МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

МАТЕМАТИКА

(РАЗДЕЛЫ: ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ; ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ)

Электронный учебно-методический комплекс

для студентов специальности 1-56 02 01 «Геодезия»

Составители: Ковалёнок Н.В.

Рассмотрено и утверждено

на заседании совета факультета транспортных коммуникаций

из робототехники « 29 » ноября 2021 г., протокол № 3

Минск БНТУ 2021

Рецензенты:

Гуло Ирина Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени М. Танка;

Катковская Ирина Николаевна, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и медицинской физики Международного государственного экологического института им. А.Д.Сахарова Белорусского государственного университета.

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «МАТЕМАТИКА (РАЗДЕЛЫ: ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ; ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ)» состоит из следующих разделов:

– вспомогательных материалов;

– кратких теоретических материалов;

– материалов для проведения практических занятий по учебной дисциплине;

– материалов для текущего контроля.

Вспомогательный раздел ЭУМК содержит программу дисциплины по указанным разделам, перечень учебно-методических пособий, рекомендуемых к использованию в образовательном процессе.

Теоретический раздел ЭУМК содержит материалы для теоретического изучения учебной дисциплины (по данным разделам) в объеме, установленном учебным планом по специальности. Теоретический материал дополнен подробными решениями задач по данным темам.

Практический раздел ЭУМК содержит материалы для проведения практических занятий в аудитории и заданий для самостоятельной работы.

Раздел контроля знаний ЭУМК содержит материалы тематического контроля знаний в виде тестов.

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебно-методический комплекс по курсу «Математика (разделы: векторная алгебра и аналитическая геометрия; определители и матрицы. системы линейных уравнений)» предназначен для студентов первого курса обучения по специальности 1-56 02 01 «Геодезия». Объем изучаемого разделов «Векторная алгебра и аналитическая геометрия» и «Определители и матрицы. Системы линейных уравнений» дисциплины в соответствии с учебным планом составляет 34 часа лекции и 36 часов практических занятий (очная форма получения высшего образования) и 10 часов лекций и 10 часов практических занятий (заочная форма получения высшего образования).

Целью ЭУМК является скоординировать и оптимизировать работу студентов и преподавателей по изучению предмета математика для студентов специальности 1-56 02 01 «Геодезия». Систематизировать разделы теоретического, практического материала и материала для проверки и контроля знаний в единый модуль.

Структурирование и подача учебного материала. Материал курса представлен в виде краткого лекционного материала, материала для аудиторной и самостоятельной работы, и тестов по данным разделам. Учебный материал четко разделен по темам курса и излагается в соответствии с типовой программой в объеме, предусмотренном учебным планом.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК. Изучение учебного материала в ЭУМК может быть использовано студентами дневной и заочной форм обучения. Предварительно следует изучить тему лекционного материала, затем ознакомиться и проанализировать решение задач соответствующей темы. При выполнении самостоятельной работы использовать примеры, приведенные в ЭУМК. В случае появления вопросов при изучении учебного материала необходимо обратиться за консультацией к преподавателю.

Целями преподавания дисциплины «Математика» являются:

- ознакомление студентов с ролью математики в современной жизни общества;
- развитие интеллектуального потенциала студентов и способностей их к логическому и алгоритмическому мышлению;
- обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений технических задач и выбора наилучших способов реализации этих решений;
- обучение методам обработки и анализа результатов численных и натуральных экспериментов;

Задачами преподавания дисциплины «Математика» являются:

- демонстрация сущности научного подхода на примерах математических понятий и методов.
- обучение студентов приемам исследования и решения математически формализованных задач.
- выработка у студентов умения анализировать полученные результаты;
- привитие студентам навыков самостоятельного изучения литературы по математике и ее приложениям.

В результате изучения учебной дисциплины «Математика» по данным разделам студент должен:

знать:

- основные понятия и методы аналитической геометрии, линейной и векторной алгебры;

уметь:

- выполнять операции над матрицами и определителями;
- решать системы линейных алгебраических уравнений;
- проводить различные операции над векторами;
- находить скалярное, векторное и смешанное произведения векторов;
- составлять различные уравнения прямых и плоскостей;
- приводить уравнения кривых второго порядка к каноническому виду;
- проводить исследования поверхностей второго порядка методом параллельных сечений;
- дифференцировать и интегрировать функции;
- дифференцировать функции многих переменных;

владеть:

- навыками творческого аналитического мышления;
- исследовательскими навыками для решения теоретических и практических задач;
- умением самостоятельно и творчески работать, способностью самостоятельно генерировать и реализовывать новые идеи и методы.

Освоение данной учебной дисциплины обеспечивает формирование следующих компетенций:

БПК-1 Владеть основными понятиями и методами линейной и векторной алгебры, применять полученные знания для решения задач теоретической и практической направленности.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

РАЗДЕЛ I. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 1.1. Векторная алгебра

Геометрические и свободные векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Базис и координаты вектора. Декартовы прямоугольные координаты точки. Деление отрезка в заданном отношении. Скалярное произведение векторов. Векторное и смешанное произведения векторов.

Тема 1.2. Прямая на плоскости

Виды уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости.

Тема 1.3. Плоскость в пространстве

Виды уравнений плоскости в пространстве. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей

Тема 1.4. Прямая в пространстве

Прямая в пространстве и способы ее задания. Угол между прямыми. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Тема 1.5. Линии второго порядка на плоскости

Уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат. Алгебраические кривые второго порядка. Уравнения кривых второго порядка в полярной системе координат. Параметрические уравнения кривой.

Тема 1.6. Поверхности и кривые в пространстве

Уравнение поверхности и кривой в декартовой прямоугольной системе координат (ДПСК). Алгебраические поверхности второго порядка. Метод сечений в исследовании уравнений поверхностей. Общее уравнение поверхности второго порядка.

РАЗДЕЛ II. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тема 2.1. Определители

Определители второго, третьего, n-го порядков. Свойства определителей. Основные методы вычисления определителей $n-$ го порядка.

Тема 2.2. Матрицы

Матрицы, операции над ними. Свойства операций. Произведение матриц. Транспонирование матриц. Обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы. Решение матричных уравнений.

Тема 2.3. Пространство арифметических векторов. Ранг матрицы

Арифметические векторы. Пространство арифметических векторов. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы методом элементарных преобразований

Тема 2.4. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Матричный метод решения невырожденных систем. Формулы Крамера. Решение произвольных систем. Теорема Кронекера - Капелли. Метод Гаусса. Однородные системы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

РАЗДЕЛ 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

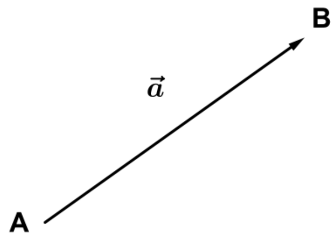
ТЕМА 1.1 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Понятие вектора

Направленным отрезком или *связанным вектором* называют отрезок прямой, одна из граничных точек которого принята за начало, а другая – за конец. Направленный отрезок началом которого является точка A, а концом – точка B, обозначают AB.

Если для направленного отрезка AB фиксируются только длина и направление (при произвольности его положения на плоскости и в пространстве), то он называется *свободным вектором.* Обозначается символом $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Векторы также обозначают одной буквой с чертой над ней, например, $\vec{\mathrm{a}}$. Направление вектора на рисунке (рис. 1) указывают стрелкой



(рис. 1)

Длиной или *модулем* вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$ или просто 0. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* и обозначается $\vec{\mathrm{e}}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{\mathrm{a}}$, называется *ортом* вектора $\vec{\mathrm{a}}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными* (параллельными), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, при этом пишут $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Отметим, что коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково (сонаправлены) или противоположно направлены.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными ($\vec{a} = \vec{b}$), если выполнены два условия:

а) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;

б) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены.

Векторы, имеющие противоположные направления и равные длины, называются противоположными. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

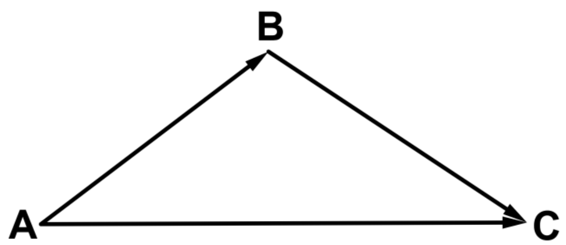
Два вектора называются *ортогональными,* если угол между ними равен 90°.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называют компланарными, если существует плоскость, которой они все параллельны. Отметим, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору, и поэтому компланарен с любыми двумя векторами.

Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называются сложение векторов и умножение векторов на число.

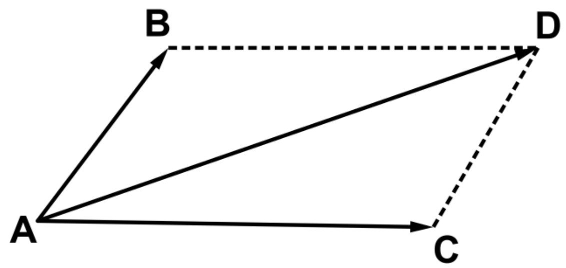
Рассмотрим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Тогда вектор $\vec{c}$, где $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 2).



(рис. 2)

Заметим, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то их сумму можно найти по так называемому правилу параллелограмма (рис. 3).

Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AD}$.



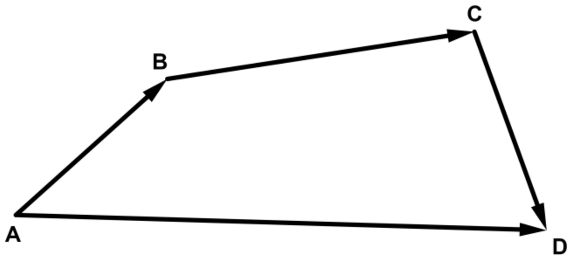
(рис. 3)

Под суммой $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ будем понимать вектор, который получается последовательным сложением данных векторов, т.е.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}.$$

Легко убедиться в том, что если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CD}$, то

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AD} \text{ (рис. 4).}$$



(рис. 4)

Аналогично определяется сумма n векторов.

Разностью $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, равный сумме векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, т.е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

Легко проверить справедливость следующих утверждений:

1. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует единственный вектор $\vec{a}+\vec{b}$.
2. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность).
3. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (ассоциативность).

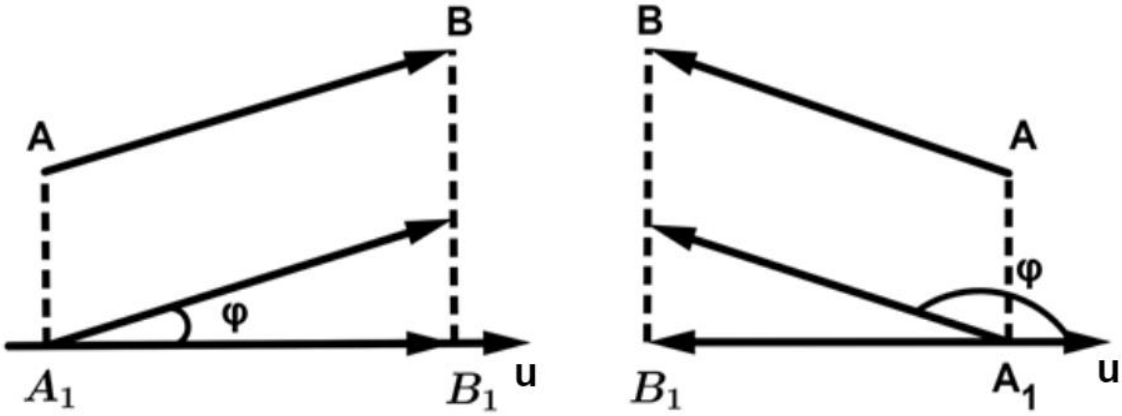
Произведением вектора $\vec{a}$ на число α (или числа α на вектор $\vec{a}$) называется вектор $\vec{b}$, такой, что $|b|=|\alpha||\vec{a}|$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, если $\alpha>0$, и противоположно направлены, если $\alpha<0$. Очевидно, что если $\vec{a}=0$, то $\alpha\vec{a}=0$ при любом α. Если $\alpha=0$, то $\alpha\vec{a}=0$ при любом $\vec{a}$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число α будем обозначать $\alpha\vec{a}$ (или $\vec{a}\alpha$).

1. Для любого вектора $\vec{a}$ и произвольного числа α существует единственный вектор $\alpha\vec{a}$.
2. $\alpha(\beta\vec{a})=\beta(\alpha\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a} \quad (\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{R})$.
3. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b} \quad (\alpha\in\boldsymbol{R})$.
4. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a} \quad (\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{R})$.

Проекция вектора на ось

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ *на ось* u называется положительное число равное длине отрезка A_1B_1 на оси u, которае обозначается $np_u\overrightarrow{AB}$ (рис. 5).



(рис. 5)

$A_1B_1 = |\overrightarrow{A_1B_1}|$, если направление $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси u; $A_1B_1 = -|\overrightarrow{A_1B_1}|$, если направление $\overrightarrow{A_1B_1}$ противоположно направлению оси u.

Имеет место равенство

$$\boxed{np_u\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi}, \qquad (1.1),$$

где φ – угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и положительным направлением оси u.

Декартова система координат. Координаты точки

Системой координат в пространстве называется совокупность фиксированной точки *O* базиса $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$ (трех векторов не лежащих в одной плоскости).

Точка *O* называется началом координат. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. Прямая *Ox* называется осью абсцисс, прямая *Oy* – осью ординат, прямая *Oz* – осью аппликат.

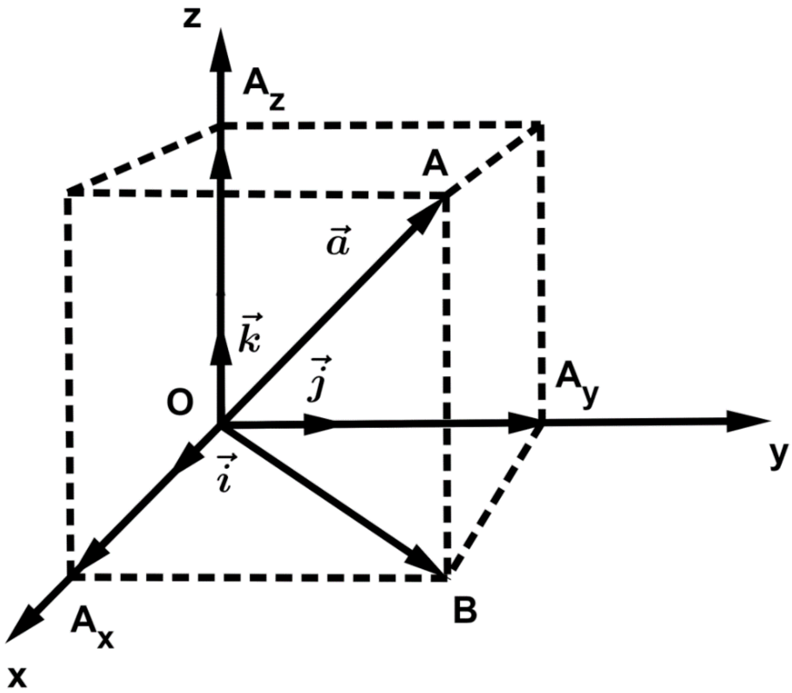
Пусть *A* произвольная точка. Вектор $\overrightarrow{OA}$ называется радиус-вектором точки *A* по отношению к точке *O*. Координаты радиус-вектора точки *A* по отношению к точке *O* называются координатами точки *A* в данной системе координат.

Если базисные векторы попарно ортогональны и имеют длину, равную единице, то такой базис называется *ортонормированным.*

Декартова система координат с ортонормированным базисом называется *прямоугольной.*

Разложение вектора по базису

Рассмотрим декартову систему координат *Oxyz*. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы соответствующих осей координат *Ox*, *Oy*, *Oz*, т.е. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = \left|\vec{k}\right| = 1$, и каждый из них одинаково направлен с соответствующей осью координат (рис. 6).



(рис. 6)

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется базисом.

Теорема: Любой вектор $\vec{a}$ можно единственным образом разложить по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т.е. представить в виде $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, где a_x, a_y, a_z – числа.

Разложение радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ по ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет вид $\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ или $\overrightarrow{OA} = (x, y, z)$.

Если в декартовой системе координат заданы точки $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$, тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находятся по формуле:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)} \qquad (1.2).$$

Если вектора заданы координатами: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)} \qquad (1.3)$$

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)} \qquad (1.4)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, то $\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}}$ (1.5).

Деление отрезка в данном отношении

Разделить отрезок AB в отношении λ ($\lambda \neq -1$) – это значит на прямой, проходящей через точки A и B, найти такую точку C, чтобы $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{CB}}$. Очевидно, что если $\lambda > 0$, то точка C лежит внутри отрезка AB, если $\lambda < 0$, то точка C лежит вне отрезка AB.

Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ даны точки $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$. Найдем на отрезке AB точку $\mathrm{C}(x, y, z)$, делящую отрезок AB в отношении λ.

Рассмотрим векторы

$\overrightarrow{AC}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ и $\overrightarrow{CB}(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$.

Так как $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, то $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$; $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$; $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$.

Из этих равенств получаем:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}} \qquad (1.6).$$

В частности, при $\lambda = 1$ имеем:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ \ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ \ z = \frac{z_1 + z_2}{2}} \qquad (1.7),$$

т.е. каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из двух векторов нулевой, то их скалярное произведение по определению считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $(\vec{a}, \vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Итак,

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}) = |a||b| \cos\varphi} \qquad (1.8),$$

где φ – угол между данными векторами.

Так как $|b| \cos\varphi$ есть проекция вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$($\text{пр}_a\ \vec{b}$), а $|\vec{a}| \cos\varphi$ – проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$($\text{пр}_b\,\vec{a}$), то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно представить в следующем виде:

$$\boxed{\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}|\ \text{пр}_a\,\vec{b}} \qquad (1.9)$$

$$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|\,\text{пр}_b\,\vec{a}} \qquad (1.10).$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a}\,)$ (*коммутативность*).

Справедливость этого свойства следует из определения скалярного произведения.

2. $\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right)=\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.
3. $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=(\vec{a},\vec{c})+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$ (*дистрибутивность*).
4. Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его длины ,т.е. $(\vec{a}\,,\vec{a})=|a|^2$.

Теорема: *Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.*

Пусть в декартовой системе координат даны векторы $\vec{a}=x_1\vec{\imath}+y_1\vec{\jmath}+z_1\vec{k},\ \ \vec{b}=x_2\vec{\imath}+y_2\vec{\jmath}+z_2\vec{k}$. Тогда скалярное произведение этих векторов можно найти по формуле:

$$\boxed{\left(\vec{a}\,,\vec{b}\right)=\left(x_1\vec{\imath}+y_1\vec{\jmath}+z_1\vec{k},\ x_2\vec{\imath}+y_2\vec{\jmath}+z_2\vec{k}\right)=x_1x_2\ +y_1y_2+z_1z_2} \quad (1.11).$$

Соответственно $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2={x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2$, откуда

$$\boxed{|a|=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}} \qquad (1.12).$$

Тогда угол φ между ненулевыми векторами можно найти, применив формулу скалярного произведения в виде:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|a||b|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}}} \qquad (1.13).$$

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно равно α,β,γ. Тогда по свойству проекции вектора на ось, имеем

$$x_1=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha,\quad y_1=|\vec{a}|\cdot\cos\beta,\quad z_1=|\vec{a}|\cdot\cos\gamma.$$

Или, что то же самое,

$$\cos\alpha=\frac{x_1}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{y_1}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{z_1}{|\vec{a}|}$$

Числа $\cos\alpha\,,\cos\beta\,,\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.

Подставляя выражение $x_1=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha\,,\ y_1=|\vec{a}|\cdot\cos\beta,\ \ z_1=|\vec{a}|\cdot\cos\gamma$ в равенство $|\vec{a}|=x_1^2+y_1^2+z_1^2$, получаем $|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2\cdot cos^2\alpha+|\vec{a}|^2\cdot cos^2\beta+|\vec{a}|^2\cdot cos^2\gamma$.

Сократив на $|\vec{a}|^2 \neq 0$, получим соотношение

$$\boxed{cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1} \qquad (1.14),$$

т.е. ***сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.***

Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, для которого

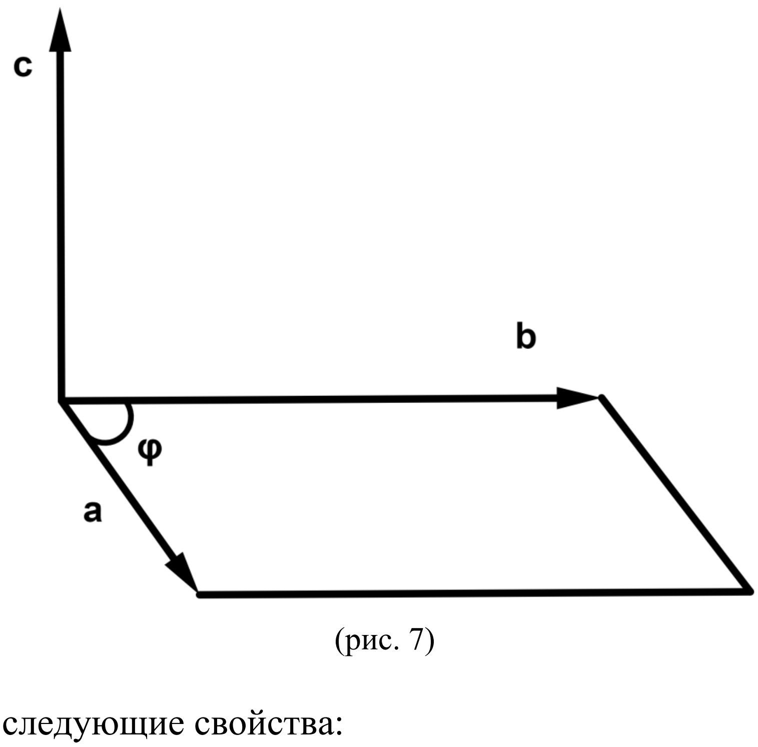
$$\boxed{|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi} \qquad (1.15),$$

ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, что $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Если векторы коллинеарны, то их векторное произведение по определению считается равным нулевому вектору.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Легко убедиться, что если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то $|[\vec{a}, \vec{b}]|$ численно равен площади S параллелограмма, сторонами которого являются AB и AC, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, т.е. $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$ (рис. 7).



(рис. 7)

Имеют место следующие свойства:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.

Справедливость этого свойства следует из определения векторного произведения векторов. Таким образом, векторное произведение не обладает коммутативным свойством.

2. $\quad [\alpha\vec{a},\vec{b}] = \alpha[\vec{a},\vec{b}] \quad (\alpha \in R).$

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, $\alpha \neq 0$, φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда $\left|[\alpha\vec{a},\vec{b}]\right| = |\alpha\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\alpha||\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\alpha|\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = \left|\alpha[\vec{a},\vec{b}]\right|$.

Вектор $[\alpha\vec{a},\vec{b}]$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если $\alpha > 0$, то векторы $\vec{a},\vec{b},[\vec{a},\vec{b}]$ и $\alpha\vec{a},\vec{b},[\alpha\vec{a},\vec{b}]$ образуют тройки одной и той же ориентации.

Если $\alpha < 0$, то векторы $\vec{a},\vec{b},[\vec{a},\vec{b}]$ и $\alpha\vec{a},\vec{b},[\alpha\vec{a},\vec{b}]$ образуют тройки различных ориентаций, а следовательно, векторы $\vec{a},\vec{b},\alpha[\vec{a},\vec{b}]$ и $\alpha\vec{a},\vec{b},[\alpha\vec{a},\vec{b}]$ образуют тройки одной и той же ориентации.

3. $\quad [\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}].$

Теорема. *Векторное произведение двух ненулевых векторов есть нулевой вектор тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны.*

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, имеющей правую ориентацию, даны векторы $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Тогда

$$[\vec{a},\vec{b}] = [x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ \ x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}] \text{ или}$$

$$[\vec{a},\vec{b}] = x_1x_2[\vec{i},\vec{i}] + x_1y_2[\vec{i},\vec{j}] + x_1z_2[\vec{i},\vec{k}] + y_1x_2[\vec{j},\vec{i}] + y_1y_2[\vec{j},\vec{j}] + y_1z_2[\vec{j},\vec{k}] + z_1x_2[\vec{k},\vec{i}] + z_1y_2[\vec{k},\vec{j}] + z_1z_2[\vec{k},\vec{k}].$$

Входящие в это равенство векторные произведения $[\vec{i},\vec{i}], [\vec{j},j], [\vec{k},\vec{k}]$ являются нулевыми векторами вследствие коллинеарности сомножителей.

Векторное произведение $[\vec{i},\vec{j}]$ есть вектор, модуль которого равен $|\vec{i}||\vec{j}|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Этот вектор коллинеарен вектору $\vec{k}$ и направлен в ту же сторону, следовательно $[\vec{i},\vec{j}] = \vec{k}$. Аналогично находим $[\vec{j},\vec{k}] = \vec{i}, [\vec{k},\vec{i}] = \vec{j}$. На основании свойства имеем $[\vec{j},\vec{i}] = -\vec{k},\ [\vec{k},\vec{j}] = -\vec{i},\ [\vec{i},\vec{k}] = -\vec{j}$. Подставляя найденные произведения, получаем

$$[\vec{a},\vec{b}] = x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i}$$

или

$$[\vec{a},\vec{b}] = \vec{i}(y_1z_2 - z_1y_2) - \vec{j}(x_1z_2 - z_1x_2) + \vec{k}(x_1y_2 - y_1x_2).$$

Это равенство может быть символически записано в виде

$$\boxed{[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}} \qquad (1.16).$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение $[\vec{a},\ \vec{b}]$ умножаем скалярно на $\vec{c}$. Смешанное произведение векторов $\vec{a}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b}\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ и $\vec{c}\ (x_3,\ y_3,\ z_3)$ будем обозначать $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$. Таким образом,

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$$

$$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3,$$

т.е.

$$\boxed{(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} \qquad (1.17).$$

Теорема. Необходимым и достаточным условием компланарности трех ненулевых векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Теорема. *Если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \vec{c} = \overrightarrow{AD}$ – некомпланарные векторы, то модуль смешанного произведения этих векторов численно равен объёму параллелепипеда, ребрами которого являются $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$* и $\overrightarrow{AD}$.

ТЕМА 1.2. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Уравнение вида $\boxed{y = kx + b}$ (1.18)
называют уравнением прямой с угловым коэффициентом k, где $k = tg\alpha$. (Тангенс угла наклона прямой к оси *Ox*.)

Если $k = 0$,то прямая параллельна оси *Ox* ,и ее уравнение имеет вид $y = b$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом.

Если прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1)$,то уравнение имеет вид

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)} \qquad (1.19).$$

Уравнение прямой проходящей через две данные точки.

Если даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_{2;}\, y_2)$, то уравнение может иметь вид

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}} \qquad (1.20).$$

Общее уравнение прямой.

Уравнение вида $$\boxed{Ax + By + C = 0} \quad (1.21)$$
называется общим уравнением. При различных значениях A,B,C оно определяет всевозможные прямые.

Если $C = 0$, то уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат.

Если $B = 0, (A\neq 0)$,то уравнение определяет прямую , параллельную оси Oy.

Если $A = 0$ $(B \neq 0)$,то уравнение определяет прямую ,параллельную оси Ox.

Уравнение прямой в отрезках.

Уравнение вида $$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \quad (1.22)$$
называется уравнением прямой «в отрезках». Числа a и b являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат.

Взаимное расположение прямых на плоскости.

№	Вид прямых / Расположение	$y = k_1x + b_1$ $y = k_2x + b_2$	$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $A_2x + B_2y + C_2 = 0$
1	Пересекаются	$k_1 \neq k_2$	$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$
2	Параллельны	$k_1 = k_2;\ b_1 \neq b_2$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
3	Совпадают	$k_1 = k_2;\ b_1 = b_2$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$
4	Перпендикулярны	$k_1 \cdot k_2 = -1$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
5	Угол φ между прямыми	$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$	$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$

Расстояние от точки до прямой на плоскости.

Пусть задана прямая $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$, не лежащая на данной прямой. Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до данной прямой находится по формуле
$$\boxed{\mathrm{d} = \frac{|Ax_0+By_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2}}} \quad (1.23).$$

ТЕМА 1.3 ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

Пусть заданы прямоугольная система координат $Oxyz$,точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n} = (A; B; C)$. Уравнение плоскости, проходящей через точкуM_0перпендикулярно вектору $\vec{n}$ имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Вектор $\vec{n}$называется нормальным вектором данной плоскости.

Раскрыв скобки в данном уравнении и обозначив $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, получим вид

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \qquad (1.24).$$

Этот вид называется *общее уравнение плоскости*.

Неполные уравнения плоскости.

1) Если $D = 0$, то $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат, т.к. точка $O(0; 0; 0;)$ принадлежит этой плоскости.

2) Если $A = 0$, то уравнение $By + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox.

3) Если $B = 0$, то уравнение $Ax + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Oy.

4) Если $C = 0$, то уравнение $Ax + By + D = 0$ – плоскость, параллельную Oz.

5) Если $A = 0$ и $B = 0$, то уравнение $Cy + D = 0$ – плоскость, параллельную координатной плоскости Oxy.

6) Если $B = 0$ и $C = 0$, то уравнение $Ax + D = 0$ – плоскость, параллельную плоскости Oyz.

7) Если $A = 0$ и $C = 0$, то уравнение $By + D = 0$ – плоскость, параллельную координатной плоскости Oxy.

8) Если $A = 0$, $B = 0$ и $D = 0$, то уравнение $Cz = 0$ – определяет координатную плоскость Oxy.

9) Если $B = 0$, $C = 0$ и $D = 0$, то уравнение $Ax = 0$ – координатную плоскость Oyz

10) Если $A = 0$, $C = 0$ и $D = 0$, то уравнение $By = 0$ – координатную плоскость Oxz.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Пусть плоскость задана тремя точками: $A(x_1; y_1; z_1)$ $B(x_2; y_2; z_2)$; $C(x_3; y_3; z_3)$. Тогда уравнение плоскости можно записать в виде

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0} \quad (1.25).$$

Уравнение плоскости в отрезках.

Полное уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ можно записать в виде

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

Отсюда, полагая $-\frac{D}{A}=a, -\frac{D}{B}=b, -\frac{D}{\text{С}}=\text{с}$, получим

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1} \quad (1.26).$$

Данное уравнение называется *уравнением плоскости в «отрезках»*, т.к. знаменатели a, b, c есть величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

Расстояние от точки до плоскости.

Пусть задана плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и точка $\text{М}_1(x_1;y_1;z_1)$ не лежащая в данной плоскости, тогда расстояние d от точки до плоскости находится по формуле

$$\boxed{d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

№	Расположение плоскостей	Плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$
1	Пересекаются	$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ или $\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$
2	Параллельны	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$
3	Совпадают	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$
4	Перпендикурярны	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Угол между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется по формуле

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}} \quad (1.27).$$

ТЕМА 1.4 ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Общие уравнения прямой в пространстве.

Прямая может быть задана пересечением двух плоскостей:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}} \quad (1.28).$$

Каноническое уравнение прямой.

Пусть в пространстве задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и $\vec{s}(l; m; p)$ – направляющий вектор прямой MM_0 ,где M произвольная точка искомой прямой. Тогда по условию коллинеарности векторов можно записать

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}} \quad (1.30)$$

– каноническое уравнение прямой в пространстве.

Параметрическое уравнение прямой.

Пусть $\begin{cases} \frac{x - x_0}{l} = t \\ \frac{y - y_0}{m} = t \\ \frac{z - z_0}{p} = t \end{cases}$, где t некоторое число (параметр). Тогда можно записать уравнение прямой в виде

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + pt \end{cases}} \quad (1.31)$$

– параметрическое уравнение прямой в пространстве.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

	Расположение прямых	Прямые $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$

	Лежат в одной плоскости (параллельные или перпендикулярные)	$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$ Т.е. векторы компланарны, а значит смешанное произведение равно нулю
	Не лежат в одной плоскости (скрещиваются)	$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0$
	Параллельные	$(\Delta=0)$; $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2}$
	Пересекающиеся	$(\Delta=0)$; $\frac{l_1}{l_2}\neq\frac{m_1}{m_2}\neq\frac{p_1}{p_2}$
	Перпендикулярные	$(\Delta=0)$ $l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2=0$

Угол между прямыми $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$

$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$

можно найти с помощью формулы

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}\sqrt{m_2{}^2+n_2{}^2+p_2{}^2}}} \qquad (1.32).$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

	Расположение прямой и плоскости	Прямая $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$ Плоскость $Ax+By+Cz+D=0$
1	Параллельны	$Al+Bm+Cp=0$
2	Перпендикулярны	$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{p}$
3	Прямая лежит в плоскости	Одновременное выполнение равенств $Ax+By+Cz+D=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, где $M_0(x_0;y_0;z_0)$ принадлежит плоскости

Угол между прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$ *и плоскостью* $Ax+By+Cz+D=0$ можно найти с помощью формулы

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+p^2}}} \qquad (1.33).$$

ТЕМА 1.5 ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Кривой второго порядка называется кривая, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$\boxed{Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0} \qquad (1.34)$$

причем не все коэффициенты A, B, C одновременно равны нулю (в противном случае кривая второго порядка – прямая, т.е. кривая первого порядка).

В общем случае может оказаться, что уравнение $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx++Ey+F=0$ определяет *вырожденную кривую* (пустое множество, точку, прямую, пару прямых).

Если же кривая – невырожденная, то для нее найдется такая прямоугольная система координат, в которой *каноническое уравнение* этой кривой имеет один из следующих видов:

Если $\boldsymbol{A}=\mathrm{C}$**,** то данная линия представляет собой *окружность* .

Если $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}>0$, то линия *эллиптического типа* (т.е. данную кривую называют *эллипсом*).

Если $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}>0$**,** то линия *гиперболического типа* (т.е. данную кривую называют *гиперболой*).

Если $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\mathbf{0}$**,** то линия *параболического типа (*т.е. данную кривую называют *параболой*).

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *центром*. Если R – радиус окружности, а точка $C(a,b)$ – ее центр, то уравнение окружности имеет вид

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2} \qquad (1.35).$$

Если центр окружности совпадает с точкой $O(0,0)$, то ее уравнение записывается в виде

$$x^2+y^2=R^2.$$

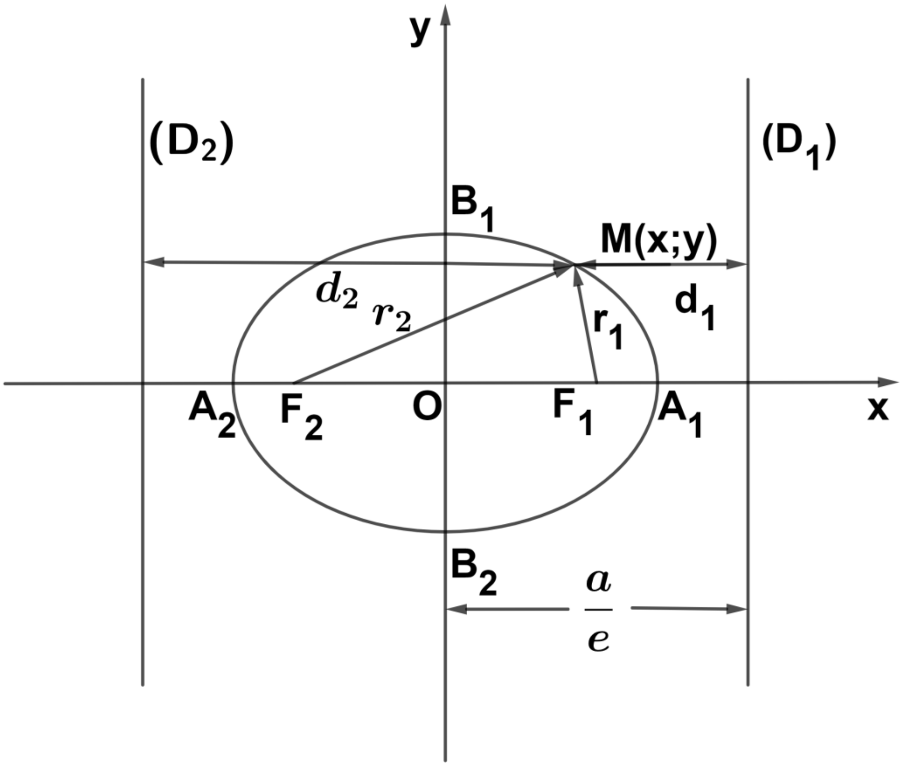
Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек той же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), бóльшая, чем расстояние между фокусами.

Если оси координат расположены так, что ось Ox проходит через фокусы $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, а точка $O(0{,}0)$ совпадает с серединой отрезка F_1F_2 , то из равенства $F_1M+F_2M=2a$ получаем *простейшее (каноническое) уравнение эллипса*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{1.36}$$

$$(b^2=a^2-c^2).$$

Точки $A_1(a,0), A_2(-a,0), B_1(0,b), B_2(0,-b)$ называются *вершинами эллипса*. Центр симметрии $O(0{,}0)$ называется *центром эллипса* (рис. 8).



(рис. 8)

Параметры a и b называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса*, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ – *фокальными радиус-векторами точки* M, принадлежащей эллипсу, а числа $r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $r_2=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ – *фокальными радиусами точки* M.

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом* $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ (так как $c<a$, то $e<1$). При $e=0$, т.е. $a=b$, эллипс является окружностью.

Прямые $(D_1)\colon x = \frac{a}{e}$ и $(D_2)\colon x = -\frac{a}{e}$, перпендикулярные к большой оси эллипса и проходящие на расстоянии $\frac{a}{e}$ от его центра, называется *директрисами эллипса*.

Для эллипса справедливы равенства:

$$\frac{r_1}{d_1} = e, \qquad \frac{r_2}{d_2} = e,$$

где d_1 и d_2 – расстояния от точки $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу, до директрис, ближайших к фокусам F_1 и F_2, соответственно.

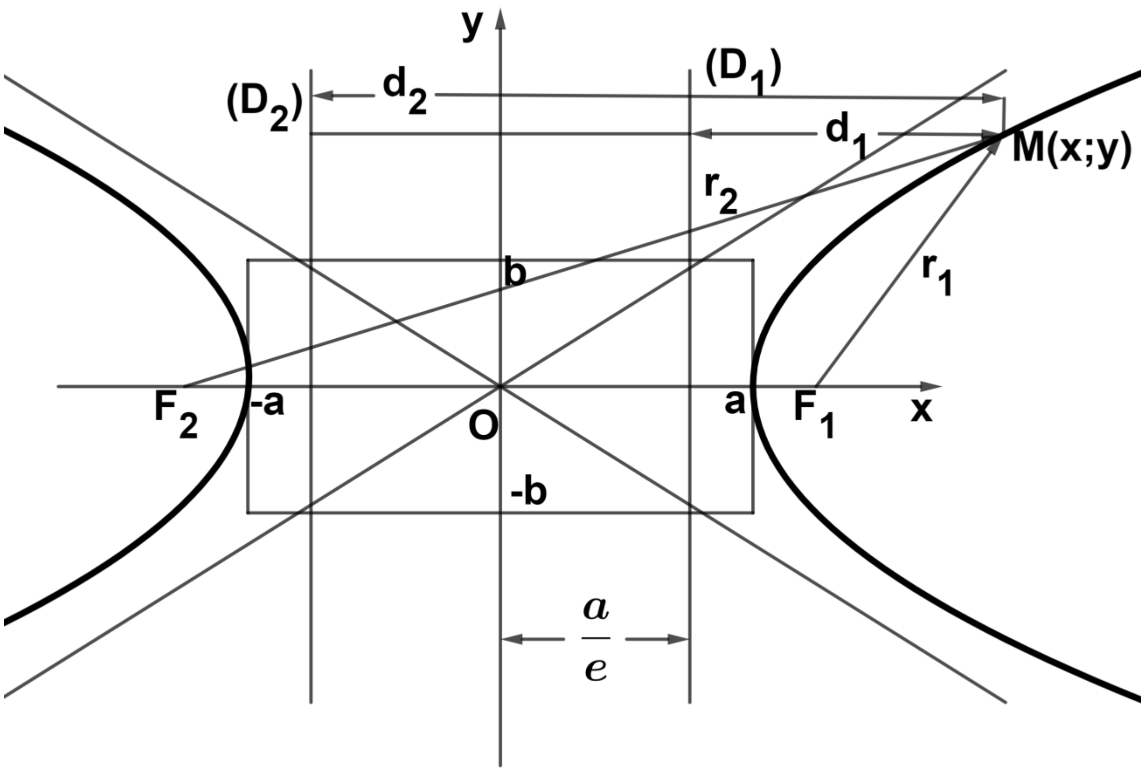
Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух данных точек той же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), меньшая, чем расстояние между фокусами.

Если ось Ox проходит через фокусы $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, а точка $O(0,0)$ – середина отрезка F_1F_2, то из равенств $|F_2M - F_1M| = 2a,\ r_2 - r_1 = \pm 2a$ получаем *каноническое уравнение гиперболы*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (1.37)$$

$$(b^2 = c^2 - a^2).$$

Параметры a, b – называются *полуосями гиперболы*, точки $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$ – ее *вершинами*, оси $Ox,\ Oy$ – *действительной и мнимой осями*, а центр симметрии O – *центром гиперболы*. Векторы $\overrightarrow{F_1M},\ \overrightarrow{F_2M}$ – *фокальные радиусы-векторы точки* M, принадлежащей гиперболе, а числа $r_1,\ r_2$ – *фокальные радиусы точки* M (рис. 9).



(рис. 9)

Прямая называется *асимптотой гиперболы*, если расстояние от точки $M(x, y)$ гиперболы до этой прямой стремится к нулю при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm\frac{b}{a}x$. Число

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$$

называется *эксцентриситетом гиперболы* и характеризует ее форму. Если $a = b$, то гипербола называется *равносторонней*.

Прямые (D_1): $x = \frac{a}{e}$ и (D_2): $x = -\frac{a}{e}$, перпендикулярные к действительной оси гиперболы и проходящие на расстоянии $\frac{a}{e}$ от ее центра, называются *директрисами гиперболы*.

Директрисы гиперболы обладают следующим свойством: отношение расстояния от любой точки гиперболы до какого-либо фокуса к расстоянию от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету, т.е.

$\frac{r_i}{d_i} = e,\ i = 1, 2.$

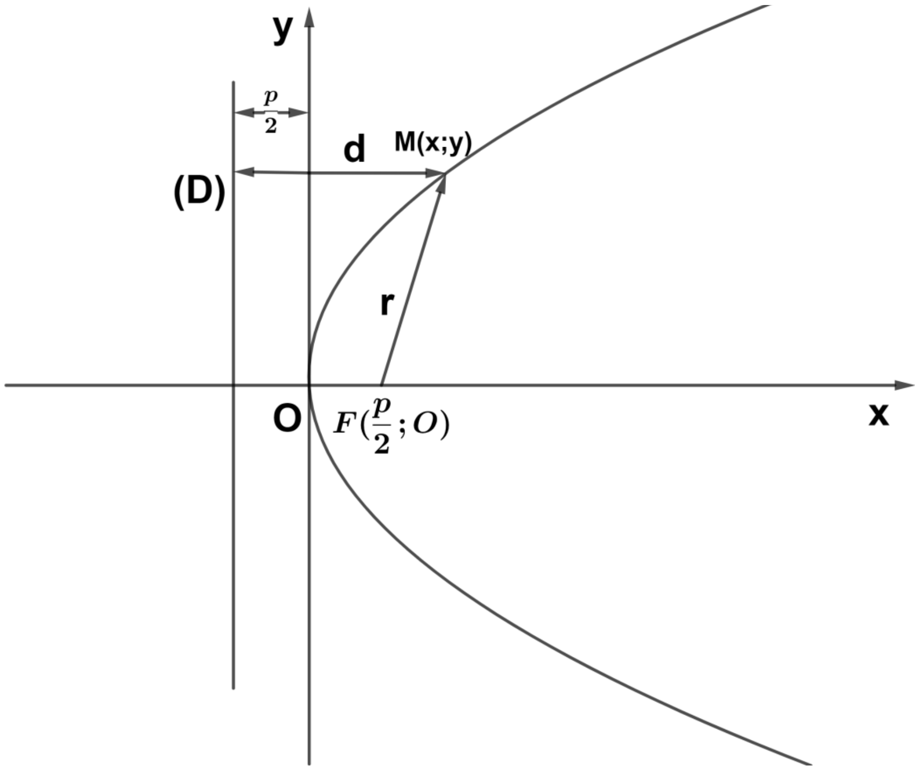
Уравнение $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ так же является уравнением гиперболы, где

Ox – мнимая ось, а Oy – действительная ось.

Параболой называется множество точек плоскости, равноотстоящих от данной точки этой плоскости, называемой *фокусом*, и данной прямой той же плоскости, называемой *директрисой*. Если директрисой параболы является прямая $x = -\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, то имеем *каноническое уравнение параболы*

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad (1.38).$$

Парабола, заданная таким уравнением, расположена симметрично относительно оси абсцисс. Число $p > 0$ называется *параметром параболы*, точка O – *ее вершиной*, вектор $\overrightarrow{FM}$ – *фокальным радиусом-вектором точки* M параболы, а число $r = |\overrightarrow{FM}|$ – *фокальным радиусом точки* M (рис. 10).



(рис. 10)

Если осью симметрии параболы служит ось ординат, то уравнение параболы имеет вид

$$\boxed{x^2 = 2py} \qquad (1.39).$$

Длина фокального радиуса-вектора параболы $y^2 = 2px$ определяется по формуле $r = x + \frac{p}{2}$. Прямая $(D){:}\, x = -\frac{p}{2}$ является *директрисой параболы* $y^2 = 2px$, а прямая (D'): $y = -\frac{p}{2}$ – *директрисой параболы* $x^2 = 2py$. Для параболы $r = d$, где d – расстояние от точки $M(x, y)$, принадлежащая параболе, до соответствующей директрисы.

ТЕМА 1.6 ПОВЕРХНОСТИ И КРИВЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

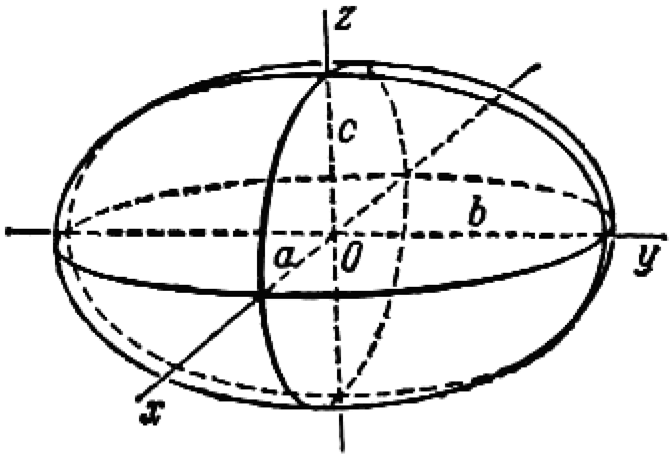
Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Lz + K = 0} \quad (1.40)$$

В этом уравнении не все коэффициенты при членах второго порядка одновременно равны нулю, т.к. иначе данная поверхность была бы плоскостью.

В общем случае может оказаться, что это уравнение определяет вырожденную поверхность (пустое множество, точку, плоскость, пару плоскостей, прямую). Если же поверхность – невырожденная, то ее уравнение может быть приведено к одному из пяти видов (эллипсоиды, гиперболоиды, конусы, параболоиды и цилиндры) называемых *каноническими* и определяющих тип поверхности:

Эллипсоид (рис. 11), его уравнение $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$. (1.41)

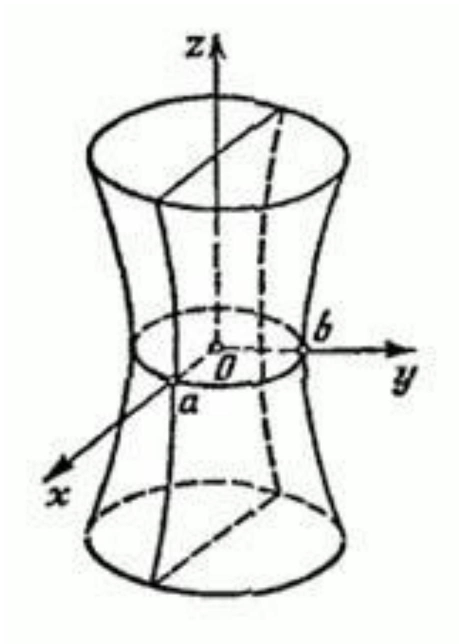


(рис. 11)

При $a = b = c$ получим уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Однополосный гиперболоид (рис. 12), его уравнение

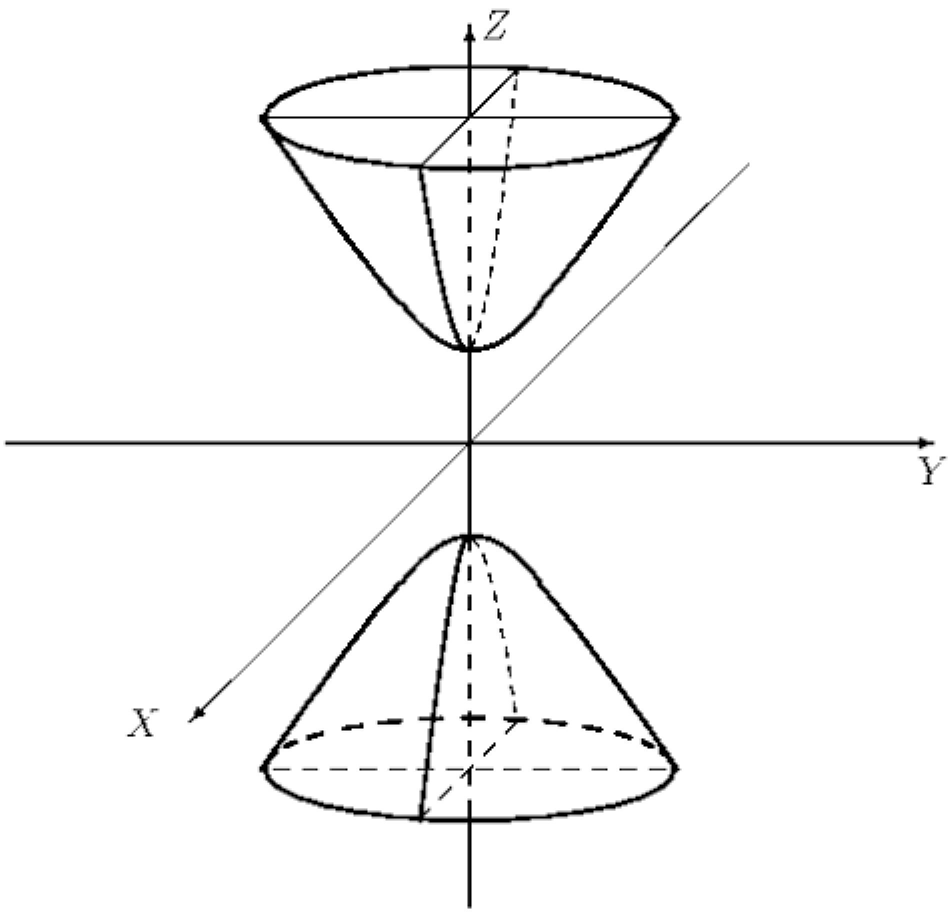
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad (1.42)$$



(рис. 12)

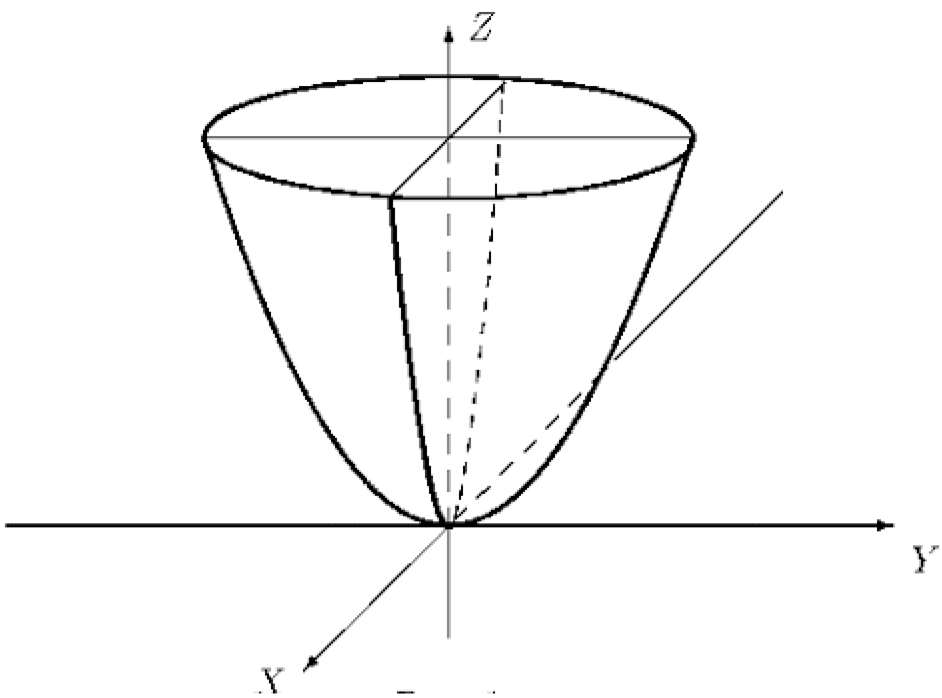
Двуполостный гиперболоид (рис. 13), его уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}\,. \tag{1.43}$$



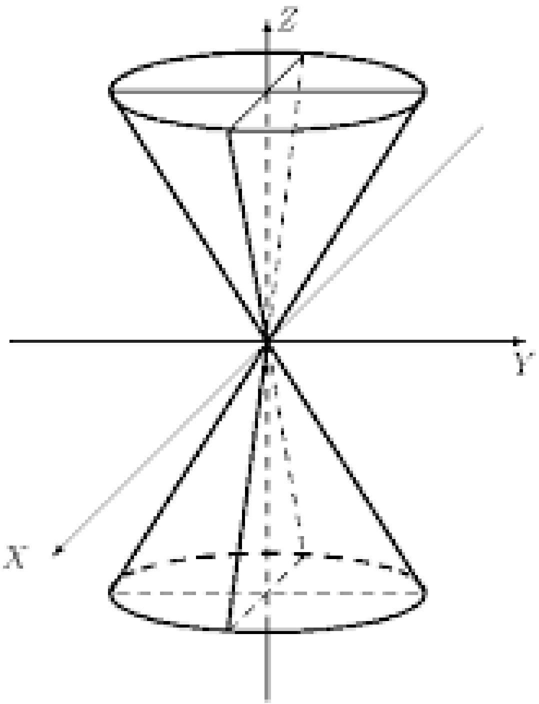
(рис. 13)

Эллиптический параболоид (рис. 14), его уравнение $\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$. (1.44)



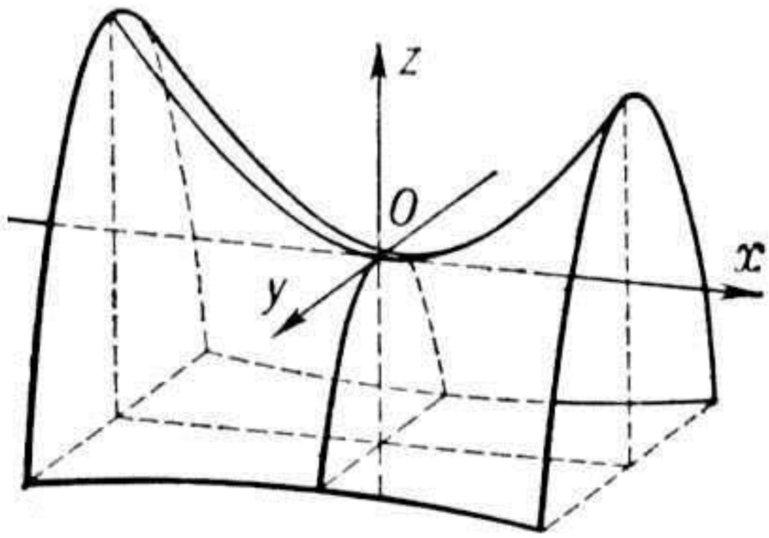
(рис. 14)

Конус второго порядка (рис. 15), его уравнение $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}$ (1.45)



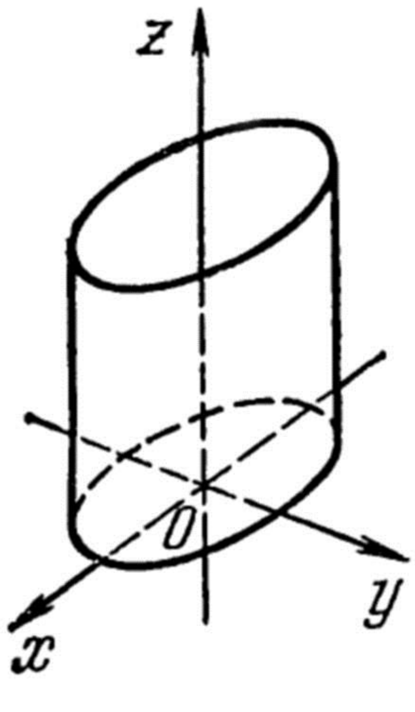
(рис. 15)

Гиперболический параболоид (рис. 16), его уравнение $\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ (1.46)



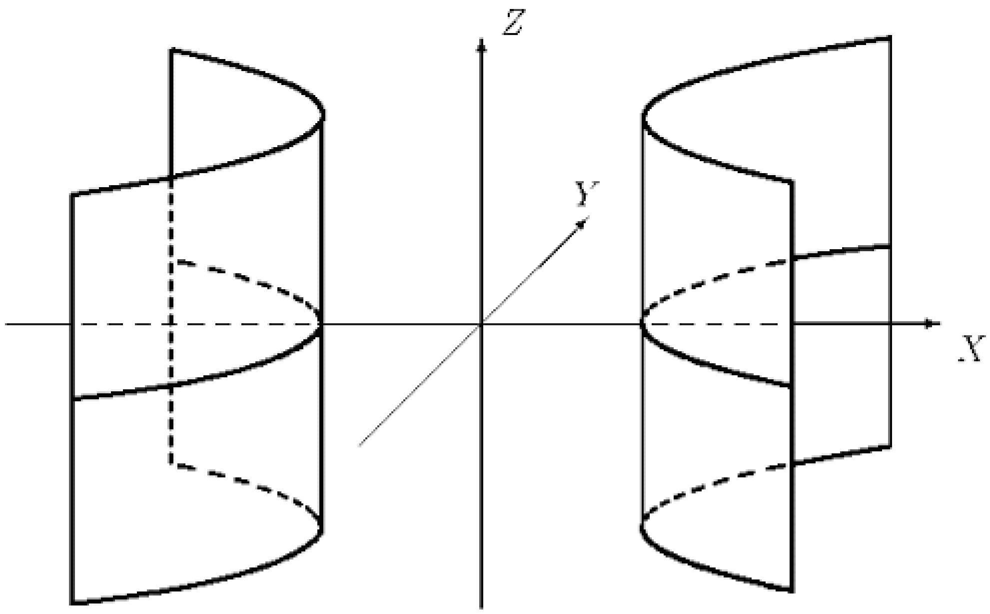
(рис. 16)

Эллиптический цилиндр (рис. 17), его уравнение $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ (1.47)



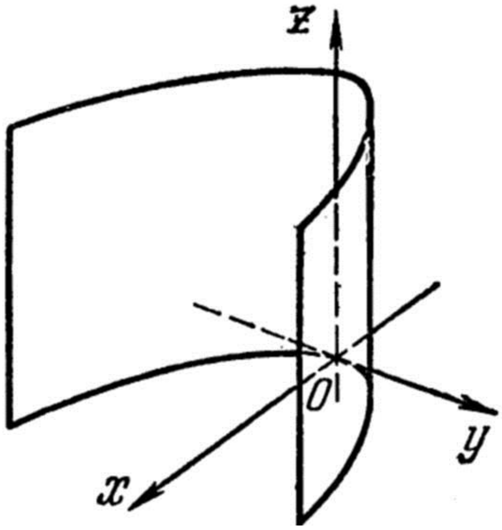
(рис. 17)

Гиперболический цилиндр (рис. 18), его уравнение $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ (1.48)



(рис. 18)

Параболический цилиндр (рис. 19), его уравнение $\boxed{y^2 = 2px}$ (1.49).



(рис. 19)

При $D = 0, E = 0, F = 0$ общее уравнение поверхности принимает вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Lz + K = 0$$

В этом случае приведение общего уравнения к каноническому виду достигается с помощью метода выделения полных квадратов и параллельного переноса осей координат.

Основным методом исследования формы поверхности второго порядка *является метод параллельных сечений,* который состоит в том, что поверхности пересекаются координатными плоскостями и плоскостями, параллельными им, а затем на основании вида полученных в сечениях линий задается вывод о форме исходной поверхности.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1: Даны точки $A(1;2;1)$, $B(0;-1;1)$, $C(3;1;2)$, $D(1;0;-1)$. Найти:

1) координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$;

2) длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

3) координаты вектора $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$;

4) проверить коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Решение:

1) Для нахождения координат вектора $\overrightarrow{AB}$ нужно от координаты точки B вычесть соответствующую координату точки A, т.е. $\overrightarrow{AB}=(0-1;-1-2;1-1)=(-1;-3;0)$. Аналогично находим координаты вектора $\overrightarrow{CD}=(1-3;0-1;-1-2)=(-2;-1;-3)$.

2) Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ или $|\overrightarrow{AB}|$ находится по формуле: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+0^2}=\sqrt{1+9+0}=\sqrt{10}$.

3)$3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}=3(-1;-3;0)-2(-2;-1;-3)=(-3;-9;0)++(4;2;6)=(1;-7;6)$.

4) Т.к. у коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны, то можно записать для векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$: $\frac{-1}{-2}\neq\frac{-3}{-1}\neq\frac{0}{-3}$. Это означает, что $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не коллинеарны.

Ответ: 1) $(-2;-1;-3)$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $(1;-7;6)$; 4) не коллинеарны.

Пример 2: Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие, что $|\vec{a}|=\sqrt{2}; \left|\vec{b}\right|=2$; угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°.

Найти:

1) скалярное произведение векторов $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$;

2) скалярный квадрат вектора $\vec{m}$.

Решение:

1) $\vec{m}\cdot\vec{n}=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}--2\left|\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin 45^\circ-2\left|\vec{b}\right|^2=2+\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot 4=-4$

2) $\vec{m}\cdot\vec{n}=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 45^\circ+\left|\vec{b}\right|^2=2+4\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+4=14$.

Ответ: 1) -4; 2) 14.

Пример 3: Найти при каком значении α, векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} + + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ ортогональны.

Решение:

Векторы $\vec{a}(\alpha; 3; 5)$ и $\vec{b}(\alpha; 2; -\alpha)$ ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha \cdot \alpha + 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-\alpha) = 0 \;\; => => \;\; \alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$. Решив квадратное уравнение получаем $\alpha = 2$ или $\alpha = 3$.

Ответ: 2; 3.

Пример 4: Даны векторы $\vec{a}(3; -5; 8)$; $\vec{b}(1; 5; 0)$ и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Вычислить проекцию вектора $3\vec{a} - 2\vec{b}$ на вектор c⃗.

Решение:

Пусть вектор $3\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{d}$, тогда $\vec{d} = 3(3; -5; 8) - 2(1; 5; 0) =$
$= (9; -15; 24) - (2; 10; 0) = (7; -25; 24)$.

А вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (3; -5; 8) + (1; 5; 0) = (4; 0; 8)$.

Согласно формуле $np_{\vec{c}}\vec{d} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}|}$ запишем:

$$np_{\vec{c}}\vec{d} = \frac{4 \cdot 7 + 0 \cdot (-25) + 8 \cdot 24}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 8^2}} = \frac{220}{4\sqrt{5}} == 11\sqrt{5}.$$

Ответ: $11\sqrt{5}$.

Пример 5: Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, причем $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$;
$|\vec{p}| = \sqrt{2}$; $|\vec{q}| = 2$ и угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен 45°.

Решение:

Площадь параллелограмма будет численно равно модулю векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Т.е. $|[(2\vec{p} - 3\vec{q})(\vec{p} + 2\vec{q})]| = |2[\vec{p}; \vec{p}] + 4[\vec{p}; \vec{q}] - 3[\vec{q}; \vec{p}] - 6[\vec{q}; \vec{q}]| =$

(т.к. $[\vec{p}; \vec{p}] = [\vec{q}; \vec{q}]$=0 и $[\vec{p}; \vec{q}] = -[\vec{q}; \vec{p}]$ по свойству векторного произведения)

$$= |7[\vec{p}; \vec{q}]| = 7|[\vec{p}; \vec{q}]| = 7 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin 45° = 7 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14\text{ед}^2.$$

Ответ: 14ед^2.

Пример 6: Найти координаты вектора $\vec{c}$, равного векторному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, если $\vec{a}(1; -1; 2)$, $\vec{b}(3; 0; 1)$.

Решение:

Запишем векторное произведение векторов, заданных в координатах:

$$[\vec{a};\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} = -1\vec{i} + 5\vec{j} + + 3\vec{k}.$$

Ответ: $(-1; 5; 3)$.

Пример 7: В пространстве даны точки $A(3; 1; 4)$; $B(-1; 6; 1)$; $C(-1; 1; 6)$; $D(0; 4; -1)$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

Решение:

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$:

$\overrightarrow{BA} = (3 + 1; 1 - 6; 4 - 1) = (4; -5; 3)$;

$\overrightarrow{BC} = (-1 + 1; 1 - 6; 6 - 1) = (0; -5; 5)$;

$\overrightarrow{BD} = (0 + 1; 4 - 6; -1 - 1) = (1; -2; -2)$.

Т.к. объем пирамиды равен: $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}] \cdot \overrightarrow{BD}|$

$$[\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}] \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 70.$$

Значит $\mathrm{V} = \frac{1}{6} \cdot |70| = \frac{35}{3}$ ед^3.

Ответ: $\frac{35}{3}$ ед^3.

Пример 8: Даны векторы $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (3; -1; 4)$, $\vec{c} = (-2; 0; 1)$, $\vec{d} = (1; 3; 2)$ в некотором базисе. Показать, что $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение:

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ будут образовывать базис, если будут не компланарными, т.е. их смешанное произведение не будет равным нулю.

Проверим $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -23 \neq 0.$

Т.е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис.

Тогда $\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$

$(1; 3; 2) = x(1; 2; 0) + y(3; -1; 4) + z(-2; 0; 1)$.

Можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = x + 3y - 2z \\ 2 = 2x - y + 0z \\ 3 = 0x + 4y + z \end{cases}$$

Решим данную систему с помощью Формул Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -23$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -38$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

Тогда $x = \frac{-38}{-23} = \frac{38}{23}$, $\quad y = \frac{7}{23}$, $\quad z = \frac{18}{23}$.
Т.е. координаты вектора $\vec{d}\left(\frac{38}{23}; \frac{7}{23}; \frac{18}{23}\right)$.

Ответ: $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – образуют базис; $\vec{d}\left(\frac{38}{23}; \frac{7}{23}; \frac{18}{23}\right)$.

Пример 9: Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3;5)$ и $M_2(-1;3)$.

Решение:

Т.к. уравнение проходящее через две точки имеет вид $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Подставив координаты точек M_1 и M_2, получим: $\frac{y-5}{3-5} = \frac{x-3}{-1-3}$; $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-5}{-2}$.

$2(x-3) = 4(y-5)$; $\quad x - 2y + 7 = 0$.

Ответ: $x - 2y + 7 = 0$.

Пример 10: Даны точки $M_0(1;-2;4)$, $M_1(3;0;1)$, $M_2(2;-3;1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через:

1) точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$;

2) точки $M_0,\ M_1,\ M_2$.

Решение:

1) Координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1;-3;-2) = (A;B;C)$.

Тогда, согласно формуле $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ получим: $-1(x-1) - 3(y+2) - 2(z-4) = 0$.

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые имеем:

$x + 3y + 2z - 3 = 0$.

2) Пусть $M(x;y;z)$ – точка принадлежащая плоскости M_0, M_1, M_2.

Найдем координаты векторов:
$\overrightarrow{M_0M} = (x-1; y+2; z-4)$;
$\overrightarrow{M_0M_1} = (2; 2; -3)$;
$\overrightarrow{M_0M_2} = (1; -1; -5)$.

Т.к. эти векторы будут лежать в одной плоскости (они будут компланарными), то их смешанное произведение равно нулю.

Т.е. $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0M_2} = \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-4 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -10(x-1) -$

$$-3(y+2) - 2(z+4) - 2(z-4) + 10(y+2) - 3(x-1) = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые получим
$13x - 7y + 4z - 43 = 0$
Ответ: 1) $x + 3y + 2z - 3 = 0$;
2) $13x - 7y + 4z - 43 = 0$.

Пример 11: Определить длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $x^2 + 9y^2 = 36$.

Решение:

Разделим правую и левую часть уравнения на 36, получим уравнение эллипса в виде $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ или $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

Из канонического уравнения эллипса имеем $a = 6,\ b = 2$, значит длины осей: $2a = 12,\ 2b = 4$;
$\text{c} = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$
$F_1\left(-4\sqrt{2}; 0\right) \quad F_2(4\sqrt{2}; 0)$
$E = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ – эксцентриситет.
Ответ: 12; 4. $F_1\left(-4\sqrt{2}; 0\right)$; $F_2(4\sqrt{2}; 0)$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

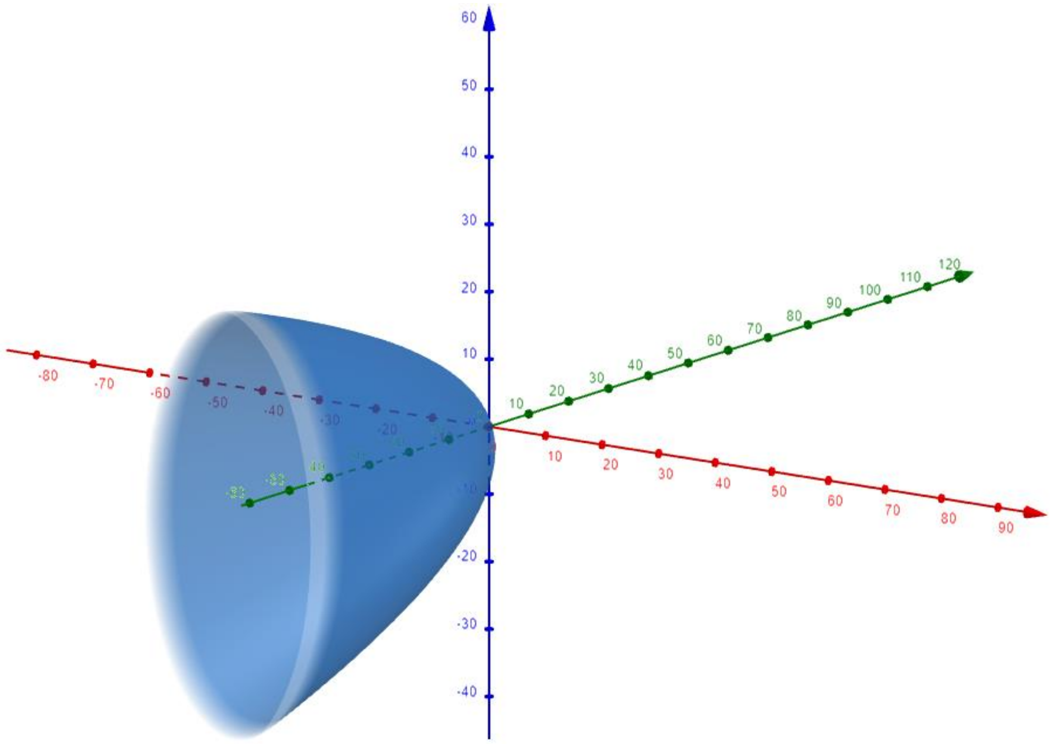
Пример 12: Привести уравнение $4x^2 + z^2 + 8x + 16y + 6z - 3 = 0$ к каноническому виду и установить, какой геометрический образ оно определяет.

Решение:

Уравнение перепишем следующим образом:
$$4(x^2 + 2x) + (z^2 + 6z) + 16y - 3 = 0.$$
Дополним выражения в скобках до полных квадратов:
$$4(x+1)^2 - 4 + (z+3)^2 - 9 + 16y - 3 = 0.$$
После преобразования получим каноническое уравнение эллиптического параболоида (рис. 20):

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(z+3)^2}{16}=-(y-1),$$

у которого вершина в точке $O_1(-1;1;-3)$, ось симметрии параллельна оси O_y отрицательного направления.



(рис. 20)

РАЗДЕЛ 2. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ТЕМА 2.1 МАТРИЦЫ

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел из множества $\mathbb{R}$, содержащая m строк одинаковой длины и n столбцов.

Матрицы обозначаются латинскими буквами *A*,*B*,*C*,*D* и т.д.

Например, $A=\left(a_{ij}\right)$, где $i=\overline{1,m}$ (т.е.$i=1,2,3,\dots,m$) – номер строки, $j=\overline{1,n}$ (т.е. $j=1,2,3,\dots,n$)- номер столбца.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называют *квадратной.*

У квадратной матрицы элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют *главную диагональ*, а из верхнего правого угла – *побочную диагональ.*

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной.*

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной.* Обозначается буквой *Е*.

Матрица (не обязательно квадратная), все элементы которой равны нулю, называется *нулевой.*

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором.* (или вектор-столбец, или вектор-строка).

Матрица (например *А*), полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной* к данной. Обозначается A^T.

Действия над матрицами

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{\imath j}\right)$ на число k называется матрица $B_{m\times n} = (b_{\imath j})$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ $(\imath = \overline{1, m}, .\ j = \overline{1, n})$.

Записывают $k \cdot A = B$.

Например: $k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \end{pmatrix}.$

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется *противоположной матрице* A.

Сложение матриц

Операция сложения матриц возможна только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = \left(a_{\imath j}\right)$ и $B_{m\times n} = (b_{\imath j})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{\imath j})$ такая, что $c_{\imath j} = a_{\imath j} + b_{\imath j}$. Записывают $A + B = C$.

Например: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}.$

Разность матриц определяется : $A - B = A + (-B)$.

Умножение матриц

Операция умножения двух матриц возможна только, если *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.*

Такие матрицы называются *согласованными.*

Произведение матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{\imath j}\right)$ на матрицу $B_{n\times p} = (b_{j\kappa})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{\imath\kappa})$ такая что

$$\boxed{c_{\iota\kappa} = a_{\iota 1} \cdot b_{1\kappa} + a_{\iota 2} \cdot b_{2\kappa} + \dots + a_{\iota n} \cdot b_{n\kappa},} \tag{2.1}$$

где $\iota = \overline{1,m},\ .\ k = \overline{1,p},$

Пример: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Матричные операции

(где A, B, C- матрицы, α, β – действительные числа)

1) $A + B = B + A$ (коммутативность);
2) $A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C$ (ассоциативность);
3) $A + 0 = A$;
4) $A + (-A) = 0$;
5) $1 \cdot A = A$;
6) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;
7) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;
8) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
9) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$;
10) $(A^T)^T = A$;
11) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
12) $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$;
13) $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$;
14) $E \cdot A = A \cdot E = A$;
15) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
16) $A \cdot B \neq B \cdot A$;
17) $\alpha \cdot A \cdot B = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$.

Элементарные преобразования матриц

1)Перестановка местами двух столбцов (строк) матрицы.

2)Умножение всех элементов столбца (строки) матрицы на число, отличное от нуля.

3)Прибавление к одному столбцу (строке) матрицы другого столбца (строки), умноженного на одно, и тоже число.

ТЕМА 2.2 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число, которое называется *определителем матрицы.*

Обозначается $\det A$ или $|A|$или Δ.

Если матрица первого порядка, то

$A = (a_{11})$ и $\det A = a_1$.

Если матрица второго порядка, то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } \quad detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}.$$

Если матрица третьего порядка, то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } \quad detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$
$$-a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Если матрица n-го порядка, то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{и } \boxed{detA = \begin{cases} a_{11,} n = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}B_{1j}\,, n > 1 \end{cases}} \tag{2.2}$$

где B_{1j} – определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием первой строки и j-го столбца.

Пусть дана квадратная матрица порядка n. Выберем в ней произвольно s строк и s столбцов ($1 \leq s \leq n$). Элементы, стоящие на пересечении s строк и s столбцов, образуют матрицу порядка s. Определитель этой матрицы называется *минором порядка s матрицы* и обозначается M. Минором M', дополнительным к минору M, называется определитель матрицы, полученной в результате вычеркивания тех s строк и s столбцов данной матрицы, которые входят минор M.

Алгебраическим дополнением минора M называется дополнительный к нему минор M', умноженный на $(-1)^{\sigma}$, где σ – сумма номеров тех строк и столбцов матрицы, которые входят в минор M.

Каждый элемент a_{ij} матрицы n-го порядка является минором первого порядка. Дополнительный минор является определителем порядка $n-1$. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} *элемента* называется минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}} \tag{2.3}$$

Строки и столбцы матрицы называются ее *рядами*. Под двумя *параллельными рядами* будем понимать две строки или два столбца матрицы.

Теорема 1 (о разложении определителя по элементам ряда). *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов некоторого ряда и алгебраических дополнений этих элементов.*

Теорема 2 (Лапласа). *Определитель матрицы порядка* n *равен сумме произведений всевозможных миноров* k*-го порядка* ($k < \mathrm{n}$), *которые можно составить из произвольно выбранных* k *параллельных рядов, и алгебраических дополнений этих миноров.*

Основные свойства определителей

1. Величина определителя не изменится, если его строки заменить столбцами с теми же номерами.
2. Если поменять местами два столбца (две строки) определителя, то он изменит знак на противоположный.
3. Если определитель содержит два одинаковых столбца (две одинаковые строки), то он равен нулю.
4. Умножение всех элементов одного ряда определителя на число $k \in \boldsymbol{R}$ равносильно умножению самого определителя на k.
5. Если все элементы одного из рядов определителя равны нулю, то определитель равен нулю.
6. Если соответствующие элементы двух рядов определителя пропорциональны, то он равен нулю.
7. Если каждый элемент j-го ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то данный определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, один из которых в j-м ряду содержит первые из упомянутых слагаемых, а другой – вторые; остальные элементы одинаковы.
8. Если к элементам одного ряда определителя прибавить элементы другого его ряда, умноженные на число $k \in \boldsymbol{R}$, то величина определителя не изменится.

Обратная матрица

Если для матрицы A существует матрица B, такая что $AB = BA = E$, где E – единичная матрица, то *матрица В называется обратной матрице* A (A и B-квадратные матрицы одинакового порядка).

Невырожденной матрицей называется квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля.

Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется *вырожденной.*

Теорема. *Для того чтобы существовала матрица В, обратная матрице А, необходимо и достаточно, чтобы матрица А была невырожденной.*

Матрицу, обратную матрице A, обозначают A^{-1}и находят следующим образом:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}} \qquad (2.4),$$

где матрица в формуле - это матрица, составленная из алгебраических дополнений транспонированной матрицы A.

Теорема. *Для невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица.*

Невырожденные матрицы обладают свойствами.
1. $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$;
2. $(A^{-1})^{-1} = A$;
3. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;
4.$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

ТЕМА 2.3 РАНГ МАТРИЦЫ

Пусть дана матрица размеров $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Ранг матрицы обозначают r.

Свойства ранга матрицы:

1. Ранг матрицы, полученной из данной вычеркиванием какого-либо столбца (строки), равен рангу данной матрицы или меньше его на единицу.
2. Ранг матрицы, полученной из данной приписыванием к ней столбца (строки), элементами которого являются произвольные числа, равен рангу исходной матрицы или больше его на единицу.
3. Если вычеркнуть из матрицы или приписать к ней нулевой столбец (строку), все элементы которого равны нулю, то ранг матрицы не изменится.
4. Ранг матрицы, полученной из данной транспонированием, равен рангу данной матрицы.

Если в матрице некоторая строка (столбец) может быть представлен в виде суммы других k строк (столбцов), умноженных соответственно на числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, то будем говорить , что данная строка (столбец), является *линейной комбинацией* указанных строк (столбцов).

Строки $S_1, S_2, \dots, S_l$ $(l > 1)$ матрицы $A_{l\times p}$ называются линейно зависимыми, если хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных, иначе строки считаются *линейно независимыми.* Аналогичное понятие линейной зависимости и независимости столбцов.

Если в матрице A размера $m \times n$ некоторая строка является линейной комбинацией k других строк, где $k < m - 1$, то эта строка является линейной комбинацией всех строк матрицы, кроме данной. Таким образом, если в матрице s строк линейно зависимы, то все строки матрицы линейно зависимы.

Если n-й столбец матрицы $A_{m\times n}$ является линейная комбинация остальных ее столбцов, то это означает, что существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, что

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} \alpha_{1n-1} \\ \alpha_{2n-1} \\ \vdots \\ \alpha_{mn-1} \end{pmatrix}.$$

Аналогичная запись имеет место для любой строки (столбца) матрицы, если она является линейной комбинацией остальных строк (столбцов).

Строками (столбцами), проходящими через минор *M* матрицы *A,* называют строки (столбцы) этой матрицы, на пересечении которых стоят элементы минора *M*.

Минором, окаймляющим минором M порядка k матрицы A, называется минор порядка $k+1$ этой матрицы, содержащей минор *M.*

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Теорема (о базисном миноре). *Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов) и базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.*

Следствия:

1.Всякая не базисная строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией всех строк (столбцов) этой матрицы.

2.Максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матрицы равно рангу матрицы.

3.(критерий равенства нулю определителя). Для того чтобы определитель матрицы был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы некоторая его строчка (столбец) была линейной комбинацией других ее строк (столбцов).

Методы нахождения ранга матрицы

Метод окаймляющих миноров

Пусть в матрице *A* найден минор *M* *k*-го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры (*k*+1)-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор *M*. Если все они равны нулю, то ранг матрицы *A* равен *k*. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор (k+1)-го порядка, и вся процедура повторяется.

Метод элементарных преобразований.

Этот метод основан на так называемых элементарных преобразованиях, выполнимых над матрицей. Такими преобразованиями будем считать:

1) Вычеркивание строки, состоящей из нулей;
2) Прибавление к элементам одной из строк соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое число не равное нулю;
3) Перестановку двух столбцов.

Теорема. *Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.*

При помощи элементарных преобразований мы можем привести данную матрицу A к виду, в котором все элементы главной диагонали отличны от нуля, а элементы других строк, расположенных ниже диагональных, равны нулю.

ТЕМА 2.4 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Матричная запись системы линейных уравнений

Системой m уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}} \quad (2.5),$$

где a_{ij}, b_i $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$-числа. a_{ij} $-$ коэффициент принеизвестном x_j в i-м уравнении системы; b_i $-$свободный член в этом уравнении.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов

при неизвестных системы, называется *основной матрицей системы,*

а матрица $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, которая получается из матрицы A приписыванием столбца из свободных членов называется *расширенной матрицей системы*.

И еще две матрицы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Т.к. матрица A согласована с матрицей X , то можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$. Такая запись называется *матричной.*

Решение системы линейных алгебраических уравнений. Эквивалентные системы уравнений

Упорядоченный набор чисел $(c_1; c_2; \dots; c_n)$ называется *решением системы*, если каждое из уравнений обращается в верное равенство после подстановки вместо переменных $x_1; x_2; \dots; x_n$соответственно чисел $c_1; c_2, \dots, c_n$.

Решение $(c_1; c_2; \dots; c_n)$ можно записать в виде матрицы-столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

называемой *вектор-решением данной системы*. Матрица C удовлетворяет уравнению $AX = B$.

Если существует хотя бы одно решение системы, то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной*. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственной решение. Система, имеющая более одного решения, называется *неопределенной*. Т.е., неопределенная система всегда имеет бесконечно много решений.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или нет, и в случае совместности найти все ее решения (множество решений).

Две системы называются *эквивалентными* или *равносильными*, если всякое решение одной из них является решением другой, и наоборот, т.е. если они имеют одно и то же множество решений.

Элементарные преобразования системы:

1) умножение уравнения системы на отличное от нуля число;
2) прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на произвольное число отличное от нуля;
3) перестановку местами двух уравнений системы.

Легко показать, что при элементарных преобразованиях системы соответствующие элементарные преобразования производятся над строками расширенной матрицы системы.

Проводя элементарные преобразования системы, приходим к системе, эквивалентной данной.

Решение невырожденных линейных систем

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\boxed{AX = B} \qquad (2.6).$$

Матрица A такой системы является матрицей порядка n. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Если определитель системы отличен от нуля, то она называется *невырожденной*, в противном случае – *вырожденной*.

Найдем решение невырожденной системы, В этом случае матрица A невырожденная и для нее существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Умножив обе части уравнения слева на их матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}A = E, EX = X$, то

$$\boxed{X = A^{-1}B} \qquad (2.7).$$

Формула $X = A^{-1}H$ является матричной записью решения рассматриваемой системы. Матричное равенство $X = A^{-1}B$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_j \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{nj} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_j \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + & \cdot & \cdot & \cdot & +A_{n1}b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1j}b_1 + & \cdot & \cdot & \cdot & +A_{nj}b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n}b_1 + & \cdot & \cdot & \cdot & +A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Такой способ решения называется *матричным* или, по-другому, *методом обратной матрицы*.

Данную систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

можно решать и с помощью метода Крамера.

Находя Δ_j – определитель, который получается из основного определителя Δ при замене -го столбца на столбец свободных членов. Тогда решение системы можно записать по *формулам Крамера:*

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \ \left(j = \overrightarrow{1,n}\right)} \tag{2.8}$$

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема (критерий совместности системы). *Для совместности системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.*

Решение произвольных линейных систем

Теорема. *Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.*

Теорема. *Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество решений системы бесконечно.*

Базисными неизвестными совместной системы, ранг матрицы которой равен r, назовем r неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Остальные неизвестные назовем *свободными*.

Так как базисный минор может быть выбран не единственным образом, то и совокупность базисных неизвестных может быть выбрана не единственным образом.

Из теорем следует метод решения системы линейных уравнений.

1. Найти r_A – ранг матрицы системы и $r_{\bar{A}}$ – ранг расширенной матрицы. Если $r_A \neq r_{\bar{A}}$, то система несовместна.

2. Если $r_A = r_{\bar{A}} = r$, выделить базисный минор и базисные неизвестные.

3. Исходную систему заменить равносильной ей системой, состоящей из тех r уравнений, в которые вошли элементы базисного минора.

4. Если число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

5. Если число базисных неизвестных меньше числа неизвестных системы, то из системы, полученной в п. 3, найти выражение базисных неизвестных через свободные, используя, например, формулы Крамера. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получить бесконечно много решений исходной системы. Каждое из этих решений будем называть *частным решением системы*.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к *ступенчатому* (в частности, *треугольному*) виду.

Приведенная ниже система имеет ступенчатый вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

где $k \leq n,\ a_{ii} \neq 0,\ i = \overrightarrow{1,k}$. Коэффициенты a_{ii} называются *главными* элементами системы.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Опишем метод Гаусса подробнее.

Прямой ход.

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему (4.3), исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого (используя элементарные преобразования системы). Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $(i, j = \overline{2, m})$ – новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

Если в процессе приведения системы к стандартному виду появляются нулевые уравнения, т.е. равенства вида 0 = 0, их отбрасывают. Если же появятся уравнения вида $0 = b_{i,}$ а $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместимости системы.

Второй этап (обратный ход) заключается в решении ступенчатой системы. Ступенчатая система имеет бесконечное множество решений. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1}, \dots, x_n)$; затем находим $x_{k-2}, \dots, x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Если ступенчатая система оказывается треугольной, т.е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего у равнения дим x_n, из последнего уравнения x_{n-1}, далее двигаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $(x_{n-2}, \dots, x_1)$.

Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными

Линейное уравнение называется *однородным*, если его свободный член равен нулю. Система линейных уравнений называется *однородной*, если все входящие в нее уравнения являются линейными однородными уравнениями.

Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что однородная система линейных уравнений имеет нулевое решение:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Таким образом, однородная система линейных уравнений всегда совместна. Поэтому важно выяснить, при каких условиях она является определенной. Покажем, что однородная система n линейных уравнений с n неизвестными, кроме нулевого, имеет еще решения тогда и только тогда, когда определитель ее равен нулю.

В самом деле, пусть $\Delta = 0$. Так как однородная система уравнений является частным случаем неоднородной системы, то к ней применимо правило Крамера. Но для однородной системы все $\Delta x_i = 0$, так как каждый из этих определителей содержит столбец из нулей $(b_i = 0)$. Поэтому система будет иметь вид

$$\Delta x_1 = 0, \Delta x_2 = 0, \dots, \Delta x_n = 0.$$

Из этой системы следует, что если $\Delta \neq 0$, то однородная система имеет единственное нулевое решение; если же $\Delta = 0$, то следует, что она имеет бесчисленное множество решений.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти транспонированную матрицу для матрицы $A + B$.

Решение:

$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 0+1 & 3-2 \\ 1+0 & 4-3 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда транспонированная матрица $(A + B)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример 2: Найти произведение матриц Aи B, где матрица

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение:

Выясним возможно ли перемножить матрицу A на B. Размерность матрицы A – два на три, а размерность матрицы B – три на два. Т.к. количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B, значит матрицы согласованы и произведение для них определено.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 1+0\cdot(-1)+(-1)\cdot 0 & 2\cdot 5+0\cdot 2+(-1)\cdot 3\\ 3\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 0 & 3\cdot 5+1\cdot 2+2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 2 & 23\end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом проверяем согласованность матриц B и A. Они согласованы, а значит, их можно перемножать.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+15 & 0+5 & -1+10\\ -2+6 & 0+2 & 1+4\\ 0+9 & 0+3 & 0+6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}17 & 5 & -9\\ 4 & 2 & 2\\ 9 & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

Ответ: $AB=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 2 & 23\end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix}17 & 5 & -9\\ 4 & 2 & 2\\ 9 & 3 & 6\end{pmatrix}.$

Пример 3: Вычислить определитель по правилу «треугольника»

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

Решение:

$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13} — a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}=1\cdot 0\cdot 3-2\cdot 5\cdot(-1)+2\cdot 4\cdot 3-3\cdot 0\cdot(-1)+$

$2\cdot 4\cdot 3-5\cdot 2\cdot 1=48.$

Ответ:48.

Пример 4: Вычислить определитель методом разложения его по «строке» или «столбцу».

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Решение:

Выберем строку (или столбец) с наибольшим числом нулей. В данном случае это первая строка:

Тогда можно записать $:a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$. Т.к. $a_{12} = a_{13} = 0$, то алгебраические дополнения (A_{ij}) искать для этих элементов не нужно. Найдем алгебраические дополнения только для элементов a_{11}и a_{14}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 0) = 4$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1(1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - -2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1) = -6$$

Значит $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{14}A_{14} = 1 \cdot 4 + 2(-6) = -8.$

Ответ: – 8.

Пример 5: Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

Найдем определитель матрицы A методом разложения определителя по третьей строке: $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0 = -2 \neq 0$. Т.к. определитель не равен нулю, это значит, что для матрицы A существует обратная матрица (A^{-1}):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*, \text{ где } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдем все A_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Аналогично находим остальные:

$A_{13} = -6$; $A_{21} = 0$; $A_{22} = -1$; $A_{23} = -2$; $A_{31} = -2$; $A_{32} = 9$; $A_{33} = 26$.

Тогда $A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 9 \\ -6 & -2 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 3 & 1 & -13 \end{pmatrix}$ – обратная матрица.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 3 & 1 & -13 \end{pmatrix}$.

Пример 6: Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Применяя элементарные преобразования, приводим данную матрицу к трапециевидной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Вторая матрица получена из первой путем поочередного умножения первой строки на $(-1), (-8), 1$ и прибавления ко второй, третьей и четвертой строкам; третья матрица получена из второй путем прибавления второй строки к третьей.)

Ранг последней матрицы равен трем, так как имеется отличный от нуля минор третьего порядка этой матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 18 \neq 0,$$

а определитель самой матрицы (определитель четвертого порядка) равен нулю (как содержащий нулевую строку). Следовательно, ранг исходной матрицы равен трем ($r = 3$).

Ответ: 3.

Пример 7: Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Составим определитель системы Δ и определители $\Delta_k (k = 1, 2, 3)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Определитель системы $\Delta = 21 \neq 0$, т.е. данная система является невырожденной, поэтому пользуемся формулами Крамера. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$; пользуемся формулами Крамера, полагая в них $n = 3$. Так как $\Delta_1 = 42$, $\Delta_2 = 63$, $\Delta_3 = 21$, то

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{42}{21} = 2, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{63}{21} = 3, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{21}{21} = 1.$$

Ответ: (2;3;1).

Пример 8: Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$$

Решение:

Данную систему запишем в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель матрицы A, находим матрицу A^{-1}:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 39, \qquad A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{pmatrix}.$$

По формуле $X = A^{-1}B$ получаем решение системы

$$X=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}8&6&-1\\-11&-18&16\\-13&-39&26\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\4\\18\end{pmatrix}=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}78\\117\\195\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},$$

т.е. $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=5.$

Ответ: (2;3;5).

Пример 9: Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases}x_1-x_2+7x_3-2x_4=2\\2x_1-3x_2+8x_3-4x_4=1\\4x_1+2x_2+19x_3+x_4=8\\6x_1-5x_2+11x_3-3x_4=-3.\end{cases}$$

Решение:

Составим расширенную матрицу и преобразуем ее:

Домножив сперва 1-ую строку на (-2), (-4), (-6) и сложив ее со 2-ой, 3-ей и 4-ой строкой соответственно, получим вторую матрицу. Затем проделав те же преобразования со второй и третей матрицей, получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&7&-2&2\\2&-3&8&-4&1\\4&2&19&1&8\\6&-5&11&-3&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&7&-2&2\\0&-1&-6&0&-3\\0&6&-9&9&0\\0&1&-31&9&-15\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&7&-2&2\\0&-1&-6&0&-3\\0&0&-45&9&-18\\0&0&-37&9&-18\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&7&-2&2\\0&-1&-6&0&-3\\0&0&-45&9&-18\\0&0&8&0&0\end{array}\right).$$

Этой матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases}x_1-x_2+7x_3-2x_4=2\\-x_2-6x_3=-3\\-45x_3+9x_4=-18\\8x_3=0\end{cases}$$

имеющая решение $x_3=0,\ x_4=-2,\ x_2=3,\ x_1=1.$

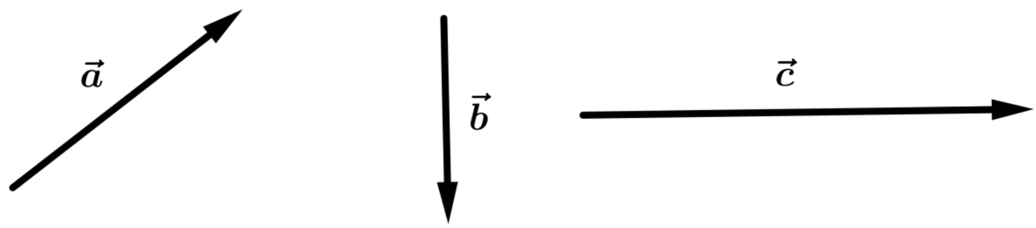
Ответ: (1;3;-2;0).

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ТЕМА: ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

АУДИТОРНАЯ РАБОТА

1. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$



Изобразить на рисунке линейную комбинацию:

а) $2\vec{a} - 3\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$;

б) $\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$;

в) $-\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$.

2. Пользуясь свойствами действий над векторами, упростите выражение:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC}$ б) $(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA})$.

3. Дан параллелограмм ABCD, O – точка пересечения его диагоналей, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор:

а) $\overrightarrow{OC}$; б) $\overrightarrow{BO}$; в) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DA}$.

4. Даны точки $A(-2; p; 1)$, $B(-1; 0; 2)$ и $C(a; 4; k)$. Найти сумму $p + a + k$, если $\overrightarrow{AB} = 0{,}5 \cdot \overrightarrow{BC}$.

5. Найти длину медианы AD треугольника с вершинами $A(-1; 1; 2)$, $B(13; 4; 3)$ и $C(-3; 2; 7)$.

6. Найти сумму координат точки пересечения диагоналей, если в параллелограмме $ABCD$ заданы $\overrightarrow{AB}(-4; 4; -2)$, $\overrightarrow{CB}(-3; -6; 1)$ и $A(3; 8; -5)$.

7. Найти расстояние от точки C до начала координат, если в параллелограмме $ABCD$ заданы $\overrightarrow{CD}(-3; 4; 2)$, $\overrightarrow{CB}(5; -2; 4)$ и $A(5; 8; 0)$.

8. а) Запишите координаты векторов в трёхмерном пространстве:

$\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{i} - \vec{j}$,

б) Запишите разложение по координатам векторам $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ векторов:

$\vec{m}(-1; 2; 3)$, $\vec{n}\left(\frac{1}{2}; -3; 0\right)$, $\vec{k}\left(4\frac{1}{3}; -5\frac{4}{5}; 5\right)$,

9. Укажите среди векторов $\vec{a}(-2; 1; 3)$, $\vec{b}(5; 10; -20)$, $\vec{c}(-6; 3; 9)$, $\vec{d}\left(\frac{1}{2}; 1; -10\right)$, $\vec{e}(10; -5; 0)$ пары коллинеарных векторов.

10. Докажите, что векторы $\vec{c}(-1; 2; 5)$ и $\vec{d}(6; -12; -30)$ противоположно направленные.

11. а) Известно, что векторы $\vec{a}(2;-1;k)$ и $\vec{b}(-4;m;3)$ коллинеарны. Найдите число m и k.

12. Дан треугольник ABC, где A(2; -1), B(-1; 1), C(4; 2). Найдите координаты:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$.

13. Найдите длину вектора $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}(-2;7;0)$, $\vec{b}(4;\ -1;0)$.

14. Векторы $\vec{a}(x;2)$ и $\vec{b}(3;y)$ имеют одинаковые не равные нулю суммы координат. Найти $x+y$, если известно, что векторы $5\vec{a}+2\vec{b}$ и $4\vec{a}+3\vec{b}$ коллинеарны.

15. Найти сумму координат вектора $\overrightarrow{BC}$, если в треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и BC соотвественно, $\overrightarrow{AB}(3;-5;6)$, $\overrightarrow{CB}(-2;1;7)$.

16. Найти длину вектора $|\vec{a}-\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=13$, $|\vec{a}+\vec{b}|=22$ и $|\vec{b}|=19$.

17. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, а угол между этими векторами равен 60°. Найти длину вектора равного:

а) $|\vec{a}+\vec{b}|$; б) $|\vec{a}-\vec{b}|$.

18. Даны векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, причем $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, а угол между ними равен 30°. Найти $|\vec{m}+2\vec{n}|$.

19. Найти на оси ординат точку E, через которую проходит отрезок, соединяющий точки $A(-2;3)$ и $B(7;-4)$.

20. Даны координаты вершин треугольника: $A(-1;-2)$, $B(-4;2)$, $C(5;6)$. Найти:

а) длину медианы, проведенную из вершины B;

б) координаты точки пересечения медиан;

в) длину биссектрисы угла A.

21. Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Вычислить угол между его диагоналями.

22. Даны векторы $\vec{a}(7;2;-1)$, $\vec{b}(0;3;2)$ и $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Найти:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$;

б) проекцию вектора $3\vec{a}-2\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

23. Даны векторы $\vec{a}=-\vec{m}+6\vec{n}$ и $\vec{b}=3\vec{m}+4\vec{n}$, где $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=5$ и угол между векторами m и n равен 120°. Найти:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) $np_{\vec{b}}(4\vec{a}-5\vec{b})$;

в) $\cos(2\vec{b}-\vec{a}\,;4\vec{b})$.

24. Даны два вектора *a(5; 3; -4)*, *b(6; 7; -8)*. Найдите координаты векторного произведения $[a,b]$.

25. Найти векторное произведение векторов $a=2i+3j+5k$ и $b=i+2j+k$.

26. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = 6i + 3j - 2k$ и $b = 3i - 2j + 6k$.

27. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1), B(2;3;4), C(4;3;2)$.

28. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $a + 3b$ и $3a + b$, если $|a| = |b| = 1$ $\angle(\mathrm{a;b}) = 30°$.

29. Вычислить площадь параллелограмма *ABCD*, если $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$; $\overrightarrow{AD} \in \vec{b}$, причём $\vec{a} = 2p - 3q$, $\vec{b} = p + 2q$ $|p| = \sqrt{2}$ $|q| = 2$ $\angle(\mathrm{p;q}) = 45°$.

30. Вычислить угол α, образованный векторами $\vec{a} = (1;0;-2)$ $\vec{b} = (0;-1;1)$.

31. Сила *F* приложена к точке *A*. Вычислите:

а) работу F в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку *B*.

б) угол, под которым направлена сила к *AB*, если $F(5;-3;9)$, $A(3;4;-6)$, $B(2;6;5)$.

32. Найти смешанное произведение векторов $a = 2i - j - k$; $b = i + 3j - k$; $c = i + j + 4k$.

33. Выяснить, будут ли векторы $a = 2i + 5j - 7k$; $b = i + j - k$; $c = i + 2j + 2k$ компланарными.

34. Найти объём треугольной пирамиды с вершинами $A(2;2;2)$; $B(4;3;3)$; $C(4;5;4)$; $D(5;5;6)$.

35. Показать, что точки $A(5;7;-2)$; $B(3;1;-1)$; $C(9;4;-4)$; $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

36. Даны векторы $a = 4i + 4k$, $b = -i + 3j + 2k$ и $c = 3i + 5j$. Найдите:

а) произведение векторов a, b и *5c;*

б) модуль векторного произведения *3c* и b;

в) скалярное произведение векторов a и *3b*;

г) будут ли коллинеарны или ортогональны векторы a и b;

д) будут ли компланарны векторы a, *b*,*c*.

37. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2;3;4)$; $B(4;7;3)$; $C(1;2;2)$; $D(-2;0;-1)$. Вычислить:

а) площадь грани *ABC*

б) площадь сечения, проходящего через середины рёбер *AB*, *AC*, *AD*;

в) объём пирамиды *ABCD*.

38. Составить линейную комбинацию для векторов $\overrightarrow{a_1}(0;1;5)$; $\overrightarrow{a_2}(1;0;-1)$; $\overrightarrow{a_3}(2;1;0)$, где $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 3$; $\alpha_3 = -1$.

39. Проверить, образуют ли векторы базис:

а) $\vec{a} = (3;-1;0)$; $\vec{b} = (2;3;1)$; $\vec{c} = (-1;4;3)$

б) $\vec{a} = (1;1;1)$; $\vec{b} = (2;0;2)$; $\vec{c} = (3;3;3)$

Если образуют, найти координаты вектора $d = (2;3;7)$ в этом базисе.

40. Найти максимальное число линейно-независимых векторов: $a_1(1;1;-1;-1)$; $a_2(1;2;3;4)$; $a_3(8;7;6;5)$; $a_4(-1;-1;1;1)$; $a_5(1;0;0;1)$.

41. Записать уравнение прямой заданной точкой $M_0(2;3)$ и нормальным вектором $\vec{n}=(-1;2)$.

42. Записать уравнение прямой заданной точкой $M_0(-2;2)$ и направляющим вектором $\vec{s}=(-1;1)$.

43. Записать уравнение прямой, заданной двумя точками $M_1(2;3)$ и $M_0(-1;6)$.

44. По данным уравнений построить прямые, найти их угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые ими на осях координат: а) $2x-y+3=0$ б) $5x+2y-8=0$ в) $3x+8y=-16$ г) $3x-y=0$.

45. Записать уравнения прямых, которые проходят через точку $A(3;-1)$ и параллельны:

а) оси абсцисс;

б) оси ординат;

в) биссектрисе первого координатного угла;

г) прямой $y=3x+9$.

46. Точка $A(-2;3)$ лежит на прямой, перпендикулярной к прямой $2x-3y+8=0$. Записать уравнение этой прямой.

47. Записать уравнение прямой проходящей через точку пересечения прямых $2x-y-1=0$; $x+y+5=0$ и пересекающей ось Ox под углом 30°.

48. Треугольник ABC задан координатам своих вершин $A(1;2)$; $B(2;-2)$; $C(6;1)$.

а) записать уравнение стороны AB;

б) записать уравнение высоты CD;

в) вычислить длину CD;

г) найти угол между высотой CD и медианой BM.

49. Найти точку, симметричную точке $M(5;2)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(1;0)$ и $M_2\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

50. Через точку пересечения прямых, заданных уравнениями $5x-2y+11=0$ и $7x+3y-2=0$, проведена прямая параллельно прямой $4x+5y-8=0$. Составить уравнение этой прямой.

51. Вычислите величину меньшего угла и между прямыми $3x+4y=2$ и $8x+6y+5=0$.

52. Найти расстояние между прямыми $12x-5y-26=0$ и $12x-5y++13=0$.

53. По уравнениям сторон треугольника $5x+y-7=0$, $2x-3y-13=0$ и $7x-2y-3=0$ составить уравнение высоты, опущенной из вершины, лежащей в III четверти.

54. Записать уравнение прямых на которых лежат стороны равнобедренной трапеции, зная, что основания её равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с большим основанием угол 60°. Большее основание лежит на оси абсцисс, а ось симметрии трапеции – на оси ординат.

55. Найдите координаты нормального вектора плоскости:
а) $x + 2y - z + 1 = 0$; б) $x - 3z + 5 = 0$ в) $y + 1 = 0$.

56. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку А $(1; -2; -3)$ и параллельно плоскости $2x + 4y + 8z - 5 = 0$.

57. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $M_1(-2; 0; 4), M_2(4; -8; -4), M_3(1; -4; 6)$.

58. Составьте уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости *Oxz* и проходящей через точку А $(2; -5; 3)$.

59. Вычислите отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостью $2x - 3y - z + 12 = 0$

60. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 5; -2)$ и отсекающей на положительных осях координат равные отрезки.

61. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(-1; 0; 1)$ и $N(3; 1; 2)$ и параллельной оси аппликат.

62. Составьте уравнения плоскостей, проходящих через точку $(3; 1; 2)$ и параллельно координатным плоскостям.

63. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось аппликат и точку $(-3; 1; -2)$.

64. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси абсцисс и проходящей через точки $(4; 0; -2)$ и $(5; 1; 7)$.

65. Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат и параллельной плоскости $2x - y + 3z - 4 = 0$.

66. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $O(0; 0; 0)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.

67. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $K(0; 0; 1)$ и $N(3; 0; 0)$ и образующей с плоскостью $0xy$ угол, равный 60°.

68. Найти расстояние от точки $M_0(3; 1; -1)$ до плоскости $22x + 4y - 20z - 45 = 0$.

69. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; -3; 5)$ и параллельной прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

70. Определите координаты точки, лежащей на прямой $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{5}$ и имеющей:

а) абсциссу, равную 3;

б) ординату, равную -1.

71. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $\left(2; -3; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(3; 5; \frac{3}{2}\right)$.

72. Даны параметрические уравнения прямой: $x = 2 + 4t,\ y = -6t,\ z = -1 - 8t$. Напишите каноническое уравнение этой прямой.

73. Установите взаимное расположение прямых: $x = 1 + 2t,\ y = 7 + t,\ z = 3 + 4t$ и $x = 6 + 3t,\ y = -1 - 2t,\ z = -2 + t$.

74. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;3)$ и перпендикулярной к прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-1}$.

75. Даны точки $M(2;-1;-3)$ и $N(4;5;8)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной к прямой MN.

76. Найти угол между прямой $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$ и плоскостью $4x+2y+2z-5=0$.

77. Даны прямая $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{n}=\frac{z}{3}$ и плоскость $2x-2y+kz=0$. Какие значения принимают коэффициенты n и k, если известно, что данная прямая перпендикулярна к плоскости?

78. Каково значение коэффициента k, если известно, что прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-2}$ параллельна плоскости $kx-2y+z-6=0$?

79. Найти углы, которые образует плоскость $3x+2y-6z-2=0$ с осями координат.

80. Найти угол между прямыми
$\begin{cases}4x-y-z+12=0\\ y-z-2=0\end{cases}$ и $\begin{cases}3x-2y+16=0\\ 3x-z=0\end{cases}$.

81. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;-3;5)$ перпендикулярно двум данным прямым $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+5}{2}$; $\begin{cases}x=2+6t\\ y=-1+3t\\ z=-7-2t\end{cases}$.

82. Найти расстояние от точки $M_0(7;-2;3)$ до прямой $\begin{cases}x=3-t\\ y=-5-2t\\ z=1+2t\end{cases}$.

83. Найти координаты т Q, симметричной точке $P(-3;1;-9)$ относительно плоскости $4x-3y-z-7=0$.

84. Определить, как расположена прямая относительно эллипса: пересекает, касается или проходит вне его:

а) $2x-y+3=0$; $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;

б) $2x+y-10=0$; $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

в) $3x+2y-20=0$; $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$.

85. Составьте уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

86. Составьте каноническое уравнение эллипса, если малая полуось равна 8, эксцентриситет – 0,6.

87. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(6;-8)$ и проходящей через начало координат.

88. Составить уравнение гиперболы, если её эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

89. Составить уравнение гиперболы с фокусами на оси $0y$, если $2c = 10$ и $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

90. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

91. Построить параболы:

а) $y^2 = 4x - 8$;

б) $x^2 = 4y + 2$.

92. Установите вид кривой II порядка, заданной уравнением и постройте их:

а) $y^2 - 2x + 6y + 7 = 0$;

б) $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$;

в) $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$;

г) $x^2 - 6y^2 - 12x + 36y - 48 = 0$.

93. Даны уравнения поверхностей II порядка. Приведите уравнение к каноническому виду и определите вид (название) этой поверхности и постройте эскиз:

а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$;

б) $x^2 + 4z = 0$;

в) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$;

г) $x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 0$;

д) $4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$;

е) $x^2 - y = -9z^2$;

ж) $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0$;

з) $4x^2 + z^2 + 8x + 16y + 6z - 3 = 0$;

и) $x^2 + 3y^2 - z^2 + 2z = 0$;

к) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2z - 2 = 0$.

ОТВЕТЫ К АУДИТОРНОЙ РАБОТЕ:

2. а) $\overrightarrow{AM}$; б) $\vec{0}$. **3.** а) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$; г) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. **4.** 3 **5.** 7 **6.** 5 **7.** 9 **8.** а) $\vec{a}(-4; -5; -1)$ $\vec{b}(-1; 1; 0)$ $\vec{d}(1; -1; 0)$. **9.** $\vec{a}$ и $\vec{c}$ **11.** $m = 2; k = -1{,}5$. **13.** 10 **14.** 5 **15.** 8 **16.** 24 **17.** а) $\sqrt{19}$; б) $\sqrt{7}$. **18.** $\sqrt{6} + \sqrt{2}$. **19.** $\frac{13}{9}$ **20.** а) 6; б) $(0; 2)$; в) $\frac{16}{3}$. **21.** 90°. **22.** а) 58; б) $\frac{28\sqrt{3}}{3}$. **23.** а) 518; б) $-\frac{74}{\sqrt{79}}$; в) $\frac{19\sqrt{3081}}{2054}$. **24.** $(4; 16; 17)$. **25.** $-7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$. **26.** 49. **27.** $2\sqrt{6}$. **28.** 4. **29.** 14. **30.** $\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}$. **31.** а) 88; б) $\arccos\frac{44\sqrt{1610}}{2415}$. **32.** 33. **33.** не компланарны. **34.** $\frac{7}{6}$. **36.** а) -480; б) $6\sqrt{83}$; в) 12; г) не коллинеарны, не ортогональны; д) не компланарны. **37.** а) $\frac{1}{2}\sqrt{110}$; б) $\frac{\sqrt{286}}{8}$; в) $\frac{11}{6}$. **38.** $(1; 0; 2)$. **39.** а) образует базис, $\vec{d}(3; -2; 3)$; б) не образует базис. **40**. 3. **41.** $x-2y+4=0$. **42.** $x+y=0$. **43.** $x+y-5=0$. **44.** а) $k=2,\ a=-1{,}5,\ b=3$; **45.** а) $y=-1$; б) $x=3$; в) $y=x-4$; г) $y=3x-10$. **46.** $3x+2y=0$. **47.** $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{33}-33}{9}$. **48.** а) $4x+y-6=0$; б) $x-4y-2=0$; в) $\frac{19\sqrt{17}}{17}$; г) $\arccos\frac{19\sqrt{986}}{986}$. **49.** $(3;-4)$. **50.** $4x+5y-11=0$. **51.** $\arccos\frac{24}{25}$. **52.** 3 **53.** $5y-x+24=0$. **54.** $y=-\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$. **55.** а) $\vec{n}(1;2;-1)$. **56.** $x+2y+4z+15=0$. **57.** $4x+3y+8=0$. **58.** $y+5=0$. **59.** $a=-6,\ b=4,\ c=12$. **60.** $x+y+z-6=0$. **61.** $x-4y+1=0$. **62.** $x-3=0$. **63.** $x+3y=0$. **64.** $9y-z-2=0$. **65.** $2x-y+3z=0$. **66.** $2x-y-z=0$. **67.** $x+\sqrt{26}y+3z-3=0$ или $x-\sqrt{26}y+3z-3=0$. **68.** $\frac{3}{2}$. **69.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{1}$. **70.** а) $(3;4;5)$; б) $(-22;-1;-20)$. **71.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{8}=\frac{2z-1}{2}$. **72.** $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$. **73.** пересекаются. **74.** $2x+3y-z-5=0$. **75.** $2x+6y+11z+35=0$. **76.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$. **77.** $n=1$; $k=-6$. **78.** $k=4$. **79.** $\arcsin\frac{3}{7}$; $\arcsin\frac{2}{7}$; $\arcsin\left(-\frac{6}{7}\right)$. **80.** $\arccos\frac{20}{21}$. **81.** $\frac{(x-2)}{-2}=\frac{y+3}{2}=\frac{x-5}{-3}$. **82.** 5 **83.** $(1;-2;-10)$. **84.** а) пересекаются; б) не пересекаются; в) касаются в т. $A(6;1)$. **85.** $4x+3y+12=0$. **86.** $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{8^2}==1$. **87.** $(x-6)^2+(y-8)^2=100$. **88.** $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{12}=1$. **89.** $-\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$. **90.** $(2;4);(2;-4)$. **92.** а) парабола $(y+3)^2=2(x+1)$; б) эллипс $\frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}{15}+\frac{(y-3)^2}{12}=1$. **93.** а) однополостной гиперболоид $-\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{4^2}+\frac{z^2}{4^2}=1$; б) параболический цилиндр $x^2=4z$; в) эллипсоид $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$; г) конус $x^2+\frac{y^2}{0{,}5}-\frac{z^2}{0{,}5}=0$; д) двуполостной гиперболоид $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}++\frac{z^2}{25}=-1$; е) эллиптический параболоид $\frac{x^2}{3^2}+\frac{z^2}{1^2}=2\cdot\frac{1}{18}y$; ж) однополосной гиперболоид $\frac{(x-3)^2}{1^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}-\frac{(z-1)^2}{2^2}=1$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1. ВМ – медиана треугольника АВС, $\overrightarrow{BA}=\vec{x},\overrightarrow{BC}=\vec{y}$. Выразите через векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ вектор $\overrightarrow{AM}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ заданы вершины $A(2;-5;4)$, $B(1;-3;1)$ и $C(-3;4;-6)$. Найти сумму координат четвертой вершины.

3. а) Запишите координаты векторов в трёхмерном пространстве:
$\vec{b}=2\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+7\vec{k}$, $\quad\vec{e}=-\vec{\imath}$, $\quad\vec{f}=2\vec{\jmath}+2\vec{k}$

б) Запишите разложение по координатам векторам $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ векторов:
$\vec{l}(\sqrt{2};0;7)$, $\quad\vec{t}(0;\ -0{,}2;\ -3)$.

4. Даны векторы $\vec{a}(-3;2;1)$, $\vec{b}(5;1;\ -2)$. Найдите координаты вектора, равного:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $2\vec{a}+5\overrightarrow{b}$; г) – $\vec{a}+0{,}2\overrightarrow{b}$.

5. Докажите, что векторы $\vec{a}(4;\ -8;20)$ и $\vec{b}(1;\ -2;5)$ сонаправленные.

6. Найти периметр треугольника с вершинами $A(1;-1;2)$, $B(3;1;3)$ и $C(7;-3;5)$.

7. Найти длину вектора $\left|\vec{b}\right|$, если $|\vec{a}|=6$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=11$ и $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7$.

8. Даны точки $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(5;\ 1;\ -2)$, $C(7;\ 9;\ 1)$. Найти:

а) длины сторон треугольника, где *A, B* и *C* вершины этого треугольника.

б) Найти координаты точки *D*, пересечение биссектрисы угла *A* со стороной *CB*.

в) Длины всех медиан этого треугольника.

г) Углы между сторонами *AB* и *AC*, *BA* и *BC*.

д) Угол между медианой AM_1 и BM_2.

9. На оси Ox найти точку, равноудалённую от точек $A(2;\ -4;\ 5)$ и $B(-3;\ 2;\ 7)$.

10. Даны точки A(3; 3; 3) и B(-1; 5; 7). Найти:

а) координаты точек *C* и *D*, делящих отрезок *AB* на три равные части

б) координату точки *E*, делящую отрезок в отношении 4:3.

11. Даны векторы $a=-5m-4n$, $b=3m+6n$, где $|m|=3$, $|n|=5$ $\angle\,(m;\ n)=\frac{5\pi}{3}$. Найти $\left(-2a+\frac{1}{3}b\right)\cdot(a+2b)$

12. Даны координаты точек $A(4;\ 6;\ 3), B(-5;\ 2;\ 6), C(4;\ -4;\ 3)$. Найдите:

а) Модуль вектора $\vec{a}$

б) Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

в) Проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$.

Если $\vec{a}=4\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$.

13. Даны векторы $a=2i+2j+k$ и $b=6i+3j+2k$. Найти $\text{пр}_a b$ и $\text{пр}_b a$.

14. Найти векторное произведение векторов $a=2i+5j+k$ и $b=i+2j-3k$.

15. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2;2;2)$, $B(4;0;3)$ и $C(0;1;0)$.

16. Найти смешанное произведение векторов $a=i-j+k$, $b=i+j+k$, $c=2i+3j+4k$.

17. Показать, что векторы $a=7i-3j+2k$, $b=3i-7j+8k$, $c=i-j+k$ компланарны.

18. Даны точки $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, и $D(3;7;2)$:

а) Вычислить объём треугольной пирамиды с вершинами в данных точках.

б) Найти длину высоты пирамиды, опущенной на грань *BCD*.

19. Сила $F = (2; 3; -5)$ приложена к точке $A(1; -2; 2)$. Вычислить работу силы F в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(1; 4; 0)$.

20. Доказать, что векторы a, b, c образуют базис, и найти координаты вектора d в этом базисе: $a = (3; 1; 2)$; $b = (-7; -2; -4)$; $c = (-4; 0; 3)$; $d = (16; 6; 15)$.

21. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $P(5; 2)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.

22. Найти уравнение прямой, параллельной прямой $12x + 5y - 52 = 0$ и отстоящей от неё на расстоянии 2.

23. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4; -3)$ и образующей с осями координат треугольник площадью 3.

24. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол $45°$ с прямой $y = 2x + 5$.

25. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; -2)$ параллельно прямой $y = 2x + 1$.

26. Найти расстояние от точки $N(-3; 5)$ до прямых: $-2x - y + 7 = 0$ и $x + 12y - 1 = 0$.

27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно плоскости, если:

а) $M_0(2; 1; -1)$, $x - 2y + 3z + 5 = 0$;

б) $M_0(3; 0; 2)$, $4x - y - 2z + 1 = 0$.

28. Составить уравнение плоскости, проходящей через данные три точки: $M_1(1; 3; 6)$, $M_2(2; 2; 1)$, $M_3(-1; 0; 1)$.

29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 4; -7)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

30. Определить объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $2x + 3y + 6z - 18 = 0$.

31. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно двум векторам $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$, если: $M_0(3; 7; 2)$, $\overrightarrow{n_1} = (4; 1; 2)$, $\overrightarrow{n_2} = (5; 3; 1)$.

32. Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(1; 7; -4)$

33. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и параллельной вектору $\vec{a}(3; 7; -1)$

34. Найти угол между прямой $\frac{x}{2} = \frac{y+12}{3} = \frac{z-4}{6}$ и плоскостью $6x + 15y - 10z - 3 = 0$.

35. Найти точки пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$ с координатными плоскостями.

36. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $(8; 6; -3)$ параллельно прямым $\frac{x-5}{-2} = \frac{y+7}{5} = \frac{z}{5}$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-2}$.

37. Постройте эллипс, заданный уравнением $4x^2 + 9y^2 = 25$ и укажите координаты фокусов.

38. Вычислите площадь четырёхугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами малой оси эллипса.

39. Составить уравнение окружности, если точки $A(3;2)$ и $B(-1;6)$ являются концами одного из его диаметров.

40. Покажите, что каждое из уравнений определяет гиперболу, найдите её центр, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$

б) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$

в) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$

41. Составить уравнение гиперболы, если её фокусное расстояние 20, а уравнение асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

42. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ и прямой $9x + 2y - 24 = 0$.

43. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси $0x$, если она проходит через точку $A(-4;-1)$.

44. Установите вид кривой II порядка, заданной уравнением и постройте их:

а) $x^2 + 25y^2 - 2x + 5y - 74 = 0$

б) $2x^2 - 8y^2 + 4x + 48y - 134 = 0$.

45. Даны уравнения поверхностей II порядка. Приведите уравнение к каноническому виду и определите вид (название) этой поверхности и постройте эскиз:

а) $-\frac{x^2}{6} + 4y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 2 = 0$

б) $y^2 + 4z^2 = 5x^2$

в) $7x^2 - 3y^2 - z^2 = 21$

г) $z = 8 - x^2 - 4y^2$

д) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 4x + 4y + 4z + 7 = 0$

е) $9x^2 - 16y^2 + 144z^2 + 96y - 576z + 144 = 0$

ж) $2y^2 + x^2 - 4x - 4z^2 + 4 = 0$

ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ:

1. $\frac{1}{2}\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{x}$. **2.** -3 **3.** а) $\vec{b}(2;-3;7)$; $\vec{e}(-1;0;0)$; $\vec{f}(0;2;2)$. **4.** а) $(2;3;-1)$; б) $(-8;1;-1)$. **6.** 16. **7.** 7. **8.** а) 5; $\sqrt{77}$; 10; б) $(6;5;-1)$; в) $\left(3\sqrt{5};\sqrt{26};6\right)$. **9.** $(-1{,}7;0;0)$. **10.** а) $C\left(\frac{5}{3};\frac{11}{3};\frac{13}{3}\right)$; $D\left(\frac{1}{3};\frac{13}{3};\frac{17}{3}\right)$; б) $\left(\frac{5}{7};\frac{29}{7};\frac{37}{7}\right)$. **12.** а) $2\sqrt{649}$; б) 224. **13.** $\frac{20}{3};\frac{20}{7}$. **14.** $-17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$. **15.** $\frac{\sqrt{65}}{2}$. **16.** 4. **18.** а) 20ед^3; б) $\frac{4\sqrt{510}}{17}$. **19.** 28. **20.** образуют базис, $\vec{d}(2;-2;1)$. **21.** $x + y - 7 = 0$. **22.** $12x + 5y - 26 = 0$ или $12x + 5y - 78 = 0$. **23.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ или $\frac{x}{4} + \frac{y}{3/2} = -1$. **24.** $3x + y = 0$.

25. $2x - y - 12 = 0$. **26.** $\frac{56\sqrt{145}}{145}$. **27.** а) $x - 2y + 3z + 3 = 0$; б) $4x - y - 2z - 8 = 0$. **28.** $2x - 3y + z + 1 = 0$. **29.** $x + y + z + 2 = 0$. **30.** 27. **31.** $5x - 6y - 7z + 41 = 0$. **32.** $x = t$; $y = 7t$; $z = -4t$. **33.** $x = 3t$; $y = 7t$; $z = -t$. **34.** $\arccos\frac{3}{133}$. **35.** $\left(\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}; 0\right)$. **36.** $55x - 6y + 28z - 320 = 0$. **37.** $F_1 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{6}; 0\right)$; $F_2 = \left(-\frac{5\sqrt{5}}{6}; 0\right)$. **38.** 16ед^2. **39.** $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$. **41.** $\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$; $-\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1$. **42.** 12ед^2. **43.** $y^2 = -\frac{1}{4}x$. **44.** а) эллипс; б) гипербола. **45.** а) однополостный гиперболоид $-\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{1} = 1$; б) конус $\frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 0$; д) эллипсоид $\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{2}} + (y+2)^2 + + \frac{(z+1)^2}{\frac{1}{2}} = 1$; е) однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{32} - \frac{(y-3)^2}{18} + \frac{(z-2)^2}{2} = 1$; ж) конус $\frac{y^2}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} - z^2 = 0$.

ТЕМА: МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

АУДИТОРНАЯ РАБОТА

1.Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \end{pmatrix};$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Определить размерность данных матриц;

б) Какие из матриц являются квадратными, какие – единичной матрицей, матрицей-столбцом и матрицей-строкой.

в) Для матрицы B назовите элементы b_{21}, b_{33}, b_{42}.

г) для матрицы F назовите элементы, которые образуют главную диагональ, какие – побочную диагональ.

д) Найти $3A$,$-2C$, $\frac{1}{2}D$.

е) Найти матрицы $A^{\text{т}}, B^{\text{т}}, C^{\text{т}}$.

2.Найти X из уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Найти ABи BA, если это возможно:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

4.Найти A^2 если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5.Найти определитель матрицы:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

6.Вычислить определитель с помощью разложения элементов по строке (или столбцу):

а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$.

7.Вычислите определитель приведя матрицу к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

8.При каких значениях переменной определитель равен 0:

а) $\begin{vmatrix} a+3 & 5 \\ -1 & a-3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2^x & 2^{2x} \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \log_3 9 & x \\ 5x & x\log_3 \frac{1}{27} \end{vmatrix}$.

9.Решить:

а) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 8 & x & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} > 0$; в) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ x-5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

10. Найти обратную матрицу (если такая существует) для матриц:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

11.Решить уравнение:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$; б) $x \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$; б) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $K = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 7 & -6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

13. При каких значениях параметра α ранг матрицы равен указанному числу r?

а) $\begin{pmatrix} 2\alpha & 1 \\ 4 & \alpha \end{pmatrix}, r = 2$; б) $\begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}, r = 3$; в) $\begin{pmatrix} -1 & \alpha - 2 \\ 1 & 12 - \alpha \end{pmatrix}, r = 2$.

14. Решить системы матричным методом (если это возможно):

а) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 3y = -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$

15. Решить системы по формулам Крамера (если это возможно):

а) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y - 2z = 5 \\ 3x + 6y + 4z = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x + 3y + 11z + 5t = 2 \\ x + y + 5z + 2t = 1 \\ 2x + y + 3z + 2t = -3 \\ x + y + 3z + 4t = -3 \end{cases}$.

16. Исследовать на совместность системы уравнений и в случае совместности, решить их методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x-2y+5z=3 \\ 2x-4y+z=6; \\ 3x+y-3z=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y+z=1\,; \\ x+z=2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=2\,; \\ 4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-5x_4=-4 \\ -x_1+3x_2+2x_3-4x_4=-8 \\ 3x_1+2x_2-x_3+x_4=14 \\ x_1+x_2+3x_3-4x_4=-4 \end{cases}.$

17. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_3=0\,; \\ 3x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=0 \\ x_1-3x_2+5x_3=0; \\ 4x_1+x_2+4x_3=0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-5x_2+4x_3=0 \\ x_1+17x_2+4x_3=0 \end{cases}.$

ОТВЕТЫ К АУДИТОРНОЙ РАБОТЕ:

1. а) A_{2x3}; B_{3x4}; C_{2x1}; D_{1x3}; F_{2x2}; E_{3x3}. б) квадратные F и E; единичные E; матрица-столбец C; матрица-строка D. в) $b_{21}=0; b_{33}=7; b_{42}$ – не сущ. г) элементы главной диагонали 0; 1; элементы побочной диагонали 5; 6.

д) $\begin{pmatrix} 12 & 24 & -9 \\ 15 & 0 & 18 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -7 & 8 & -3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; $(5 \quad -3)$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2{,}5 & 1{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}$. **3.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -19 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -20 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) не возможно; $\begin{pmatrix} -11 & 28 & -21 \\ 35 & 25 & -6 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} -5 & 15 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$. **5.** а) 23; б) 0; в)-6. **6.** а) -48; б) 42; в) 48. **7.** а) 434; б) 27. **8.** а) -2 ;2 б) 3; в) $-\frac{6}{5}$; 0. **9.** а)2; 3; б) $[-1{,}5;\infty)$; в) 10,5.

10. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ -4 & \frac{20}{7} & 1 \end{pmatrix}$; $B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{9}{23} & -\frac{8}{23} & \frac{1}{23} & -\frac{11}{23} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{18}{23} & -\frac{16}{23} & \frac{2}{23} & -\frac{45}{23} \\ -\frac{11}{23} & -\frac{1}{23} & \frac{3}{23} & \frac{13}{23} \end{pmatrix}$. **11.** а) $\begin{pmatrix} -2{,}4 & -1 \\ 1{,}3 & -1 \end{pmatrix}$;

12. а) 1; б) 3; в) 2. **13.** а) $R \setminus \mp 2$; б) $R \setminus \mp 1; 0$; **14.** а) нельзя решить данным методом, б) (-4;1;-2), в) (1;1;0). **15.** а) (1;-2;3), б) нельзя решить данным методом, в) (-2;0;1;-1). **16.** а) (1;-1;0), б) нет решений, в) $(10-10c;\ c; 15-$

$16c; 4 - -5c)$, где $c \in R$; г) $(3; 1; -2; 1)$ **17.** а) $(0; 0; 0)$ б) $(-17c; 16c; 13c)$, где $c \in R$, в) $\left(-\frac{11}{7}c;\ -\frac{1}{7}c; c\right)$, где $c \in R$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1. Найти $2A - B + 3C$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти X из уравнения:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти AB и BA, если это возможно:

а) $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти A^3 если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Найти значение матричного многочлена $2A^2 + 3A + 5E$ при $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, если E – единичная матрица третьего порядка.

6. Найти определитель матрицы:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

7. Вычислить определитель с помощью разложения элементов по строке (или столбцу):

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -1 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

8. Вычислите определитель приведя матрицу к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

9. Решить:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & x & 8 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \geq 0$;

10. Найти обратную матрицу (если такая существует) для матриц: $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

11. Решить уравнение:

а) $x\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

12. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор, если а) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

13.При каких значениях параметра α ранг. матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & 4 & -8 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ -3 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ равен:

а) 1; б) 2; в) 3?

14. Решить системы матричным методом (если это возможно):

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 13 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 9 \\ 8x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 = -9 \end{cases}$

15. Решить системы по формулам Крамера (если это возможно):

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 7x - 5y = -3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 19 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$.

16. Исследовать на совместность системы уравнений и в случае совместности, решить их методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + y + 2z = 7 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$.

17. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.

ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ:

1. $\begin{pmatrix} 21 & 1 \\ 30 & -6 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$; **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 21 & -6 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.**3 а)** $(42 \quad -13)$; невозможно ;
б) $\begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 19 & 20 & -17 \\ -5 & -5 & 5 \\ -12 & -15 & 6 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} -35 & 45 \\ -30 & 10 \end{pmatrix}$; **5.** $\begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}$.
6. а) 37; б) -15; в) 8. **7.** а)-40; б) –476; **8.** -20. **9.** а) -3; б) $[-8; +\infty)$.
10. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$; B^{-1} – не существует. **12.** а) 2, б) 4, в) 2. **14.** а) $(-1; -2; -4)$, б) $(1; -1; 2)$, в) нельзя решить данным методом. **15.** а) (1;2), б) (3;-1;0), в) (3;-1;4). **16.** а) $\left(\frac{4}{9}; \frac{19}{9}; \frac{20}{9}\right)$, б) $(1; 1; 1)$, в)

$\left(\frac{11+10c_1+4c_2}{5};\ c_1;\ \frac{-7-13c_2}{5}\right)$, где $c_1, c_2 \in R$. **17.** а) $(0;0;0)$, б) $(0;0;0)$, в) $\left(-\frac{2}{3}c_1; \frac{1}{3}c_1 + c_2; c_1; c_2\right)$, где $c_1, c_2 \in R$.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ

ТЕСТ ПО ТЕМЕ: «ВЕКТОРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Вариант 1

1. Даны точки $M(-2;3;5)$, $K(-2;8;-7)$. Модуль вектора $\overrightarrow{MK}$ равен:

1) 12; 2) $\sqrt{165}$; 3) $4\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{13}$; 5) $3\sqrt{5}$.

2. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;3)$. Сумма координат вершины D равна:

1) -74; 2) 10; 3) 11; 4) –1; 5) 9.

3. Косинус угла между векторами $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ равен:

1) $\frac{9}{13}$; 2) $\frac{9}{14}$; 3) $\frac{9}{\sqrt{157}}$; 4) $\frac{4}{7}$; 5) $\frac{1}{9}$.

4. Даны координаты вершин треугольника $A(9;5;5)$, $B(-3;7;1)$, $C(5;7;8)$. Площадь данного треугольника равна:

1) $\sqrt{789}$ ед^2; 2) 28 ед^2; 3) $\sqrt{779}$ ед^2; 4) 27; 5) $7\sqrt{15}$ ед^2.

5. Даны координаты вершин пирамиды $A(3;5;4)$, $B(5;8;3)$, $C(1;2;-2)$, $D(-1;0;2)$. Объем данной пирамиды равен:

1) $\frac{13}{6}$ ед^3; 2) $\frac{11}{5}$ ед^3; 3) $\frac{7}{3}$ ед^3; 4) $\frac{9}{5}$ ед^3; 5) $\frac{17}{8}$ ед^3.

6. Даны векторы $\vec{a} = (1;-2;3)$, $\vec{b} = (4;7;2)$, $\vec{c} = (6;4;2)$, $\vec{d} = (14;18;6)$ в некотором базисе. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти сумму координат вектора $\vec{d}$ в этом базисе:

1) 3; 2) 4; 3) -2; 4) 2; 5) -1.

7. Уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - y + 1 = 0$, $x + y + 5 = 0$ и пересекающей ось $0x$ под углом 30°, имеет вид:

1) $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 3$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}$;
4) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}$; 5) $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

8. Расстояние от точки $D(5;8;-1)$ до плоскости заданной точками $A(5;5;4)$, $B(1;-1;4)$, $C(3;5;1)$ равно:

1) $\frac{5\sqrt{13}}{13}$; 2) $\frac{4\sqrt{19}}{19}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{11}}{4}$; 5) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

9. Эксцентриситет заданной кривой $x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$ равен:

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

10. Определить вид и параметры поверхности $2y^2 + 3(z-1)^2 - 2x^2 - - 8x = 10$ и построить методом сечений:

Ответ: Однополостная гипербола $\frac{y^2}{6} + \frac{(z-1)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$

Вариант 2

1. Даны точки $M(5;3;1)$, $K(6;-4;-9)$. Модуль вектора $\overrightarrow{MK}$ равен:

1) 13 2) $5\sqrt{6}$ 3) $6\sqrt{2}$ 4) 14 5) $5\sqrt{7}$

2. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$, $C(1;2;-3)$. Сумма координат вершины D равна:

1) 11; 2) 10; 3) -8; 4) 20; 5) -2.

3. Косинус угла между векторами $\vec{a} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ равен:

1) $\frac{5\sqrt{139}}{70}$; 2) $\frac{12}{\sqrt{341}}$; 3) $\frac{12\sqrt{3}}{37}$; 4) $\frac{12\sqrt{5}}{31}$; 5) $\frac{6\sqrt{374}}{187}$.

4. Даны координаты вершин треугольника $A(6;1;1)$, $B(4;6;6)$, $C(4;2;0)$. Площадь данного треугольника равна:

1) 8,7 ед^2; 2) $2\sqrt{19}$ ед^2; 3) $\sqrt{77}$ ед^2; 4) $\sqrt{79}$ ед^2; 5) 9 ед^2.

5. Даны координаты вершин пирамиды $A(5;5;4)$, $B(1;-1;4)$, $C(3;5;1)$, $D(5;8;-1)$. Объем данной пирамиды равен:

1) 4 ед^3; 2) 5 ед^3; 3) $\sqrt{17}$ ед^3; 4) $\sqrt{15}$ ед^3; 5) $\sqrt{13}$ ед^3.

6. Даны векторы $\vec{a} = (8;2;3)$, $\vec{b} = (4;6;10)$, $\vec{c} = (3;-2;1)$, $\vec{d} = (7;4;11)$ в некотором базисе. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти сумму координат вектора $\vec{d}$ в этом базисе:

1) -4; 2) 3; 3) 2; 4) 1; 5) -2.

7. Уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x - y + 8 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ и пересекающей ось $0x$ под углом 60°, имеет вид:

1) $y = \sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3}$; 2) $y = \sqrt{3}x - 3 + \sqrt{3}$; 3) $y = -\sqrt{3}x - 3 + \sqrt{3}$; 4) $y = \sqrt{3}x + 2 + \sqrt{3}$; 5) $y = -\sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3}$.

8. Расстояние от точки $D(3;6;7)$ до плоскости заданной точками $A(2;4;3)$, $B(1;1;5)$, $C(4;9;3)$ равно:

1) $\frac{2\sqrt{119}}{119}$; 2) $\frac{3\sqrt{59}}{59}$; 3) $\frac{2\sqrt{117}}{117}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{3\sqrt{103}}{103}$.

9. Эксцентриситет заданной кривой $9x^2 + 36y^2 + 54x - 24y - 14 = 0$ равен:

1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. Определить вид и параметры поверхности $5z^2 + 3y^2 - 6y - 15x^2 - - 30x + 18 = 0$ и построить методом сечений:

Ответ: Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x+1)^2}{2} = -1$

Вариант 3

1. Даны точки $M(-9;4;-1)$, $K(3;-2;-1)$. Модуль вектора $\overrightarrow{MK}$ равен:

1) $6\sqrt{5}$; 2) 13; 3) 14; 4) $5\sqrt{6}$; 5) $7\sqrt{3}$.

2. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(-7;3;5)$, $B(6;0;2)$, $C(-1;5;7)$. Сумма координат вершины D равна:

1) -16; 2) 6; 3) 4; 4) 32; 5) -5.

3. Косинус угла между векторами $\vec{a} = -2\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + \vec{k}$ и $\vec{b} = -3\vec{\imath} + 2\vec{k}$ равен:

1) $\frac{8}{25}$; 2) $\frac{8\sqrt{78}}{231}$; 3) $\frac{4\sqrt{78}}{117}$; 4) $\frac{8}{23}$; 5) $\frac{4\sqrt{75}}{113}$.

4. Даны координаты вершин треугольника $A(3;-1;2)$, $B(-1;0;1)$, $C(1;7;3)$. Площадь данного треугольника равна:

1) $\frac{1}{2}\sqrt{1019}$ ед^2; 2) 7 ед^2; 3) $\sqrt{50}$ ед^2;

4) $\frac{2}{3}\sqrt{113}$ ед^2; 5) $\frac{2}{3}\sqrt{105}$ ед^2.

5. Даны координаты вершин пирамиды $A(6;1;1)$, $B(4;6;6)$, $C(4;2;0)$, $D(1;2;6)$. Объем данной пирамиды равен:

1) 14 ед^3; 2) $\sqrt{167}$ ед^3; 3) 13 ед^3; 4) 12 ед^3; 5) $\sqrt{171}$ ед^3.

6. Даны векторы $\vec{a} = (10;3;1)$, $\vec{b} = (1;4;2)$, $\vec{c} = (3;9;2)$, $\vec{d} = (19;20;7)$ в некотором базисе. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти сумму координат вектора $\vec{d}$ в этом базисе:

1) -3; 2) 4; 3) 5; 4) 2; 5) -6.

7. Уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $-3x + 2y + 12 = 0$, $x - 3y - 11 = 0$ и пересекающей ось $0x$ под углом 120°, имеет вид:

1) $y = -\sqrt{3}x - 3 + 2\sqrt{3}$; 2) $y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 3$;

3) $y = \sqrt{3}x - 3 + 2\sqrt{3}$; 4) $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 1$;

5)$y = \sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3}$.

8. Расстояние от точки $D(6;9;2)$ до плоскости заданной точками $A(9;5;5)$, $B(-3;7;1)$, $C(5;7;8)$ равно:

1) $\frac{103}{\sqrt{787}}$; 2) $\frac{107}{\sqrt{789}}$; 3) $\frac{105}{\sqrt{701}}$; 4) $\frac{99}{\sqrt{373}}$; 5) $\frac{112}{\sqrt{803}}$.

9. Эксцентриситет заданной кривой $4y^2 - 4x^2 + 8y - 4x - 1 = 0$ равен:

1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

10. Определить вид и параметры поверхности $y^2 - 2x^2 + 4x - 4z^2 - - 2 = 0$ и построить методом сечений:

Ответ: Конус $\frac{(x-1)^2}{2} + z^2 = \frac{y^2}{4}$

Вариант 4

1. Даны точки $M(8;-7;1)$, $K(3;-5;-4)$. Модуль вектора $\overrightarrow{MK}$ равен:

1) 8; 2) $5\sqrt{3}$; 3) 7; 4) $4\sqrt{5}$; 5) $3\sqrt{6}$.

2. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(0;7;-2)$, $B(3;-1;5)$, $C(8;1;-3)$. Сумма координат вершины D равна:

1) -12; 2) 2; 3) 8; 4) -6; 5) 4.

3. Косинус угла между векторами $\vec{a}=3\vec{\imath}-\vec{\jmath}+8\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$ равен:

1) $\frac{\sqrt{1554}}{777}$; 2) $\frac{1}{14}$; 3) $\frac{2}{39}$; 4) $\frac{\sqrt{179}}{179}$; 5) $\frac{2\sqrt{1551}}{1551}$.

4. Даны координаты вершин треугольника $A(5;5;4)$, $B(1;-1;4)$, $C(3;5;1)$. Площадь данного треугольника равна:

1) $3\sqrt{17}$ ед^2; 2) $2\sqrt{19}$ ед^2; 3) 13 ед^2; 4) $\sqrt{170}$ ед^2; 5) 12 ед^2.

5. Даны координаты вершин пирамиды $A(9;5;5)$, $B(-3;7;1)$, $C(5;7;8)$, $D(6;9;2)$. Объем данной пирамиды равен:

1) $35\frac{1}{3}$ ед^3; 2) 36 ед^3; 3) $\frac{109}{3}$ ед^3; 4) 37 ед^3; 5) $\frac{107}{3}$ ед^3.

6. Даны векторы $\vec{a}=(1;4;3)$, $\vec{b}=(6;8;2)$, $\vec{c}=(3;1;4)$, $\vec{d}=(21;18;33)$ в некотором базисе. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти сумму координат вектора $\vec{d}$ в этом базисе:

1) 9; 2) -7; 3) 8; 4) 5; 5) -4.

7. Уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $6x-2y+28=0, -x+3y-2=0$ и пересекающей ось $0x$ под углом 135°, имеет вид:

1) $y=-x+5$; 2) $y=-x+3$; 3) $y=-x-2$;
4) $y=-x-6$; 5) $y=-x-4$.

8. Расстояние от точки $D(3;-9;8)$ до плоскости заданной точками $A(0;7;1)$, $B(2;-1;5)$, $C(1;6;3)$ равно:

1) $\frac{\sqrt{7}}{6}$; 2) $\frac{\sqrt{11}}{10}$; 3) $\frac{\sqrt{13}}{11}$; 4) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 5) $\frac{\sqrt{7}}{8}$.

9. Эксцентриситет заданной кривой $24x^2-24x-36y^2-24y-13=0$ равен:

1) $\sqrt{\frac{5}{6}}$; 2) $\sqrt{\frac{7}{8}}$; 3) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{4}}$; 5) $\sqrt{\frac{6}{7}}$.

10. Определить вид и параметры поверхности $3x^2+2y^2-4y-6z-10=0$ и построить методом сечений:

Ответ: Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{3}=z+1$

ТЕСТ ПО ТЕМЕ: «ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ»

Вариант 1

1. Какое число соответствует элементу a_{34} матрицы
$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & -1 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 4 & -3 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & -8 & -9 \end{pmatrix}$?

1) 0; 2) 2; 3) -9; 4) -3; 5) 1.

2. Чему равен элемент a_{23} матрицы $A = 3C - B$, если $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

1) 18; 2) 12; 3) -1; 4) 1; 5) -7.

3. Даны матрицы A_{5x3} и B_{3x2}. Определить размеры матрицы $A \cdot B$.

1) $5x3$; 2) $5x2$; 3) $3x2$; 4) $2x5$; 5) $2x3$.

4. Даны матрицы $A\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Результат умножения матрицы B на матрицу A равен:

1) $\begin{pmatrix} 16 & 19 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -4 & 5 & -13 \\ 8 & 14 & 18 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & -\ 3 & 5 \\ -4 & 3 & -13 \\ 8 & 13 & 18 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 15 & -19 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -3 & -13 \\ 8 & 14 & 18 \end{pmatrix}$.

5. Определитель матрицы $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ равен:

1) 120; 2) 118; 3) 115; 4) 85; 5) 135.

6. Определитель матрицы $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ равен:

1) -70; 2) -72; 3) -78; 4) -63; 5) -65.

7. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$. Матрица обратная к матрице A имеет вид:

1) $\begin{pmatrix}-8 & 2 & -\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3} & -5 & -\frac{1}{3}\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-\frac{7}{3} & -2 & -\frac{1}{3}\\ 8 & -1 & \frac{1}{3}\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3}\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}-\frac{7}{3} & -2 & -\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3}\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}\frac{7}{3} & -2 & -\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3} & -1 & -\frac{1}{3}\\ -7 & 6 & 1\end{pmatrix}$.

8. Ранг матрицы $\begin{pmatrix}2 & 5 & 8 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & -7 & -8\end{pmatrix}$ равен:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.

9. Сумма координат решения системы уравнений $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3=1\\ x_2-x_3=-3\end{cases}$ равна:

1) 2; 2) 5; 3) -3; 4) 1; 5) -4.

10. Исследовать на совместность и решить систему уравнений:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1\\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=2\\ 4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3\end{cases}$$

Ответ: $(10-10c;\ c;\ 15-16c;\ 4-5c)\ c\in R$

Вариант 2

1. Какое число соответствует элементу a_{42} матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & -1 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 4 & -3 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & -8 & -9 \end{pmatrix}$?

1) 0; 2) 6; 3) -2; 4) 8; 5) 1.

2. Чему равен элемент a_{13} матрицы $A = 3C - B$, если $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

1) 5; 2) 6; 3) -1; 4) -7; 5) -5.

3. Даны матрицы A_{4x3} и B_{3x1}. Определить размеры матрицы $A \cdot B$.

1) $1x3$; 2) $4x1$; 3) $3x4$; 4) $4x3$; 5) $1x4$.

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Результат умножения матрицы B на матрицу A равен:

1) $\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 24 & 41 & -30 \\ 0 & 2 & 4 \\ 9 & 20 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 11 & 9 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 12 & -7 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 24 & -41 & -30 \\ 0 & 2 & -4 \\ 9 & 22 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Определитель матрицы $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ равен:

1) 112; 2) 120; 3) 117; 4) 115; 5) 108.

6. Определитель матрицы $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -15 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ равен:

1) 320; 2) 316; 3) 330; 4) 308; 5) 220.

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Матрица обратная к матрице A имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 41 & -34 \\ 27 & -20 & 24 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 36 & 21 & 35 \\ 28 & -29 & 24 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -36 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -36 & 42 & -34 \\ -27 & -29 & 25 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -26 & 41 & 34 \\ 26 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

8. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ равен:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.

9. Сумма координат решения системы уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ равна:

1) 4; 2) -3; 3) 6; 4) 2; 5) -1.

10. Исследовать на совместность и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \end{cases}$$

Ответ: $(-16 + c_1 + c_2 + 5c_3; 23 - 2c_1 - 2c_2 - 6c_3;\ c_1,\ c_2,\ c_3)$
$c_1,\ c_1,\ c_2,\ c_3 \in R$

Вариант 3

1. Какое число соответствует элементу a_{35} матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & -1 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 4 & -3 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & -8 & -9 \end{pmatrix}$?

1) 0; 2) 2; 3) -9; 4) -3; 5) 1.

2. Чему равен элемент a_{22} матрицы $A = 4C - B$, если $C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ -6 & -3 & -8 \end{pmatrix}$.

1) 27; 2) 32; 3) 21; 4) 12; 5) -25.

3. Даны матрицы A_{6x2} и B_{2x4}. Определить размеры матрицы $A \cdot B$.

1) $6x4$; 2) $6x2$; 3) $4x2$; 4) $4x6$; 5) $2x3$.

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Результат умножения матрицы B на матрицу A равен:

1) $\begin{pmatrix} 14 & -2 & 18 \\ 24 & 9 & 8 \\ 13 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -19 & 18 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 14 & 2 & 18 \\ 24 & 8 & -8 \\ 13 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 11 & -10 \\ 19 & 16 \end{pmatrix}$.

5. Определитель матрицы $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ равен:

1) -230; 2) -305; 3) -187; 4) -290; 5) -294.

6. Определитель матрицы $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ равен:

1) 25; 2) -30; 3) -56; 4) -37; 5) 24.

7. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 8 & 3 & -6\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}$. Матрица обратная к матрице A имеет вид:

1) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 5 & 3 & -5\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -4 & 3 & 5\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-3 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ -4 & -3 & 5\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}-3 & 5 & 3\\ 0 & 1 & -4\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 0 & 11 & -2\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

8. Ранг матрицы $\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -4 & 2 & -8\end{pmatrix}$ равен:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.

9. Сумма координат решения системы уравнений $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=10\\ 2x_1-x_2-x_3=-1\\ 3x_1+2x_2-5x_3=-5\end{cases}$ равна:

1) 8; 2) 5; 3) -4; 4) 6; 5) 7.

10. Исследовать на совместность и решить систему уравнений:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=1\\ x_1+3x_2+2x_3=5\\ 5x_1+8x_2+3x_3=11\\ x_1+x_2=1\end{cases}$$

Ответ: $(-1+c; 2-c; c)\ c\in R$

Вариант 4

1. Какое число соответствует элементу a_{24} матрицы $A=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 0 & 2 & 1\\ -6 & -2 & -1 & 8 & 9\\ 7 & 5 & 4 & -3 & 0\\ -4 & 6 & 0 & -8 & -9\end{pmatrix}$?

1) 6; 2) 8; 3) -9; 4) -3; 5) 1.

2. Чему равен элемент a_{21} матрицы $A = 5C - B$, если $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -5 \\ -8 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

1) 18; 2) 28; 3) 12; 4) 25; 5) -7.

3. Даны матрицы A_{5x1} и B_{1x2}. Определить размеры матрицы $A \cdot B$.

1) $5x3$; 2) $5x2$; 3) $1x2$; 4) $2x5$; 5) $2x3$.

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. Результат умножения матрицы B на матрицу A равен:

1) $\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$;

5) невозможно вычислить.

5. Определитель матрицы $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & -9 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ равен:

1) 426; 2) 437; 3) 405; 4) 389; 5)338.

6. Определитель матрицы $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ равен:

1) 430; 2) 315; 3) 345; 4) 550; 5) 503.

7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Матрица обратная к матрице A имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 8 \\ 5 & -7 & -3 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 6 & 7 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$;   5) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \\ -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ равен:

1) 0;   2) 1;   3) 2;   4) 3;   5) 4.

9. Сумма координат решения системы уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$ равна:

1) 3;   2) 1;   3) -2;   4) 0;   5) 5.

10. Исследовать на совместность и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 8y + 3z = 11 \\ x + 3y + 2x = 5 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Ответ: $(c-1; 2-c; c)\ c \in R$.

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

Тест по теме: «Вектора. Аналитическая геометрия»

Вариант	Номера ответов заданий									Ответ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	5	2	1	3	1	2	5	2	Однополостная гипербола $\frac{y^2}{6} + \frac{(z-1)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$
2	2	2	5	3	1	3	1	3	5	Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x+1)^2}{2} = -1$
3	1	3	3	4	3	2	1	2	3	Конус $\frac{(x-1)^2}{2} + z^2 = \frac{y^2}{4}$
4	5	2	1	1	5	1	4	4	1	Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{3} = z + 1$

Тест по теме: «Элементы линейной алгебры»

Вариант	Номера ответов заданий									Ответ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	3	2	5	1	2	3	3	1	$(10-10c;\ c;\ 15-16c;\ 4-5c)\ c \in R$
2	2	5	2	4	3	1	3	4	1	$(-16+c_1+c_2+5c_3; 23-2c_1-2c_2-6c_3;\ c_1,\ c_2,\ c_3)$ $c_1,\ c_1,\ c_2,\ c_3 \in R$
3	1	1	1	2	5	3	2	4	5	$(-1+c; 2-c; c)\ c \in R$
4	2	3	2	4	1	4	3	3	2	$(c-1; 2-c; c)\ c \in R$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ерошевская, Е. Л. Математика : учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей : в 2ч. Ч. 1 / Е. Л. Ерошевская. – Минск: БНТУ, 2018. – 182 с.
2. Гурина, Т. Н., Мороз, О. А., Яблонская, Л. А. Математика. Программные вопросы, и методические указания для студентов-заочников строительных специальностей экономического профиля – Минск: БНТУ, 2012.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный, 14-е изд. – Москва: Айрис-пресс, 2019. – 603 с.
4. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учеб. пособие. В 1 ч. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А.П. Рябушко, Т.А. Жур. – Минск: Вышэйшая школа, 2018. – 319 с.
5. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко [и др.]. – Москва: Мир и образование, 2017. – 368 с.
6. Герасимович, А.И. Математический анализ: справочное пособие. В 2-х частях/ А.И.Герасимович, Н.П.Кеда, Н.А.Рысюк, М.Б.Сугак – Минск: Выш.шк. 2009 г.
7. Гусак А.А. Высшая математика. В 2-х ч. / А.А. Гусак. – Минск: Тетрасистемс, 2001.
8. Апатенок Р.Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / Р.Ф. Апатенок, А.М Маркина. – Минск: Вышэйшая школа, 1986.
9. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа: учебн. пособие для студентов ВУЗов. В 3 т. Т.1. – М.: Высш. шк. , 1988. – 712 с.
10. Краткий курс высшей математики. Учебное пособие для втузов / В.Е. Шнейдер [и др.]. – Минск: Вышэйшая школа, 1972
11. Емеличева Е.В. Методические указания и задания к выполнению самостоятельных работ для студентов 1-ого курса. Методическое пособие / Е.В. Емеличева, С.Ю. Лошкарева, Л.Д. Матвеева. – Минск: БНТУ, 2009.
12. Рудый А.Н. Методические указания к самостоятельным работам по высшей математике для студентов 1-го курса инженерных специальностей вузов / А.Н. Рудый. – Минск: БНТУ, 2010.
13. Емеличева Е.В., Лошкарева С.Ю., Матвеева Л.Д. Методические указания и задания к выполнению самостоятельных работ для студентов 1 курса, ч.2.
14. Лошкарева С.Ю., Очеретняя О.П. Основы высшей математики. Методическое пособие к практическим занятиям. – БНТУ, Минск, 2011.
15. Емеличева Е.В., Лошкарева С.Ю., Матвеева Л.Д. Методические указания и задания к выполнению самостоятельных работ для студентов 1-го курса. Ч.2. //БНТУ, Минск. – 2011.