 0$	$x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$
6	$9x^2 + 54x - 4y^2 + 8y + 41 = 0$	$x^2 - 2x + 8y + 41 = 0$
7	$7x^2 + 28x + 5y^2 - 30y + 38 = 0$	$y^2 - 2y - 10x + 21 = 0$
8	$24x - 4x^2 + 5y^2 + 10y - 51 = 0$	$x^2 + 2x + 8y - 7 = 0$
9	$5y^2 - 36x - 6x^2 + 10y - 79 = 0$	$x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$
10	$9x^2 + 36x + 4y^2 - 40y + 100 = 0$	$y^2 + 6y - 4x + 17 = 0$
11	$96x - 16x^2 + 25y^2 + 50y - 519 = 0$	$x^2 + 4x + 4y - 8 = 0$
12	$4x^2 + 16x + 9y^2 + 54y + 61 = 0$	$y^2 + 6y + 4x - 7 = 0$
13	$8x - 4x^2 + 5y^2 + 20y - 4 = 0$	$x^2 + 4x - 4y + 16 = 0$
14	$7x^2 + 28x + 3y^2 + 18y + 34 = 0$	$y^2 + 6y - 4x - 7 = 0$
15	$3x^2 - 12x + 5y^2 - 30y + 42 = 0$	$y^2 + 6y + 8x - 7 = 0$
16	$5y^2 - 66x - 11x^2 + 10y - 149 = 0$	$x^2 - 4x - 4y - 16 = 0$
17	$5x^2 + 10x + 7y^2 - 42y + 33 = 0$	$y^2 - 8y + 8x - 8 = 0$
18	$3x^2 -6x + 11y^2 + 66y + 69 = 0$	$y^2 - 2y + 6x - 11 = 0$
19	$22x - 11x^2 + 7y^2 - 42y - 25 = 0$	$x^2 - 8x + 6y - 8 = 0$
20	$7x^2 + 56x + 5y^2 - 20y + 97 = 0$	$y^2 + 6y - 8x + 25 = 0$

21	$16x^2 - 32x + 5y^2 + 30y - 19 = 0$	$y^2 + 8y - 10x + 6 = 0$
22	$3y^2 - 28x - 7x^2 - 18y - 22 = 0$	$x^2 - 8x + 2y + 12 = 0$
23	$25y^2 - 96x - 16x^2 + 100y - 44 = 0$	$x^2 + 2x + 6y - 23 = 0$
24	$7x^2 + 14x + 3y^2 - 18y + 13 = 0$	$y^2 - 6y + 6x - 21 = 0$
25	$7y^2 - 30x - 5x^2 - 14y - 73 = 0$	$x^2 - 10x - 4y + 37 = 0$
26	$5x^2 + 10x + 7y^2 - 42y + 33 = 0$	$y^2 - 8y + 8x + 40 = 0$
27	$7y^2 - 10x - 5x^2 - 42y + 23 = 0$	$x^2 - 8x - 6y + 40 = 0$
28	$7x^2 - 56x + 11y^2 - 44y + 79 = 0$	$y^2 + 6y - 6x - 3 = 0$
29	$16x^2 - 32x + 5y^2 + 30y - 19 = 0$	$y^2 - 8y - 10x + 6 = 0$
30	$96x - 16x^2 + 5y^2 - 20y - 204 = 0$	$x^2 + 2x + 8y - 39 = 0$

3.2. Контрольная работа № 2

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Задание 2.1.

Найти производную y'.

1. $y = x - \ln(e^x + 2e^{2x} + e^x + 1)$;
2. $y = e^{2x}(2 - \sin 2x) - \cos 2x$;
3. $y = 2\ln(e^{2x} + 1) - 2\mathrm{arctg}\, e^x$;
4. $y = \ln(e^x + 1) - \mathrm{arctg}\sqrt{e^x}$;
5. $y = x - 3\ln(1 + 2e^{2x}) - 2\mathrm{actg}\, e^x$;
6. $y = x - \arcsin e^x - \ln(1 - e^{2x})e^x$;
7. $y = e^{-x}\mathrm{arctg}\, e^x - (\mathrm{arctg}\, e^x)^2$;
8. $y = \mathrm{arctg}(e^x - e^{-x})$;
9. $y = \dfrac{e^{x^2}}{1 + x^2}$;
10. $y = \arccos\dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}$;
11. $y = \ln(\arccos\sqrt{1 - e^{4x}})$;

12. $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}});$

13. $y = \ln(\sin\dfrac{2x+4}{x+1});$

14. $y = \sqrt{2^x - 1} - \mathrm{arctg}\sqrt{2^x - 1};$

15. $y = \dfrac{x+1}{1+e^x} - \ln(1+e^x);$

16. $y = \dfrac{e^{x^2}}{1+x^5};$

17. $y = \mathrm{arctg}(e^x + e^{-x});$

18. $y = \ln(\arcsin\sqrt{1-e^{2x}});$

19. $y = \ln(\sqrt{2}\mathrm{tg}x + \sqrt{1+2\mathrm{tg}^2 x});$

20. $y = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x));$

21. $y = \ln^3(1+\cos x);$

22. $y = \arcsin\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}};$

23. $y = \ln(\cos\dfrac{2x+3}{2x+1});$

24. $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1+x^2-1}{x};$

25. $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1} + \arcsin e^{-x});$

26. $y = x^2 \arcsin(1-x^2);$

27. $y = x \cdot \ln(2x+3) + \dfrac{x^3}{\cos 3x};$

28. $y = \mathrm{arctg}(e^{5x} + 5x);$

29. $y = \ln(e^{2x} + 2^x) + \arcsin 2x;$

30. $y = e^{-x} \cdot \ln\left(\sin\dfrac{7x+3}{2x+5}\right).$

Задание 2.2.
Найти производную второго порядка.

1. $y = x\cos x^2$;

2. $y = (3 - x^2)\ln x$;

3. $y = (2x^2 - 7)\ln(x - 1)$;

4. $y = \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$;

5. $y = \dfrac{\ln x}{x^3}$;

6. $y = (4x^3 + 5)e^{2x}$;

7. $y = x^2 \sin(5x - 3)$;

8. $y = \mathrm{tg}^2 x$;

9. $y = (2x + 3)\ln^2 x$;

10. $y = (1 + x^2)\mathrm{arctg} x$;

11. $y = \sqrt[5]{e^{7x} - 1}$;

12. $y = 2^{-x}(4x + 3)$;

13. $y = (2x^3 + 1)\cos x$;

14. $y = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$;

15. $y = e^{-2x}\sin(2 + 3x)$;

16. $y = (x^2 + 3)\ln(x - 3)$;

17. $y = (2x^3 + 1)\cos x$;

18. $y = \dfrac{\sin 2x}{x}$;

19. $y = (1 - x - x^2)e^{x/2}$;

20. $y = (3x - 7)e^{-x}$;

21. $y = \dfrac{\ln(2x+53)}{2x+5}$;

22. $y = e^{2x}\sin 2x$;

23. $y=\dfrac{\ln x}{x^5}$;

24. $y=\dfrac{\cos 2x}{x}$;

25. $y=(x^2+3x+1)e^{3x+2}$;

26. $y=e^{-x}(\cos 2x-3\sin 2x)$;

27. $y=x\sin(2x-1)$;

28. $y=(x^3-x)e^{-2x}$;

29. $y=(5x-1)\ln^2 x$;

30. $y=e^{x^2+x}$.

Задание 2.3.

Найти производную y', применяя логарифмическое дифференцирование.

1. $y=(\operatorname{arctg} x)^{\ln \operatorname{arctg}\, x}$;
2. $y=(\sin x)^{\ln \sin x}$;
3. $y=(\sin x)^{5e^x}$;
4. $y=(\arcsin x)^{e^x}$;
5. $y=(\ln x)^{3x}$;
6. $y=x^{\arcsin x}$;
7. $y=(\operatorname{ctg} x)^{5e^x}$;
8. $y=x^{e^{\operatorname{tg} x}}$;
9. $y=(\operatorname{tg} x)^{4e^x}$;
10. $y=(\cos 5x)^{e^x}$;
11. $y=(x\ \sin x)^{\ln x \sin x}$;
12. $y=(x-5)^{\cos x}$;
13. $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg}\, x}$;

14. $y = x^{\sin x^3}$;

15. $y = (x^2 - 1)^{\sin x}$;

16. $y = (x^4 + 1)^{\cos x}$;

17. $y = (\sin x)^{5x}$;

18. $y = (x^2 + 2)^{\cos x}$;

19. $y = x^{5^x}$;

20. $y = x^{3x} 3^x$;

21. $y = (\sin\sqrt{x})^{e^{-x}}$;

22. $y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$;

23. $y = x^{e^{\cos x}}$;

24. $y = x^{2x} 5^x$;

25. $y = x^{e^{\sin x}}$;

26. $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg} x}$;

27. $y = xe^{\operatorname{arctg} x}$;

28. $y = (x^8 + 1)^{\ln x}$;

29. $y = x^{2x} 2^x$;

30. $y = (\cos 2x)^{\ln \cos 2\mathrm{x}}$.

Задание 2.4.
Найти производную функции, заданной параметрически.

1. $\begin{cases} x = 2t - t^2; \\ y = \arcsin(t - 1); \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{2t}; \\ y = \ln(\operatorname{tg} e); \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{t}; \\ y = \sqrt{1+e^{2t}}; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \dfrac{3t^2+1}{t^3}; \\ y = \sin\left(\dfrac{t^3}{3}\right); \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \ln(1-t^2); \\ y = (\arccos t)^2; \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = t\sin t + \cos t; \\ y = \dfrac{\arcsin(1-t^2)}{1+t^2}; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg} t; \\ y = \sin t - t\cos t; \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{1-t^2}; \\ y = 2\sin t + \sin 2t; \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = (1+\cos^2 t)^2; \\ y = \dfrac{\cos t^2}{\sin^2 t}; \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t); \\ y = t(t\sin t + 2\cos t); \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}; \\ y = t\sqrt{t^2+1}; \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = (t-1)^3; \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}(t-1); \\ y = \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) - \ln(1+t); \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\dfrac{t+1}{t-1}; \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}; \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \sqrt{t-t^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}; \\ y = \sqrt{t} - \sqrt{1-t}\arcsin\sqrt{t}; \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}; \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \ln(t^4+9); \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}; \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \ln(1-\sin t) - \ln(1+\sin t); \\ y = \operatorname{tg}^2 t + \ln\cos t; \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = \operatorname{ctg}^2 t + \operatorname{tg} t; \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t; \\ y = \cos^2 t; \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2; \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}; \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = 2\ln\sqrt{\operatorname{ctg} t + 1}; \\ y = \dfrac{t}{1-t^2}; \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = t + t^2; \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t; \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^3; \\ y = t - \operatorname{arctg} t; \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = e^{t^2 - 1}; \\ y = \cos t; \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \sin 2t; \\ y = t \arcsin t; \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = e^{3t}; \\ y = t^3 \ln(1 + t^3); \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \cos^2 t; \\ y = \ln \cos 2t; \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t^3; \\ y = \arccos t^2; \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = t \sin t; \\ y = 2t^2 + \sqrt{t}. \end{cases}$

Задание 2.5.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 7{,}76;$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x},\ x_0 = 1{,}012;$
3. $f(x) = \sqrt[4]{5x + 1},\ x_0 = 0{,}98;$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 27{,}54;$
5. $f(x) = \arcsin x,\ x_0 = 0{,}08;$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5},\ x_0 = 0{,}97;$

7. $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x_0=26,46;$

8. $f(x)=x^2+x+3,\ x_0=1,97;$

9. $f(x)=x^{11},\ x_0=1,021;$

10. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+4x+3},\ x_0=1,03;$

11. $f(x)=x^{21},\ x_0=0,998;$

12. $f(x)=\sqrt[3]{x^2},\ x_0=1,21;$

13. $f(x)=x^6,\ x_0=2,01;$

14. $f(x)=\sqrt[3]{x^2+5x+2},\ x_0=0,83;$

15. $f(x)=x^7,\ x_0=1,996;$

16. $f(x)=2x^2+x+1,\ x_0=1,016;$

17. $f(x)=4x-1,\ x_0=2,56;$

18. $f(x)=\sqrt[7]{x},\ x_0=1,14;$

19. $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x_0=8,36;$

20. $f(x)=\sqrt[4]{x},\ x_0=15,164;$

21. $f(x)=\sqrt{x^7},\ x_0=2,002;$

22. $f(x)=\sqrt{4x-3},\ x_0=1,78;$

23. $f(x)=\sqrt[5]{x},\ x_0=0,98;$

24. $f(x)=\sqrt[3]{3x+\cos x},\ x_0=0,01;$

25. $f(x)=\sqrt[3]{x^2},\ x_0=1,03;$

26. $f(x)=\sqrt[5]{x+1},\ x_0=0,1;$

27. $f(x)=\sqrt{1+x+\sin x},\ x_0=0,01;$

28. $f(x)=\sqrt{x^2-1},\ x_0=2,037;$

29. $f(x)=\sqrt[4]{2x-\ln x},\ x_0=1,02;$

30. $f(x)=\sqrt{x^2+5},\ x_0=1,97.$

Задание 2.6.

Провести полное исследование функции и построить ее график.

1. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$;

2. $y=\dfrac{x^3-x+1}{x-1}$;

3. $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$;

4. $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$;

5. $y=\dfrac{12x}{9+x^2}$;

6. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$;

7. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$;

8. $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$;

9. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$;

10. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$;

11. $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$;

12. $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$;

13. $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$;

14. $y=\dfrac{3\left(3+2x-x^2\right)}{x^2-2x+13}$;

15. $y=-\frac{8x}{x^2+4}$;

16. $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$;

17. $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$;

18. $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$;

19. $y=\frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$;

20. $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$;

21. $y=x^2+2x-3$;

22. $y=\frac{4}{3-2x-x^2}$;

23. $y=\frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$;

24. $y=\frac{1}{x^4-1}$;

25. $y=-\frac{x^2}{(x+2)^2}$;

26. $y=\frac{x^3-32}{x^2}$;

27. $y=\frac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$;

28. $y=\frac{3x-2}{x^3}$;

29. $y=\frac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$;

30. $y=\dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$.

Задание 2.7.

Найти пределы функции.

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x^3+3x^2-2}{4x^3-7x+8}$;

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-3x^2+5x^4}{8+7x-4x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2+7x^5}+3}{\sqrt[3]{2-7x^3}-3}$;

4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)$;

5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$;

7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$;

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-3x+2}$;

9. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-x^2-45x-81}$;

10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}$;

11. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}$;

12. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{8}{x^2-4}\right)$;

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2+x+2}-\dfrac{1}{x-1}\right);$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} bx}{x};$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos mx};$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-x};$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{b}{x}\right);$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+nx};$

19. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{5x^2-2}{5x^2+3}\right)^{x^3-2};$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2-3}{x^3-3}\right)^{\frac{x+7}{x^4}};$

21. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}};$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1};$

23. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1};$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^3+4x^2-7}{2x^4+6x^2-8};$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right);$

26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-6x+3}{x+4};$

27. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^3+2x-5}{4x^2+6x-3}$;

28. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2+3x^2-6x^4}{3-2x+3x^2}$;

29. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

30. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

Задание 2.8.
Найти пределы, используя формулу эквивалентности.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin 4x)^2}{x\left(\sqrt{1+\sin 5x}-1\right)}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-7x^2}{\sin 3(x+\pi)+\mathrm{tg}x^2+\sqrt[5]{4x^6}}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt{x+9}-3}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln(2-\cos bx)}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$;

7. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 4x}{\cos x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cos\frac{\pi x}{4}}{\sin \pi x^2}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\sin 7x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x\sin 3x}{x^3+x^2}$;

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\operatorname{tg}3x\right)}{e^{2x}-1}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+2x-3x^2+4x^3\right)}{\ln\left(1-x+2x^2-7x^3\right)}$;

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-3x^2+4x^3}{\operatorname{tg}4x+2x^2+7x^4}$;

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{3}+x^2}{\operatorname{arctg}3x-x^2+4x^3}$;

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}ax^2+bx-\sqrt[3]{x^2}}{\operatorname{tg}bx^2+ax+\sqrt[3]{x}}$;

17. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin\left(\sqrt{x}+\pi\right)+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}{\ln\left(1+x\right)+\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^3}}$;

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-x^3-1}{1-\cos 10x+x^3-4x^4}$;

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-\cos 3x}-1}{\left(\arcsin 2x\right)^2}$;

20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\ln\left(x^2-11x+19\right)}$;

21. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{4-x}-1}{x-3}$;

22. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$;

25. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$;

26. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^3 5x}{\sin^3 2x}$;

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+\cos\pi x)^2}{\mathrm{tg}^4\pi x}$;

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)\cos\dfrac{\pi x}{2}}{3(x-1)^2}$;

29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln^2(3-x)}{1+\cos\dfrac{\pi}{4}x^2}$;

30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{\sin 7\pi x}}{\sqrt[4]{x\sin 8\pi x}}$.

Задание 2.9.
Найти пределы с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos ax}{\left(e^{bx}-\cos bx\right)chbx}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$;

5. $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(1-\cos x)}$;

6. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

7. $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$;

8. $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$;

9. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$;

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}x)\ln x$;

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$;

12. $\lim\limits_{x\to0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$;

13. $\lim\limits_{x\to+0}(-\ln x)^{x}$;

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}$;

15. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$;

16. $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\cos x\ln(x-a)}{\ln\left(e^{x}-e^{a}\right)}$;

17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{-bx}}{\sin ax\cdot\cos bx}$;

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$;

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

20. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$;

21. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-x^2+x}{e^x-e^{-x}}$;

25. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x\right)}$;

26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$;

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2-x^2}}$;

28. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

4.1. Решение типового варианта контрольной работы № 1

Задание 1.1.

Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1; \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Совместность данной системы докажем по теореме Кронекера – Капелли. С помощью элементарных преобразований расширенную матрицу $\tilde{A}$ приведем к трапециевидной форме:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 3 & -13 \\ 0 & -5 & 8 & -18 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 3 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right].$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 3$ (числу неизвестных системы). Значит, исходная система совместна и имеет единственное решение.

а) По формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -25; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -25;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -50; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 25.$$

Находим

$$x_1 = \frac{-25}{-25} = 1; \qquad x_2 = \frac{-50}{-25} = 2; \qquad x_3 = \frac{25}{-25} = -1.$$

б) С помощью обратной матрицы $X = A^{-1}H$, где A^{-1} – обратная матрица к A; H – столбец правых частей:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix};$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Решение системы:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{25}\begin{bmatrix} -6 & -11 & 1 \\ -7 & 8 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

т. е. $x_1 = 1;$ $\quad x_2 = 2;$ $\quad x_3 = -1.$

в) Решить систему по методу Гаусса. Прямой ход по методу Гаусса выполнен при доказательстве совместности исходной системы линейных неоднородных алгебраических уравнений на основании теоремы Кронекера – Капелли:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 3 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right).$$

Получили, что исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6; \\ -5x_2 - 3x_3 = -13; \\ 5x_3 = -5. \end{cases}$$

Тогда

$$x_3 = -1; \qquad x_2 = \frac{-13 + 3x_3}{-5} = 2; \qquad x_1 = 6 - 2x_2 + x_3 = 1\,.$$

Задание 1.2.

Решить линейную однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к трапециевидной форме:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -8 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{II} - 2\mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 2\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & -5 & -14 & 0 & -16 & 0 \end{array}\right) \text{II}(-1) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & -5 & -14 & 0 & -16 & 0 \end{array}\right) 5\text{II}+\text{III} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 49 & 0 \end{array}\right).$$

Выберем в качестве базисного минора $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Тогда базисными являются неизвестные x_1, x_2, x_3, соответствующие столбцам этого минора, x_4, x_5 – свободные неизвестные.

Полученной расширенной матрице соответствует система (все свободные неизвестные перенесены в правые части уравнений):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -x_4 - 6x_5; \\ x_2 + 3x_3 = -13x_5; \\ x_3 = -49x_5. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из двух частных решений E_1 и E_2, так как $n - r = 5 - 3 = 2$. Чтобы найти E_1, придадим свободным неизвестным значения 1 и 0 и, подставив их в последнюю систему, найдем значения базисных неизвестных (из третьего уравнения находим x_3, из второго – x_2, из первого – x_1). Чтобы найти E_2, придадим свободным неизвестным значения 0 и 1 и найдем соответствующие значения базисных неизвестных x_1, x_2, x_3.

Итак,

$$x_4 = 1,\ \ x_5 = 0 \ \Rightarrow \ E_1 = \left(-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0\right)^T;$$

$$x_4 = 0,\ \ x_5 = 1 \ \Rightarrow \ E_2 = \left(-176,\ 134,\ -49,\ 0,\ 1\right)^T.$$

Общее решение системы имеет следующий вид:

$$X = C_1E_1 + C_2E_2 = C_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -176 \\ 134 \\ -49 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 1.3.

По координатам точек $A(-5; +1; 6)$, $B(1; 4; 3)$, $C(6; 3; 9)$ найти:

а) модуль вектора $\vec{a} = \vec{AB} - \vec{BC}$.

$$\vec{AB} = (6; 3; -3); \qquad \vec{BC} = (5; -1; 6); \qquad \vec{a} = \vec{AB} - \vec{BC} = (1; 4; -9);$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{1^2 + 4^2 + \left(-9\right)^2} = \sqrt{1 + 16 + 81} = \sqrt{98};$$

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b} = \vec{BC}$.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) + (-9) \cdot 6 = -53;$$

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{BC}$ на вектор $\vec{d} = \vec{AB}$.

$$np_{\vec{d}}\,\vec{c} = \frac{(\vec{c} \cdot \vec{d})}{\left|\vec{d}\right|} = \frac{6 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + (-3) \cdot 6}{\sqrt{36 + 9 + 9}} = \frac{9}{\sqrt{54}};$$

г) координаты точки $M(X_M, Y_M, Z_M)$, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 1:3; $\lambda = \frac{1}{3}$. Следовательно:

$$X_M = \frac{-5 + \frac{1}{3} \cdot 1}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{7}{2}; \quad Y_M = \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot 4}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{7}{4}; \quad Z_M = \frac{6 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{21}{4}.$$

Задание 1.4.

Даны векторы $\vec{a}(4; 0; 4)$; $\vec{b}(-1; 3; 2)$; $\vec{c}(3; 5; 0)$. Необходимо:

а) найти модуль векторного произведения $\left[\vec{c}, \vec{b}\right]$.

$$\left[\vec{c}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 14\,\vec{k};$$

$$\left|\left[\vec{c}, \vec{b}\right]\right| = \sqrt{10^2 + (-6)^2 + 14^2} = \sqrt{336};$$

б) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Условие коллинеарности двух векторов: $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$.

Так как $\frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{2}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

Условие ортогональности двух векторов: $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Так как $4 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 4 \neq 0$, векторы неортогональны.

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -96;$$

г) проверить, будут ли компланарны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Из пункта в) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -96 \neq 0$, следовательно, эти векторы некомпланарны.

Задание 1.5.

Даны четыре точки: $A_1(1; 1; 3)$, $A_2(-1; -1; -2)$, $A_3(2; -3; 3)$, $A_4(3; 2; -1)$.

Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости через точки $A_1(1; 1; 3)$, $A_2(-1; -1; -2)$ и $A_3(2; -3; 3)$ имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 3 \\ (-1) - 1 & (-1) - 1 & (-2) - 3 \\ 2 - 1 & (-3) - 1 & 3 - 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисление определителя дает уравнение $-20(x-1)-5(y-1)+$ $+10(z-3)=0$. Разделим полученное уравнение на (–5) и получим уравнение плоскости в виде:

$$4x+y-2z+1=0;$$

б) прямой A_1A_2.

Уравнение прямой по двум точкам записывается в следующем виде:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

В нашей ситуации это будет уравнение

$$\frac{x-1}{(-1)-1}=\frac{y-1}{(-1)-1}=\frac{z-3}{(-2)-3}.$$

После вычислений получаем уравнение

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-5}.$$

Можно умножить полученное уравнение на (–1), тогда

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{5};$$

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$.

Нормальным вектором к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ является вектор $\vec{n}=(A,B,C)$, в нашем случае $\vec{n}=(4,1,-2)$. Этот вектор параллелен прямой A_4M. Его можно выбрать в качестве направляющего вектора $\vec{\tau}=(m,n,p)=(4,1,-2)$. Уравнение прямой в каноническом виде имеет вид

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

Тогда уравнение прямой A_4M запишется в виде:

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2};$$

г) прямой A_4N, параллельной A_1A_2.

В качестве направляющего вектора можно выбрать вектор $\overrightarrow{A_1A_2}=(x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1)=(-2, -2, -5)$. Тогда уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{5};$$

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Вектор $\overrightarrow{A_1A_2}=(-2, -2, -5)$ перпендикулярен искомой плоскости, его можно выбрать в качестве нормального вектора. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку с координатами (x_0, y_0, z_0) и нормальным вектором $\vec{n}=(A, B, C)$, имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Подставляя значения, получаем:

$$(-2)(x-3)+(-2)(y-2)+(-5)(z+1)=0.$$

После вычислений уравнение имеет вид:

$$2x+2y-5z-5=0;$$

е) вычислить $\sin\alpha$ – угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Угол между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$\sin\alpha=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

В этом выражении $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости, $\vec{\tau} = (m, n, p)$ – направляющий вектор.

В нашей ситуации $\vec{n} = (4, 1, -2)$ и $\vec{\tau} = \overrightarrow{A_1A_4} = (2, 1, -4)$. Откуда

$$\sin\alpha = \frac{|4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-4)|}{\sqrt{16+1+4} \cdot \sqrt{4+1+16}} = \frac{17}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{21}} = \frac{17}{21}.$$

Задание 1.6.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2; 3; 1)$ и $N(-2; 4; -1)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(1; -2; -1)$ и $B(-3; 1; -1)$.

Найдем вектор $\vec{n}$, перпендикулярный искомой плоскости. Вектор $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$. Следовательно, в качестве вектора $\vec{n}$ можно взять векторное произведение $\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}\right]$.

$$\overrightarrow{MN} = (-4, 1, -2) \qquad \overrightarrow{AB} = (-4, 3, 0).$$

$$\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k}.$$

Тогда уравнение искомой плоскости $6(x-2) + 8(y-3) - 8(z-1) = 0$, которое приводится к виду $3x + 4y - 4z - 14 = 0$.

Задание 1.7.

Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + 3y + 5 = 0$ и $4x - y - 11 = 0$ перпендикулярно первой прямой. Найдем точку пересечения M_0:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0; \\ 4x - y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2; \\ y_0 = -3. \end{cases}$$

Вектор $\vec{a}(2, 3)$ параллелен искомой прямой. Поэтому ее уравнение в каноническом виде можно записать:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{3}.$$

Оно приводится к виду $3x - 2y - 12 = 0$.

Задание 1.8.

Записать уравнение кривой в каноническом виде, определить ее вид и построить кривую.

Уравнение а: $4x^2 + 32x + 9y^2 - 54y + 109 = 0$; уравнение б: $y^2 + 4y - 6x + 10 = 0$.

а) Выделим полные квадраты при входящих в уравнение переменных:

$$4(x^2 + 8x + 16) - 4 \cdot 16 + 9(y^2 - 6y + 9) - 9 \cdot 9 + 109 = 0.$$

$$4(x + 4)^2 + 9(y - 3)^2 - 36 = 0.$$

Приведем уравнение к каноническому виду, разделив его на 36:

$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1.$$

Полученное уравнение является уравнением эллипса:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Здесь a и b – полуоси эллипса, а x_0 и y_0 – координаты центра эллипса.

Построим эллипс (рис. 1).

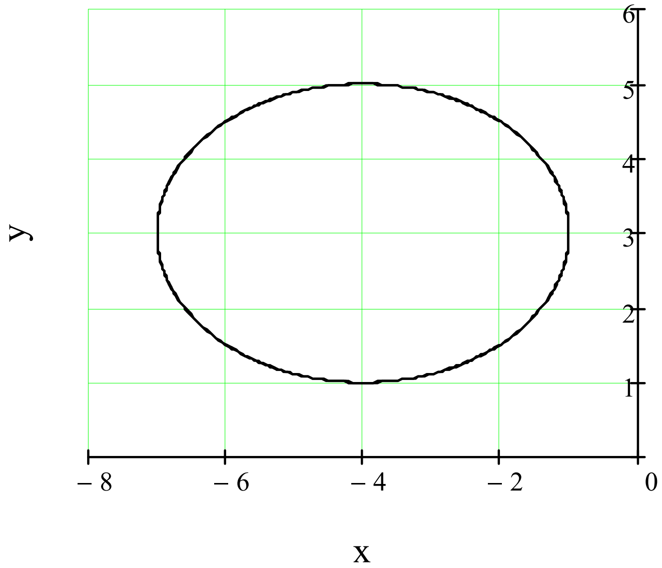

Рис. 1. Построение эллипса, отвечающего заданному уравнению

б) Выделим полный квадрат при y:

$$y^2 + 4y - 6x + 10 = 0;$$

$$(y^2 + 4y + 4) - 4 - 6x + 10 = 0.$$

Тогда $(y + 2)^2 - 6(x - 1) = 0$ или $(y + 2)^2 = 6(x - 1)$.

Полученное уравнение является уравнением параболы:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),$$

где p – параметр параболы;

x_0, y_0 – вершина параболы.

Построим параболу (рис. 2).

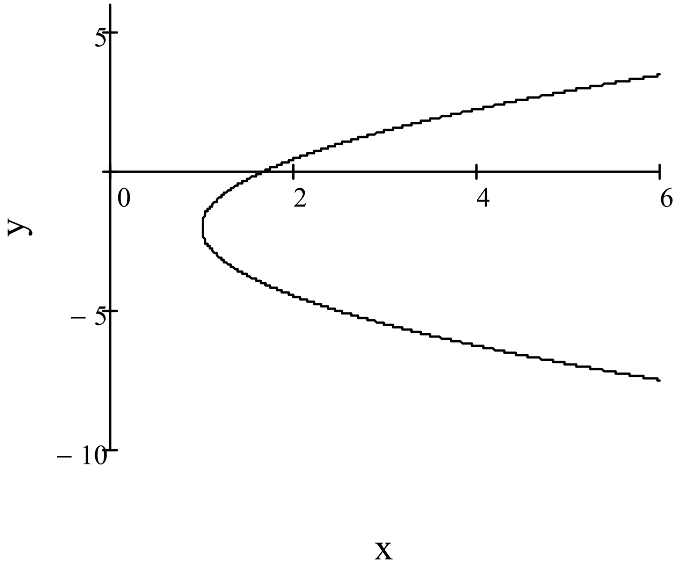

Рис. 2. Построение параболы

4.2. Решение типового варианта контрольной работы № 2

Задание 2.1.

Найти производную функции $y=(3x^2+7)^5-\log_2 e^{2x^2}+\operatorname{arctg} 2x.$

Решение. Применяя правило дифференцирования алгебраической суммы и используя таблицу основных производных, получаем:

$$y'=5(3x^2+7)^4\cdot(3x^2+7)'-\frac{1}{e^{2x^2}\cdot\ln 2}\cdot(e^{2x^2})'+\frac{1}{1+4x^2}\cdot(2x)'=$$

$$=5(3x^2+7)^4\cdot 6x-\frac{e^{2x^2}\cdot 4x}{e^{2x^2}\cdot\ln 2}+\frac{2}{1+4x^2}$$

или

$$y'=30x(3x^2+7)^4-\frac{4x}{\ln 2}+\frac{2}{1+4x^2}.$$

Задание 2.2.

Найти производную 2-го порядка для функции $y = x^5 + \cos 2x$.

Решение. Выполняя последовательное дифференцирование, находим:

$$y' = 5x^4 - 2\sin 2x;$$

$$y'' = 20x^3 - 4\cos 2x.$$

Задание 2.3.

Найти производную функцию, применив логарифмическое дифференцирование:

$$y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Решение. Прологарифмируем данную функцию по основанию e и получим:

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{1}{2}(\ln(ax+b) - \ln(cx+d)).$$

После дифференцирования обеих частей имеем:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right),$$

откуда

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right).$$

Задание 2.4.

Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

Решение. Согласно формуле (5.13) имеем:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos 2t \cdot 2}{-\sin 2t \cdot 2} = -\text{ctg}\, 2t.$$

Ответ: $y'_x = -\text{ctg}\, 2t$;

Задание 2.5.

Вычислить приближенное значение функции $\text{tg}\, 46^\circ$ с помощью понятия дифференциала функции в точке.

Решение.

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \mathrm{d}f(x);$$

$$\text{tg}(x + \Delta x) \approx \text{tg}\, x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \Delta x,\ \ x = 45^\circ,\ \ \Delta x = 1^\circ \approx 0{,}0175;$$

$$\text{tg}\, 46^\circ \approx \text{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot 0{,}0175;$$

$$\text{tg}\, 46^\circ \approx 1{,}035.$$

Задание 2.6.

Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$ и построить ее график.

Решение.

О.Д.З: $x \neq 0,\ x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

Функция не является четной или нечетной.

$y = 0,\ x = -\sqrt[3]{4}$ – точка пересечения с осью Ox. С осью Oy пересечения нет.

Точка разрыва $x=0$, причем $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\dfrac{x^3+4}{x^2}=\dfrac{4}{+0}=+\infty$, следовательно, $x=0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой графика. Проверим поведение функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=\infty \Rightarrow \text{ горизонтальных асимптот нет.}$$

Проверим наличие наклонной асимптоты, для этого вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2}=0 \Rightarrow \ y=x -$$

наклонная асимптота.

Исследуем функцию с помощью производной первого порядка:

$$y'=\frac{x^3-8}{x^3};$$

$$y'=0 \text{ при } x=2,$$

при $x=0$ производная и функция не существуют.

Проверим смену знака производной через эти точки (рис. 3):

$$y_{\min}(2)=\frac{12}{4}=3.$$

Рис. 3. Определение интервалов монотонности функции

В промежутках (–∞; 0), (2; ∞) производная принимает положительные значения, поэтому функция возрастает. В промежутке (0; 2) функция убывает.

Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и ее точки перегиба, т. е. выполним исследование с помощью второй производной: $y'' = \dfrac{24}{x^2}$. Так как $y'' > 0$, график всюду вогнут, и точек перегиба нет.

Построим график функции (рис. 4).

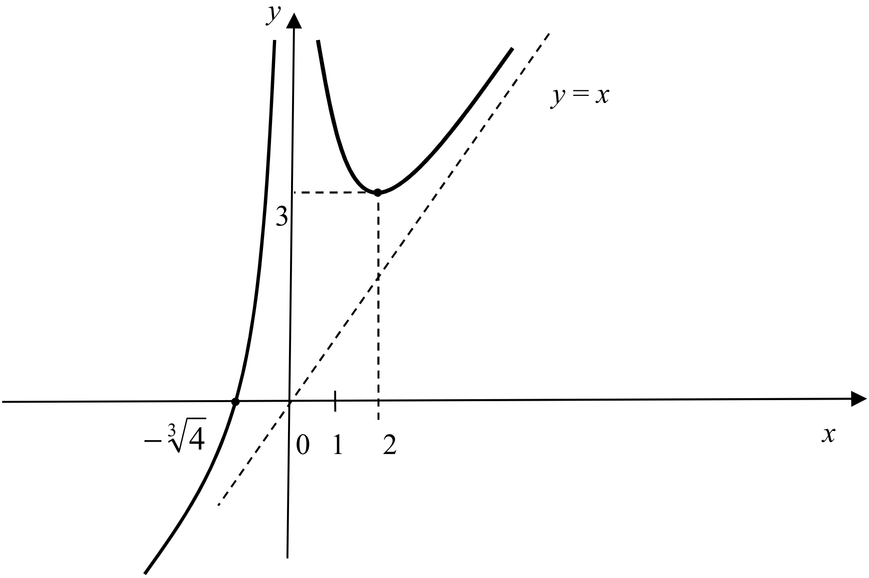

Рис. 4. График функции $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

Задание 2.7.

Вычислить предел с помощью второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+2}\right)^{\frac{x^2}{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{3x+4}{3x+2}-1\right)\right)^{\frac{x^2}{x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{2}}\right)^{\frac{2}{3x+2}\cdot\frac{x^2}{x+2}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2+8x+4}}=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}.$$

Предел вычислили, используя следующие пределы:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{2}}=e \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2+8x+4}=\frac{2}{3}.$$

Задание 2.8.
Найти предел, используя формулы эквивалентности:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{tg}^3\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{3}{x\sqrt{x}}}{\sin\frac{2}{x^3}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{x}}\arcsin\frac{5}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3\cdot\frac{3}{x\sqrt{x}}}{\frac{2}{x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{5}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4\sqrt{x}}{10x^4\sqrt{x}}=0{,}3.$$

Задание 2.9.
Вычислить предел по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}x}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}2x\ln x = \left|\text{неопределенность вида } 0\cdot\infty\right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}2x} =$$

$$= \left|\text{неопределенность вида } \frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{2\operatorname{tg}x\cos^2 x} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{2\sin x\cos x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{\sin 2x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

БОКУТЬ Людмила Валентиновна
ГАЦКЕВИЧ Елена Ивановна
ПРУСОВА Ирина Васильевна и др.

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-38 01 01 «Механические и электромеханические приборы
и аппараты»; 1-38 01 02 «Оптико-электронные и лазерные приборы
и системы»; 1-38 02 02 «Биотехнические и медицинские аппараты
и системы»; 1-52 02 01 «Технология и оборудование ювелирного
производства»; 1-54 01 01-01 «Метрология, стандартизация
и сертификация (машиностроение и приборостроение)»

В 3 частях

Часть 1

Редактор *А. С. Мокрушников*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 27.10.2021. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,55. Уч.-изд. л. 2,77. Тираж 100. Заказ 442.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.