УДК 61.513.5

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ F(X)=0 С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ MATHCAD
SOLVING EQUATIONS F(X)=0 USING MATHCAD

К.С. Мордвинцев
Научный руководитель – С.О. Новиков, доцент
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
K. Mordvintsev
Supervisor – S. Novikov, Assistant Professor
Belarusian national technical university, Minsk

Аннотация: *оценка методов нахождения корней уравнений.*
Abstract: *evaluation of methods for finding the roots of equations.*
Ключевые слова: *mathcad, функция, деление, приближение, итерация, Ньютон.*
Keywords: *mathcad, function, division, approximation, iteration, Newton.*

Введение

В практике научных и инженерных расчетов часто возникает необходимость решения уравнений типа $f(x) = 0$, где функция определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале $a \le x \le b$.

В общем случае функции вида $f(x)$ не имеют аналитических формул для своих корней. Но на практике коэффициенты в уравнениях могут иметь приближенное значение, а значит и значение корня может иметь приближенное значение с определенной точностью.

Есть несколько способов нахождения корня. К примеру, графический, при котором по точкам строится график функции $y = f(x)$, и приблизительным значением корня является абсцисса точки пересечения данного графика с осью Ox. А большинство функций не имеют аналитических формул для своих корней в противоположность, к примеру, квадратному уравнению.

Но есть ряд методов приближенного нахождения корня.

Основная часть

Рассмотрим 4 различных метода приближенного нахождения корня. Данные методы смоделированы в среде MathCad 14, и для каждого из них построены графики зависимости значения работы программы от начального приближения корня. При выполнении программ использовались функция $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12$ (рис. 1), $a = -2$, $b = 5$, точность вычислений $\varepsilon = 10^{-6}$, $\varphi(x) = \sqrt[3]{5x^2 - 12}$ (рис. 2).

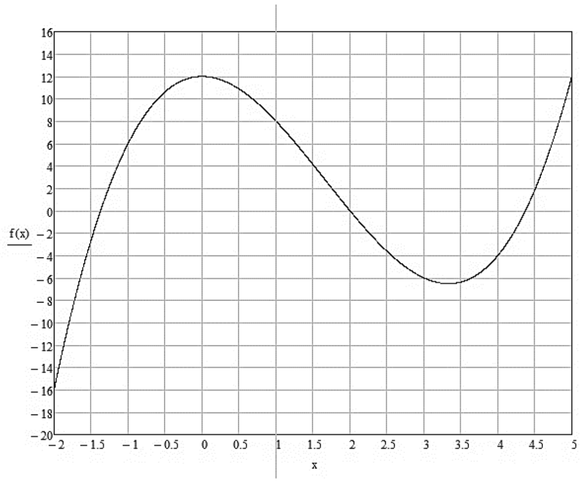

Рисунок 1 – График функции $f(x)$

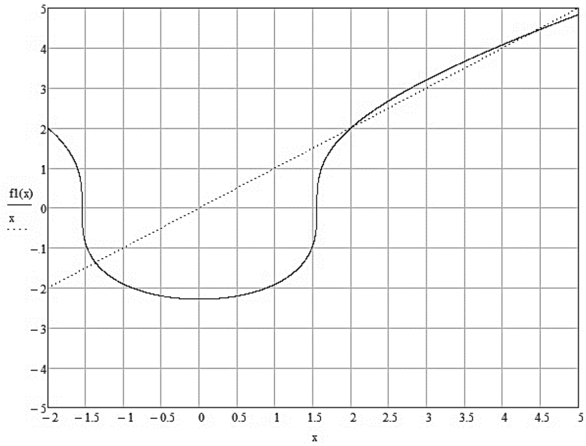

Рисунок 2 – График функции $\varphi(x)$

Метод деления отрезка пополам

Для использования данного метода необходимо, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и ограничена в заданном интервале $[a, b]$, внутри которого находится корень, а также значения функции $f(a)$ и $f(b)$ должны быть разного знака.

Суть метода состоит в следующем:

Находится значение функции в точке, являющейся серединой отрезка $[a, b]$ и сравнивается со значениями функции на концах отрезка. После чего эта середина становится одной из границ нового отрезка, в зависимости от совпадения значений функции в середине и на концах. Процесс повторяется до тех пор, пока не будут выполнены определенные условия (рисунок 4).

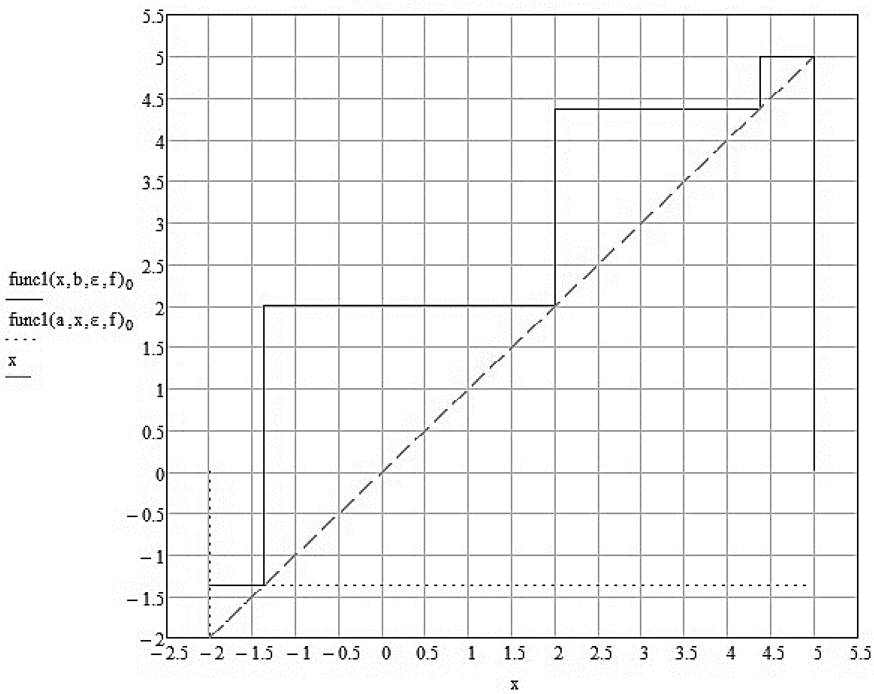

Рисунок 3 – Зависимость значений работы метода деления отрезка пополам от границы начального отрезка $[a, b]$

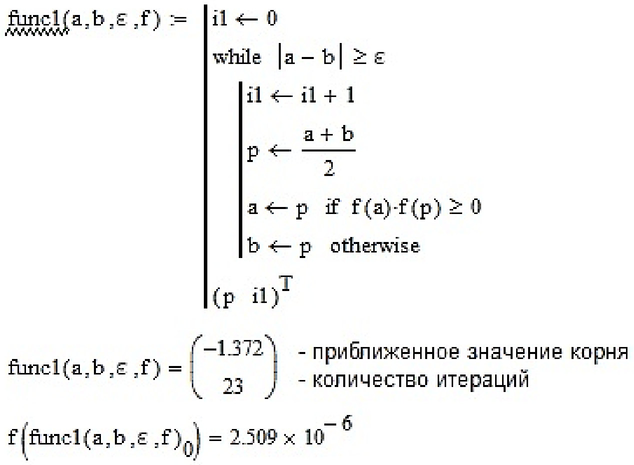

Рисунок 4 – Алгоритм метода деления отрезка пополам

В случае нахождения на отрезке $[a, b]$ одного корня проблем не возникает если $f(a) \cdot f(b) < 0$. При наличии 3 и более корней алгоритм находит либо первый, либо последний из корней на данном промежутке. Метод будет стремиться то к первому, то к последнему корню на отрезке в зависимости от значения функции в середине каждого из отрезков.

На рисунке 3 видно, что при близких значениях x к одному из корней в зависимости от того, справа или слева его взять, алгоритм сходится к различным корням.

Метод простой итерации

Данный метод заключается в том, что исходное уравнение $f(x) = 0$ заменяется на равносильное ему уравнение $x = \varphi(x)$. После чего находится новое приближение корня, равное значению функции $\varphi(x)$ в начальном приближении корня. Процесс повторяется до тех пор, пока не будут выполнены определенные условия (рисунок 6).

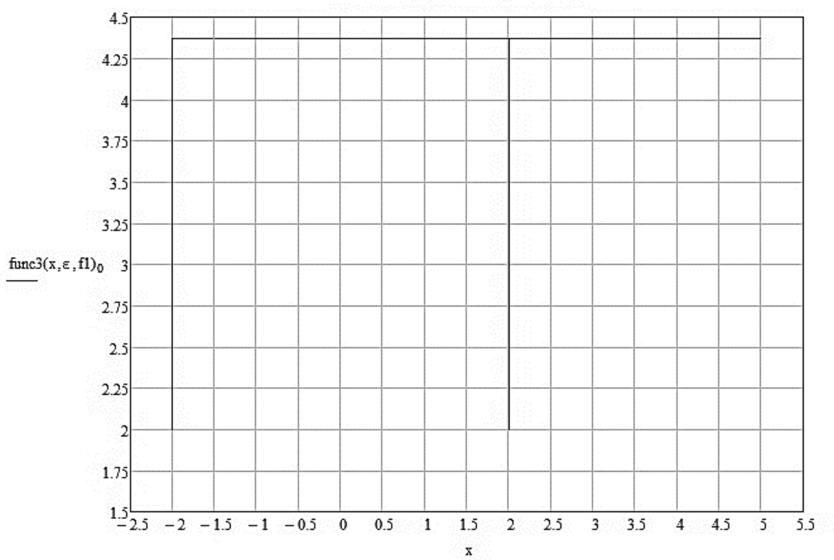

Рисунок 5 – Зависимость значений работы метода простой итерации от начального приближения корня

```
func3(b,ε,f) := | i3 ← 0
                 | while |f(b) − b| ≥ ε
                 |     | i3 ← i3 + 1
                 |     | b ← f(b)
                 | (f(b)  i3)^T
```

$$func3(b,\varepsilon,f1) = \begin{pmatrix} 4.372 \\ 44 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{- приближенное значение корня} \\ \text{- количество итераций} \end{matrix}$$

$$f\left(func3(b,\varepsilon,f1)_0\right) = 3.7 \times 10^{-5}$$

Рисунок 6 – Алгоритм метода простой итерации

Довольно простой метод, обладает средней точностью, но медленной сходимостью. Преимущественно зависит от функции $\varphi(x)$. Можно найти довольно много преобразований в $x = \varphi(x)$, но это надо делать с осторожностью, так как от этого будет зависеть, сходится ли метод к нужному значению. Приближение корня следует брать при $|\varphi'(x)| < 1$, иначе метод может сходится к неверному значению.

Исходя из рис. 5 получим, что данный метод сходится только к одному корню на отрезке $[a, b]$. Также можно заметить аномальные значения при $x = -2$ и $x = 2$. Данное явление объясняется тем, что в этих точках $|\varphi'(x)| > 1$.

Метод последовательных приближений

Модификация метода простой итерации, уменьшающее количество итераций в несколько раз. Но, в отличии от метода простой итерации, здесь берется хорда, соединяющая точки функции $\varphi(x)$, абсциссы которых равны приближениям корней, которые находятся по формуле $x_1 = \varphi(x_0)$. И новым приближением корня x_2 будет абсцисса точки пересечения данной хорды с прямой $y = x$. После чего за новое приближение корня вместо x_0 берется x_2. Процесс повторяется до тех пор, пока не будут выполнены определенные условия (рисунок 7).

```
func2(a,b,ε,f) := | i2 ← 0
                  | sigma1(t,p) ← | |(t − p)/t|   if |t| > 1
                  |               | |t − p|       otherwise
                  | sigma2(t) ←   | |(t − f(t))/t|   if |t| > 1
                  |               | |t − f(t)|       otherwise
                  | while sigma1(b,a) > 10·ε ∧ sigma2(b) > 10·ε
                  |     | i2 ← i2 + 1
                  |     | a ← f(b)
                  |     | b ← a + (a − b) / ( (b − f(b))/(a − f(a)) − 1 )
                  | (b  i2)^T
```

$$func2(a,b,\varepsilon,f1) = \begin{pmatrix} 4.372 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{- приближенное значение корня} \\ \text{- количество итераций} \end{matrix}$$

$$f\left(func2(a,b,\varepsilon,f1)_0\right) = 9.894 \times 10^{-8}$$

Рисунок 7 – Алгоритм работы метода последовательных приближений

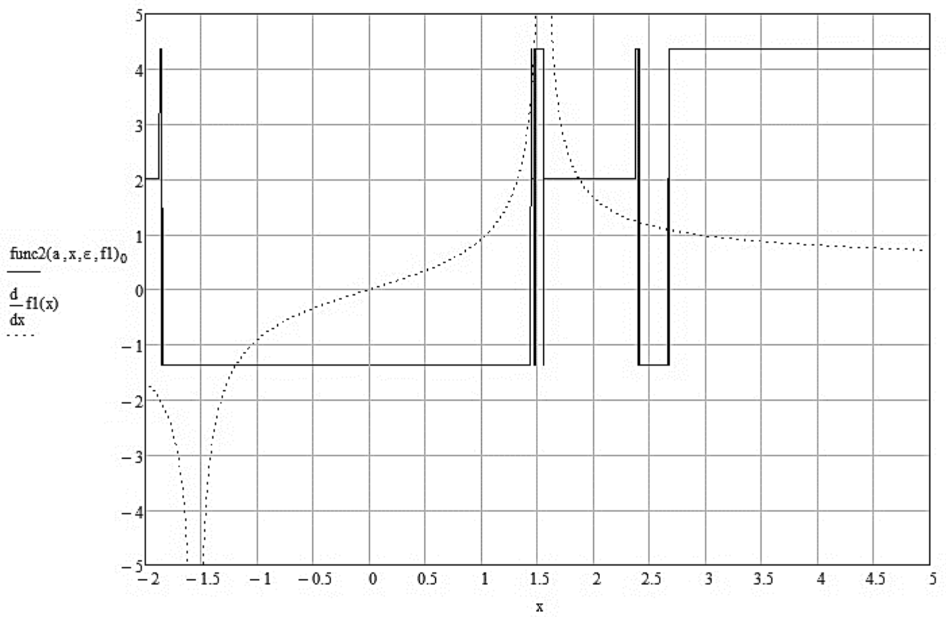

Рисунок 8 – Зависимость значений метода последовательных приближений от начального приближения корня

Данный алгоритм имеет самую высокую точность из данных методов. Но, как и прошлый метод, чувствителен к увеличению значения $|\varphi'(x)| > 1$, что можно видеть из рисунка 8: при увеличении значения $|\varphi'(x)| > 1$ алгоритм становится нестабильным и при малом изменении значения начального приближения может сходится к разным корням, что влияет на возможность использования данного метода для нахождения нескольких корней.

Метод Ньютона

В данном случае за каждое последующее приближение корня берется абсцисса точки пересечения касательной в точке предыдущего приближения с осью Ox. Процесс повторяется до тех пор, пока не будут выполнены определенные условия (рисунок 9).

$$\mathrm{func4}(b,\varepsilon,f) := \left| \begin{array}{l} i4 \leftarrow 0 \\ k(x) \leftarrow \dfrac{f(x)}{\left(\dfrac{d}{dx}f(x)\right)} \\ h(y) \leftarrow \left| \begin{array}{ll} \left|\dfrac{k(y)}{y-k(y)}\right| & \text{if } |y-k(y)|>1 \\ |k(y)| & \text{otherwise} \end{array} \right. \\ \text{while } |f(b-k(b))| > 100\cdot\varepsilon \wedge h(b) > \varepsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} i4 \leftarrow i4+1 \\ b \leftarrow b-k(b) \end{array} \right. \\ (b \;\; i4)^T \end{array} \right.$$

$$\mathrm{func4}(b,\varepsilon,f) = \begin{pmatrix} 4.372 \\ 3 \end{pmatrix}$$ - приближенное значение корня
- количество итераций

$$f\left(\mathrm{func4}(b,\varepsilon,f)_0\right) = 1.045 \times 10^{-3}$$

Рисунок 9 – Алгоритм метода Ньютона

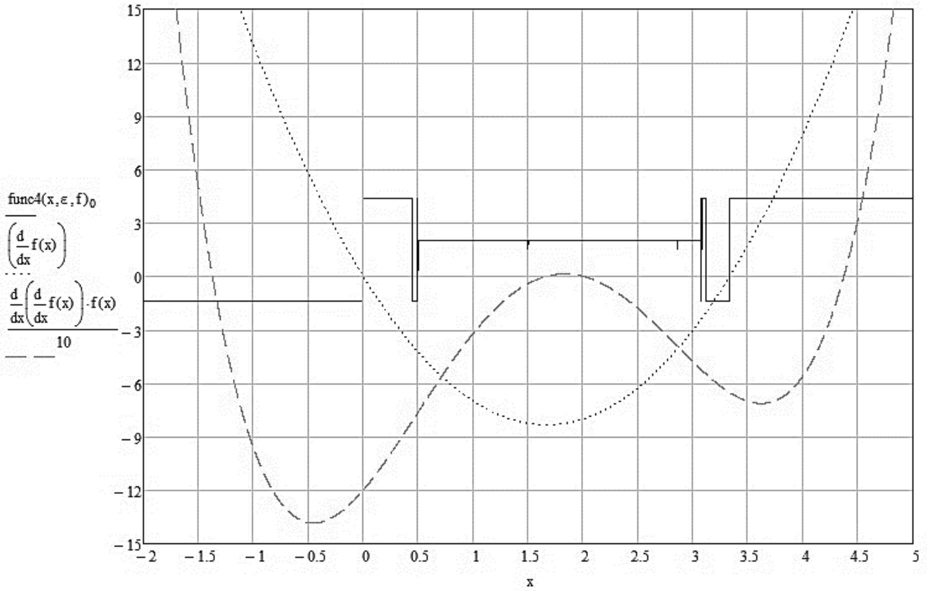

Рисунок 10 – Зависимость значений работы метода Ньютона от начального приближения корня

Данный метод имеет небольшую точность, но хорошую сходимость в случае поиска одного корня на данном промежутке $[a, b]$. В окрестностях точек, при которых значение производной $f'(x) = 0$, либо значение $f(x) \cdot f''(x)$ достаточно большое, данный метод нестабилен, так как касательная в этих точках пересекает ось Ox в точках, абсциссы которых довольно большие значения, что влияет на дальнейшие вычисления (рис. 10)

Таблица 1 – Значения функции в точках, найденных каждым метод, и количество совершенных итераций при нахождении этих точек

Метод	**Деления отрезка пополам**	**Простой итерации**	**Последовательных приближений**	**Ньютона**
f(x)	$2.509 \cdot 10^{-6}$	$9.894 \cdot 10^{-8}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$1.045 \cdot 10^{-3}$
N	23	3	44	3

Заключение

Проблема нахождения решения уравнений вида $f(x) = 0$ до сих пор остается актуальной. Каждый метод из здесь представленных имеет ряд достоинств и недостатков.

Исходя из Таблицы 1 можно получить, что самый точный и быстросходимый алгоритм – метод последовательных приближений. У остальных же методов преобладает либо точность, либо малое количество итераций.

Метод простой итерации не подходит для нахождения нескольких корней на определенном промежутке, метод последовательных приближений и метод Ньютона нестабильны при $|\varphi'(x)| > 1$ и $|f(x) \cdot f''(x)| > 1$ соответственно для каждого из методов.

Поэтому можно сделать вывод, что при соблюдении определенных условий для каждого из методов на промежутке $[a, b]$ и наличия до 2 корней на данном отрезке, эффективнее всего сработает метод последовательных приближений. А при наличии 3 и более корней следует использовать метод деления отрезка пополам.

Литература

1. Фурунжиев Р.И. Вычислительная техника: Практикум / Учебн. пособие для вузов/. – 2-е изд., перераб. И доп. – Мн.: Высш. шк., 1985. = 254 с., ил.

2. Стрекаловская, А.Д. Метод последовательных приближений: методические указания к лабораторной работе / А.Д. Стрекаловская, А.В. Рачинских, Т.А. Санеева; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург : ОГУ, 2011. – 27