УДК 539.3

Теорема Пифагора в *n*-мерном пространстве

Акимов В.А., Новиков А.А.
Белорусский национальный технический университет

В данной работе непредвзято затрагивается вроде бы известная тема на предмет «Ну кто не знает теорему Пифагора?». Ответ: «Да ее все со школы знают». А вот тут то и начинается нечто новое и необычное. Своего рода переход от школьной геометрии к аналитической с элементами векторной алгебры. Это своего рода игра, но очень необычная с элементами новизны и фантазии. В конечном итоге такой подход закрепляет проходимый материал, пробуждает интерес и развивает творческий подход к изучению математики в целом**.**

Для случая $n = 2$ она изучается в школе и практически всем знакома. Пусть теперь $n = 3$. Сделаем наглядный сопровождающий рисунок Теорема Пифагора звучит очень просто.

ТЕОРЕМА: Квадрат площади произвольного треугольника в трехмерном пространстве равен сумме квадратов его проекций на координатные плоскости. То есть

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 \tag{1}$$

Формально эту теорему можно доказать следующим образом.

Очевидно, что: $s_x = s\cos\alpha$, $s_y = z\cos\beta$, $s_z = s\cos\gamma$ и тогда

$$s^2 = s^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, то теорема доказана.

Это формальное доказательство не является наглядным. Для большей убедительности приведем численный пример. Рассмотрим произвольный треугольник (рис. 1) со сторонами

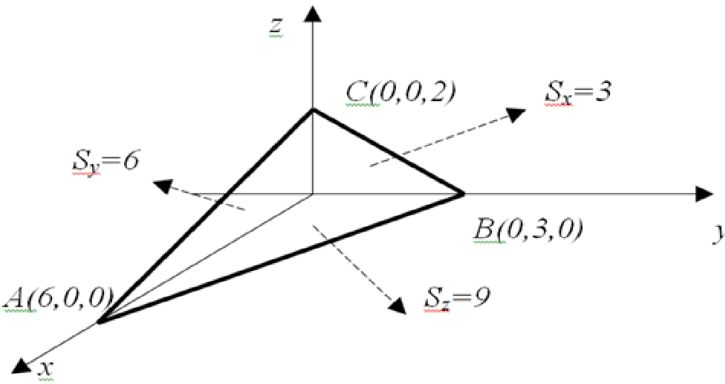

Рис. 1

$$AB=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45},\ BC=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13},\ CA=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}.$$

На рисунке 1 также показано $s_x=3 \quad s_y=6 \quad s_z=9$.

По формуле Герона

$$s^2=\frac{1}{16}(\sqrt{45}+\sqrt{13}+\sqrt{40})(-\sqrt{45}+\sqrt{13}+\sqrt{40})(\sqrt{45}-\sqrt{13}+\sqrt{40})(\sqrt{45}+\sqrt{13}-\sqrt{40})=$$

$$=\frac{1}{16}(-45+13+2\sqrt{40}\sqrt{13}+40)(45-13+2\sqrt{40}\sqrt{13}-40)=$$

$$=\frac{1}{16}(2\sqrt{40}\sqrt{13}+8)(2\sqrt{40}\sqrt{13}-8)=\frac{1}{16}(4\cdot 40\cdot 13-64)=126 \qquad s=\sqrt{126}=3\sqrt{14}.$$

С другой стороны $s_x^2+s_y^2+s_z^2=3^2+6^2+9^2=126$.

Таким образом, соотношение (1) выполняется. Таких примеров можно привести множество. Очевидно, что теорема остается в силе при произвольном параллельном переносе системы координат в другую точку (смотри рисунок 2). Кстати, это утверждение распространяется и на классическую теорему Пифагора.

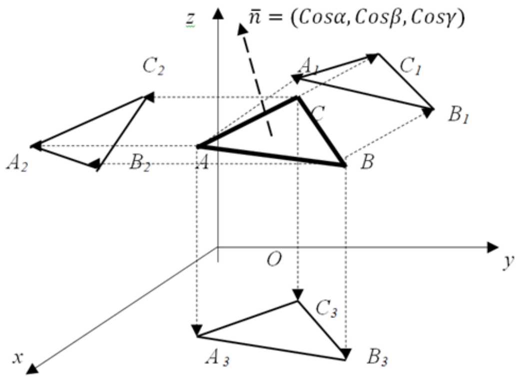

Рис. 2

Теперь, наряду со школьными вычислениями изложим эту теорию на базе математики для студентов, как правило, изучающих аналитическую геометрию на 1 курсе в 1 семестре.

1 способ

Итак, запишем уравнение плоскости, проходящей через 3 точки $A(6;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$

$$x+2y+z-6=0.$$

Отсюда находим $\cos\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}==\dfrac{1}{\sqrt{14}}$. Аналогично $\cos\beta=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$; $\cos\gamma=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$.

Легко увидеть, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

И тогда $s_x=s\cos\alpha=3\sqrt{14}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{14}}=3$; $s_y=s\cos\beta=3\sqrt{14}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{14}}=6$;

$s_y=s\cos\gamma=3\sqrt{14}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{14}}=9.$

Соотношение (1) конечно выполняется.

2 способ

Известно [1 стр.61]

$$s = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix}.$$

С учетом: $y_A = z_A = 0$; $x_B = z_B = 0$; $x_C = y_C = 0$

$x_A = 6$ $y_B = 3$ $z_C = 2$,

получим:

$$s = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x_A & y_B & 0 \\ -x_A & 0 & z_C \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{(y_B z_C)^2 + (z_C x_A)^2 + (x_A y_B)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 12^2 + 18^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 6 \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = 3\sqrt{14}$$

Мы непосредственно убеждаемся в том, что вычисления, проводимые по школьной формуле Герона, а также 1 и 2 способами методами аналитической геометрии дают один и тот же результат.

Теперь перейдем к 4-х мерному пространству. Формально будем предполагать, что плоскость пересекает координатные оси в четырех точках $A(6;0;0;0)$ $B(0;3;0;0)$ $C(0;0;2;0)$ $D(0;0;0;1)$.

Теперь теорема Пифагора в четырехмерном пространстве принимает вид:

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + s_u^2 \tag{2}$$

Вычисления проводим методом математической индукции по аналогии с 3-мерным пространством (рис.3), итак:

$s_x^2 = s_{\Delta BCD}$ $s_y^2 = s_{\Delta ABD}$ $s_z^2 = s_{\Delta ACD}$ $s_u^2 = s_{\Delta ABC} = 126$

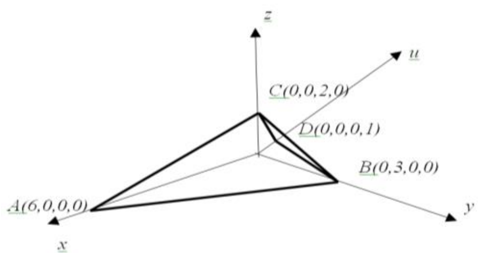

Рис. 3

И так далее для пространств больших размерностей. Так, например, для 6-мерного пространства

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_s^2 + s_u^2 + s_v^2 + s_w^2 \qquad (3)$$

ТЕОРЕМА. Квадрат площади произвольного треугольника в *n* мерном пространстве равен сумме квадратов *n* его проекций на *n*-1 мерные пространства.

Получается своего рода матрешка – каждая «плоскость» в *n* мерном пространстве проецируется на n гиперплоскостей для которых верна данная обобщенная теорема. Все направления осей будем пока считать положительными.

Вернемся к численному примеру и доведем соответствующие вычисления до конца. Итак

$$s_y = s_{\Delta AÑD} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}]\right| = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} & \vec{l} \\ x_A - x_C & z_A - z_C & u_A - u_C \\ x_D - x_C & z_D - z_C & u_D - u_C \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(z_C u_D)^2 + (u_D x_A)^2 + (x_A z_C)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2\cdot 1)^2 + (1\cdot 6)^2 + (6\cdot 2)^2} = \sqrt{46},$$

$$s_z = s_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}]\right| = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{l} \\ x_A - x_B & y_A - y_B & u_A - u_B \\ x_D - x_B & y_D - y_B & u_D - u_B \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(y_B u_D)^2 + (u_D x_A)^2 + (x_A y_B)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(3\cdot 1)^2 + (1\cdot 6)^2 + (6\cdot 3)^2} = \frac{3\sqrt{41}}{2}.$$

Ранее было вычислено

$s_u = s_{\Delta ABC} = 3\sqrt{14}$.

Тогда получим: $s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + s_u^2 = \frac{49}{4} + \frac{184}{4} + \frac{369}{4} + \frac{504}{4} = 276.5$.

А теперь выведем упрощенную формулу для 4-х мерного пространства. Предварительно определяем

$$s^2_{\Delta ABC} = \frac{1}{16}(\sqrt{x_A^2+y_C^2}+\sqrt{y_C^2+z_B^2}+\sqrt{z_B^2+x_A^2})(-\sqrt{x_A^2+y_C^2}+\sqrt{y_C^2+z_B^2}+\sqrt{z_B^2+x_A^2})$$
$$(\sqrt{x_A^2+y_C^2}-\sqrt{y_C^2+z_B^2}+\sqrt{z_B^2+x_A^2})(\sqrt{x_A^2+y_C^2}+\sqrt{y_C^2+z_B^2}-\sqrt{z_B^2+x_A^2}) =$$

$$= \frac{1}{4}(z_B^2+\sqrt{y_C^2+z_B^2}\sqrt{z_B^2+x_A^2})(-z_B^2+\sqrt{y_C^2+z_B^2}\sqrt{z_B^2+x_A^2}) =$$
$$= \frac{1}{4}[(y_C^2+z_B^2)(z_B^2+x_A^2)-z_B^4] = \left(\frac{x_A y_C}{2}\right)^2+\left(\frac{y_C z_B}{2}\right)^2+\left(\frac{z_B x_A}{2}\right)^2$$

Так как рассматриваемые треугольники прямоугольные, то эта формула является очевидной. Далее нетрудно установить:

$$s_x^2 = s^2_{\Delta BCD} = s^2_{\Delta BOC}+s^2_{\Delta COD}+s^2_{\Delta DOB} \quad s_y^2 = s^2_{\Delta ABD} = s^2_{\Delta AOB}+s^2_{\Delta BOD}+s^2_{\Delta DOA}$$
$$s_z^2 = s^2_{\Delta ACD} = s^2_{\Delta AOC}+s^2_{\Delta COD}+s^2_{\Delta DOA} \quad s_u^2 = s^2_{\Delta ABC} = s^2_{\Delta AOB}+s^2_{\Delta BOC}+s^2_{\Delta COA}$$

$$s^2 = 2(s^2_{\Delta AOB}+s^2_{\Delta AOC}+s^2_{\Delta AOD}+s^2_{\Delta BOC}+s^2_{\Delta BOD}+s^2_{\Delta COD}) =$$
$$= 2[\left(\frac{x_A y_B}{2}\right)^2+\left(\frac{x_A z_C}{2}\right)^2+\left(\frac{x_A u_D}{2}\right)^2+\left(\frac{y_B z_C}{2}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{y_B u_D}{2}\right)^2+\left(\frac{z_C u_D}{2}\right)^2] = 2(81+36+9+9+\frac{9}{4}+1) = 276.5 .$$

Результат совпадает. По существу – это одна и та же формула. Итак, получили теорему:

Квадрат площади треугольника в четырехмерном пространстве равен удвоенной сумме квадратов половины попарного произведения координат, на которых он построен.

Литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. /Д.Т. Письменный-15-е издание. – Москва: Айрис - пресс, 2018.-602 с.