

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»

# РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ СИЛ ИНЕРЦИИ И УДАРНОЙ НАГРУЗКИ

Пособие

для студентов специальностей

1-36 01 03 «Технологическое оборудование  
машиностроительного производства»,

1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства»,

1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области машиностроительного оборудования и технологий*

Минск  
БНТУ  
2021

УДК 621:539.3/6 (075.8)

ББК 34.4я7

Р47

**А в т о р ы:**

*Ю. В. Василевич, Е. Ю. Неумержицкая,  
В. М. Хвасько, А. Е. Мойсейчик*

**Р е ц е н з е н т ы:**

профессор кафедры «Физика твердого тела»  
Белорусского государственного университета,  
доктор физ.-мат. наук, профессор *В. Г. Шепелевич*;  
кафедра «Теоретическая и прикладная механика»  
Белорусского государственного университета,  
(зав. каф., доктор физ.-мат. наук,  
профессор *М. А. Журавков*)

Р47

**Решение** динамических задач с учетом сил инерции и ударной нагрузки : пособие для студентов специальностей 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства», 1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства», 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника» / Ю. В. Василевич [и др.]. – Минск : БНТУ, 2021. – 74 с.  
ISBN 978-985-583-320-9.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений: для их самостоятельного освоения учебного материала и отработки навыков решения динамических задач, с учетом сил инерции и ударной нагрузки, по курсу «Механика материалов».

**УДК 621:539.3/6 (075.8)**

**ББК 34.4я7**

**ISBN 978-985-583-320-9**

© Белорусский национальный  
технический университет, 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. УЧЕТ СИЛ ИНЕРЦИИ .....	5
1.1. Определение напряжений во вращающемся брусе или кольце относительно заданной оси $O-O$ .....	7
1.2. Определение напряжений в шатунах .....	10
1.3. Вопросы и задачи для самостоятельной работы по теме «Учет сил инерции» .....	16
2. УДАР .....	27
2.1. Виды удара (по характеру деформации) .....	28
2.2. Определение напряжений и деформаций при ударе .....	29
2.3. Определение напряжений и деформаций при различных видах удара .....	34
2.3.1. Продольный удар .....	34
2.3.2. Разновидности продольного удара .....	38
2.3.3. Поперечный удар .....	45
2.3.4. Скручивающий удар .....	48
2.3.5. Учет массы упругой системы, испытывающей удар .....	50
2.4. Испытания на удар. Ударная проба .....	54
2.5. Вопросы и задачи для самостоятельной работы по теме «Удар» .....	69
ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ .....	71
ЛИТЕРАТУРА .....	74

## ВВЕДЕНИЕ

Динамическим называется такой вид нагружения, при котором приложенные к элементу конструкции внешние нагрузки значительно изменяются за малые промежутки времени. Такие нагрузки, а также вызываемые ими в теле напряжения и деформации, называются динамическими.

Методы и методики решения динамических задач изложены в [1–4] и др. изданиях.

Общий метод расчета на динамическую нагрузку основан на принципе Д'Аламбера, согласно которому всякое движущееся тело в любой момент времени можно рассматривать, как находящееся в состоянии равновесия под действием внешних сил (включая опорные реакции) и сил инерции. Сила инерции равна произведению массы тела на ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению. Принцип Д'Аламбера является одним из важнейших общих принципов динамики несвободных материальных систем, который превращая динамические задачи в статические, значительно упрощает их решения.

Следовательно, когда известны силы инерции, то без ограничений рекомендуется применять метод сечений и для определения внутренних усилий использовать уравнения равновесия статики.

В случаях, когда определение сил инерции затруднительно, для расчета динамических напряжений и деформаций используется закон сохранения энергии.

В учебно-методическом пособии изложены методы решения динамических задач при постоянном ускорении движущегося тела (ускорение или задается, или определяется по законам кинематики твердого тела), при периодически меняющемся по величине и направлению ускорении (исследуются прочностные и деформационные характеристики колеблющихся конструкций, резонанс), расчет конструкций на ударную нагрузку.

## 1. УЧЕТ СИЛ ИНЕРЦИИ

Рассмотрим этот вопрос на конкретном примере (рис. 1.1).

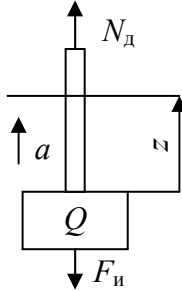


Рис. 1.1

Пусть груз  $Q$  поднимается при помощи троса с ускорением  $a$ . Условимся, что площадь сечения троса –  $A$ . Объемный вес троса –  $\gamma$ . Подсчитаем напряжение в каком-либо сечении  $z$ . Площадь  $A$  в сечении воспринимает:

1. Вес груза  $Q$ .
2. Вес нижней части троса на расстоянии  $z$ :

$$G = \gamma \cdot A \cdot z.$$

3. Силу инерции:

$$F_{\text{и}} = m \cdot a;$$

$$m = \frac{Q + \gamma \cdot A \cdot z}{g}.$$

Определим значение силы инерции:

$$F_{\text{и}} = \frac{Q + \gamma \cdot A \cdot z}{g} \cdot a.$$

Усилие  $N_d$  в сечении  $z$ :

$$\begin{aligned} N_d &= (Q + \gamma \cdot A \cdot z) + \frac{Q + \gamma \cdot A \cdot z}{g} \cdot a = \\ &= (Q + \gamma \cdot A \cdot z) \left( 1 + \frac{a}{g} \right) = N_{ст} \left( 1 + \frac{a}{g} \right). \end{aligned}$$

Динамическое напряжение  $\sigma_d$  в данном случае равно:

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \frac{N_d}{A} = \frac{Q + \gamma \cdot A \cdot z}{A} + \frac{Q + \gamma \cdot A \cdot z}{gA} \cdot a = \\ &= \frac{Q + \gamma \cdot A \cdot z}{A} \left( 1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_{ст} \left( 1 + \frac{a}{g} \right). \end{aligned}$$

Выражение  $\frac{Q + \gamma \cdot A \cdot z}{A}$  по существу отражает статическое напряжение в сечении  $z$ . Если обозначить выражение  $\left( 1 + \frac{a}{g} \right)$  через  $K_d$  – динамический коэффициент – то получим формулу для определения динамических напряжений:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_d,$$

где  $\sigma_d$  – динамические напряжения;

$\sigma_{ст}$  – статические напряжения;

$K_d$  – динамический коэффициент.

Условие прочности записывается в следующем виде:

$$\sigma_d^{\max} = \sigma_{ст}^{\max} \cdot K_d \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma]$  – предельно допустимое нормальное напряжение.

Динамический коэффициент определяется во многих случаях путем непосредственного подсчета. Но бывают случаи, когда его определить аналитическим способом невозможно (например, для мостов). В таких случаях определение динамического коэффициента производится экспериментальным путем.

### 1.1. Определение напряжений во вращающемся бруске или кольце относительно заданной оси $O-O$

Ограничимся случаем равномерного вращения, тогда, обозначая через  $v$  линейную скорость точки, а через  $a_t$  и  $a_n$  – тангенциальную и нормальную составляющие ускорения, будем иметь:

$$a_t = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r,$$

где  $r$  – радиус окружности, являющийся траекторией выбранной точки;

$\omega$  – угловая скорость вращения;

$\gamma$  – удельный вес материала.

Очевидно, что на элемент, вырезанный из бруса, длиной  $dS$  и площадью поперечного сечения  $A$ , будет действовать сила инерции (рис. 1.2):

$$dF_{ин} = \frac{A \cdot \gamma \cdot dS}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = A \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r \cdot dS,$$

и эта сила направлена по радиусу  $CD$ .

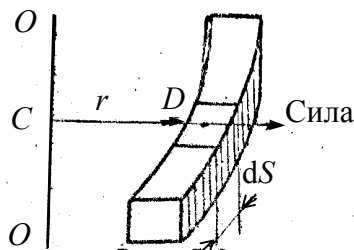


Рис. 1.2

На единицу длины бруса придется сила, равная

$$p_{и} = A \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r, \quad (*)$$

пропорциональная расстоянию точки  $D$  от оси вращения.

Рассмотрим задачу, в которой нагрузка осуществляется центробежными силами инерции.

Пусть дано кольцо, равномерно вращающееся вокруг оси  $O-O$ , перпендикулярной к его плоскости (рис. 1.3).

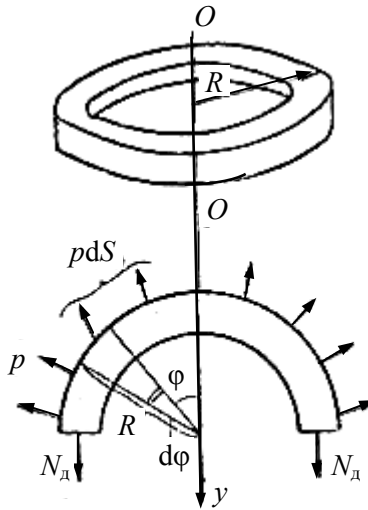


Рис. 1.3

По формуле (\*) найдем нагрузку, равномерно распределенную по длине кольца, интенсивностью  $p_{и} = A \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r$ .

Рассекая кольцо по диаметру, заменим действие нижней половины двумя растягивающими силами  $N_{д}$ . Нагрузка, приходящаяся на элемент дуги  $dS$ , равна (рис. 1.3):

$$p_{и} dS = p_{и} r d\varphi;$$



$$\sum y = 0;$$

$$2N_d - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_n r \cos \varphi \cdot d\varphi = 0,$$

отсюда

$$2N_d = p_n r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \cdot d\varphi = 2p_n r = p_n dS.$$

Растягивающая сила равна:

$$N_d = \frac{2p_n r}{2} = p_n r,$$

или же

$$N_d = \frac{A\gamma}{g} \omega^2 r^2.$$

Следовательно, растягивающее напряжение:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2.$$

Если кольцо делает  $n$  оборотов в минуту, то

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \text{ с}^{-1},$$

тогда

$$\sigma_d = \frac{\gamma \cdot 2^2 \cdot 3,14^2 \cdot n^2 r^2}{981 \cdot 60^2} = 0,000012 \gamma n^2 r^2 = 1,12 \cdot 10^{-5} \gamma n^2 r^2.$$

При расчете маховиков можно пользоваться вышеуказанными формулами:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{p_n r}{A} = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2.$$

## 1.2. Определение напряжений в шатунах

Проверим прочность шатуна  $AB$  (рис. 1.4).

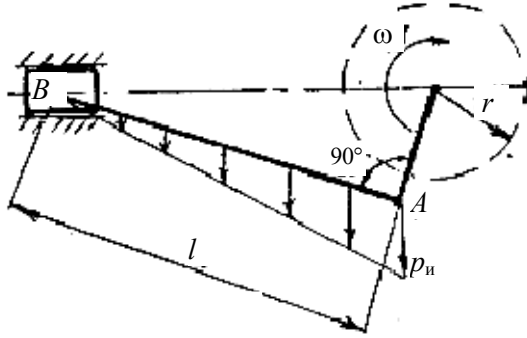


Рис. 1.4

Для этого определим возникающие силы инерции. При вращении шатуна  $AB$  с постоянной угловой скоростью тангенциальное ускорение:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0.$$

Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Можно принять, что силы инерции распределяются в шатуне  $AB$  по закону треугольника. Наиболее опасное состояние шатуна, вызванное силами инерции, будет в том случае, когда кривошип расположен под углом  $90^\circ$  к шатуну. Шатун в этом случае рассматривается как балка, шарнирно опертая в точках  $A$  и  $B$  и имеющая треугольную нагрузку, с наибольшей интенсивностью  $p_n$ , равной:

$$p_n = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot a_n = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2 r}{g}.$$

Ниже предлагаются задачи с подробным методическим решением на учет сил инерции.

*Задача 1.1.* На двух балках швеллерного профиля № 20 установлена лебедка, весом  $Q = 8$  кН, с предельной грузоподъемностью  $F = 30$  кН. Площадь поперечного сечения троса  $A = 5 \text{ см}^2 = 500 \text{ мм}^2$  (рис. 1.5).

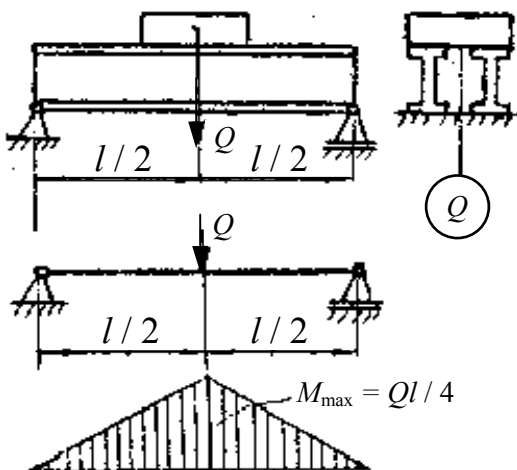


Рис. 1.5

Подъем груза происходит с постоянным ускорением  $4 \text{ м/с}^2$ .

Учитывая вес груза, лебедки и собственный вес балки, определить величину наибольшего нормального напряжения в тросе, в балках, а также величину максимального прогиба.

*Решение.* Определим усилие в тросе, пренебрегая его собственным весом:

$$F_{\text{тр}} = F \cdot K_{\text{д}};$$

$$K_{\text{д}} = \left(1 + \frac{a}{g}\right) = \left(1 + \frac{4}{9,8}\right) = (1 + 0,408) = 1,408;$$

$$F_{\text{тр}} = F \cdot K_{\text{д}} = 30 \cdot 1,408 = 42,24 \text{ кН.}$$

Определим напряжение в тросе:

$$\sigma_{\text{тр}} = \frac{F_{\text{тр}}}{A_{\text{тр}}} = \frac{42240}{500} = 84,48 \text{ МПа} \approx 84,5 \text{ МПа.}$$

Для определения наибольшего нормального напряжения в балках необходимо найти максимальный изгибающий момент.

Полная сосредоточенная сила  $F_{\text{п}}$  будет суммироваться из веса лебедки  $Q$  и силы инерции  $F_{\text{тр}}$ , вызванной подъемом груза:

$$F_{\text{п}} = Q + F_{\text{тр}} = 8000 + 42240 = 50240 \text{ Н} = 50,24 \text{ кН.}$$

Полная сила  $F_{\text{п}}$  по условию задачи расположена посередине пролета, и максимальный изгибающий момент в этом сечении равен:

$$M_F = M_{\text{max}} = \frac{F_{\text{п}} l}{4} = \frac{50,24 \cdot 3}{4} = 37,68 \text{ кНм.}$$

Согласно условию задачи необходимо учесть собственный вес балки из сортамента (ГОСТ 8239-89) (СТ СЭВ 255-76). Масса одного погонного метра швеллера № 20 равна  $18,4 \text{ кг/м} = 0,184 \text{ Н/м}$ . Так как сечение состоит из двух швеллеров, то

$$q_{\text{с.в}} = 0,184 \cdot 2 = 0,368 \text{ Н/м.}$$

По предлагаемой расчетной схеме изгибающий момент от распределенной нагрузки  $q_{\text{с.в}}$ :

$$M_{q_{\text{с.в}}} = \frac{q_{\text{с.в}} \cdot l^2}{8} = \frac{0,368 \cdot 3^2}{8} = 0,414 \text{ Нм} = 0,000414 \text{ кНм.}$$

Максимальный изгибающий момент равен алгебраической сумме моментов от сосредоточенной силы  $F_{\text{п}}$  и собственного веса балок  $q_{\text{с.в}}$ , т. е.

$$M_{\text{полн}} = M_F + M_{q_{\text{с.в}}} = 37,68 + 0,000414 = 37,68 \text{ кНм.}$$

Наибольшее нормальное напряжение в балках будет равно:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{полн}}}{2W_x} = \frac{37,68 \cdot 10^3}{2 \cdot 152 \cdot 10^3} = 123,9 \text{ МПа.}$$

Пользуясь принципом независимости действия сил, будем определять величину прогиба отдельно от сосредоточенной силы и распределенной нагрузки – собственного веса.

Известно, что максимальный прогиб от сосредоточенной нагрузки, расположенной посередине пролета, равен:

$$y = \frac{Fl^3}{48EI}.$$

В нашем примере:

$$y_1 = \frac{F_{\text{п}} l^3}{48EI} = \frac{50240 \cdot 3^3 \cdot 10^9}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 1520 \cdot 10^4} \approx 4,648 \text{ мм.}$$

Прогиб в середине пролета от распределенной нагрузки равен:

$$y_2 = \frac{5q_{\text{с.в}} \cdot l^4}{384EI} = \frac{5 \cdot 0,368 \cdot 3^4 \cdot 10^{12}}{384 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 1520 \cdot 10^4} = \frac{92 \cdot 405}{384 \cdot 15,2} = 0,0065 \text{ мм;}$$

величина полного максимального прогиба равна:

$$y = y_1 + y_2 = 4,648 + 0,0065 \approx 4,7 \text{ мм.}$$

*Задача 1.2.* Шкив, весом  $Q = 250$  Н, вращается со скоростью  $n = 300$  об/мин. Он прикреплен к концу вала  $d = 20$  мм, выступающего на  $c = 150$  мм за подшипник (рис. 1.6).

Определить максимальное напряжение при изгибе вала, если центр тяжести шкива находится на расстоянии  $l = 6$  мм от оси вращения.

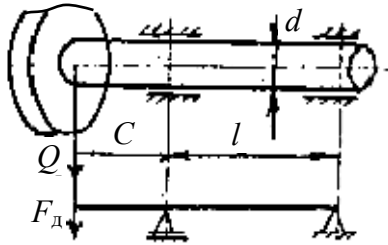


Рис. 1.6

*Решение.* Вследствие наличия эксцентриситета при вращении возникает сила инерции.

Согласно принципу Даламбера приводим систему в состояние мгновенного равновесия, для чего к внешним силам прибавляем силу инерции:

$$F_{\text{и}} = \frac{Q}{g} \cdot a_n.$$

Нормальное ускорение:

$$a_n = \omega^2 \cdot l;$$

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = 10\pi \text{ с}^{-1};$$

$$F_{\text{и}} = \frac{250}{9,81} \cdot (10\pi)^2 \cdot 0,006 = 150 \text{ Н};$$

$$F_{\text{д}} = Q + F_{\text{и}} = 250 + 150 = 400 \text{ Н};$$

$$M_{\text{max}} = F_{\text{д}} \cdot c = 400 \cdot 0,15 = 60 \text{ Нм};$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{60 \cdot 32}{\pi \cdot 0,02^3} = 76,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 76,5 \text{ МПа}.$$

Задача 1.3. В валу, вращающемся в подшипниках  $A$  и  $B$  с постоянной скоростью  $n$ , прикреплено два стержня, несущих на концах груз  $Q$  (рис. 1.7).

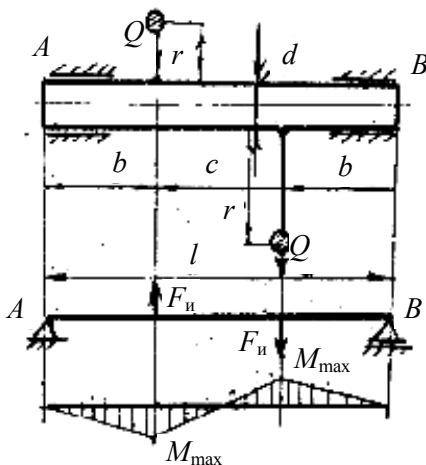


Рис. 1.7

Определить напряжение  $\sigma_{max}$  от изгиба вала силами инерции, пренебрегая собственным весом вала и стержней.

Дано:  $n = 600$  об/мин;  $l = 3$  м;  $c = 2$  м;  $d = 60$  мм;  $r = 0,25$  м;  $Q = 100$  Н.

Решение. Силы инерции, возникающие при вращении, направлены в разные стороны, т. к. нормальные ускорения  $a_n$  направлены к оси вращения.

$$F_{и} = \frac{Q}{g} \cdot a_n,$$

где

$$a_n = \omega^2 \cdot r,$$

но

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = 20\pi \text{ с}^{-1}.$$

Отсюда

$$F_{\text{и}} = \frac{100}{9,81} \cdot (20\pi)^2 \cdot 0,25 = 10000 \text{ Н} = 10 \text{ кН}.$$

В опасных сечениях полная нагрузка определяется как алгебраическая сумма веса груза  $Q$  и возникающих сил инерции. Так как  $F_{\text{и}} \gg Q$ , то весом груза пренебрегаем и для определения напряжения расчетная схема такая же, как и для балки, нагруженной силами инерции:

$$M_{\text{max}} = R_B \cdot b = R_A \cdot b = \frac{10}{3} \text{ кНм};$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 32}{3\pi \cdot 60^3} = 158 \text{ МПа}.$$

*Задача 1.4.* Пружина регулятора сечения  $b \times h$  прикреплена к жесткому стержню  $AC$ , который вращается со скоростью  $n$  вокруг оси  $OO$  (рис. 1.8). Определить максимальное напряжение в пружине и наибольший прогиб ее от изгиба силами инерции.

*Дано:*  $b \times h = 50 \times 5 \text{ мм}$ ;  $Q = 10 \text{ Н}$ ;  $l = 0,25 \text{ м}$ ;  $r = 0,1 \text{ м}$ ;  $n = 300 \text{ об/мин}$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

*Решение.* В рассматриваемой задаче возникающая при вращении сила инерции  $F_{\text{и}}$  направлена от оси вращения. Направление ее не совпадает с направлением груза  $Q$ , который вызывает растяжение пружины. Так как чаще всего напряжения от изгиба значительно больше напряжений растяжения, то влиянием груза  $Q$  пренебрегаем (рис. 1.8).

$$F_{\text{и}} = \frac{Q}{g} \cdot a_n = \frac{Q}{g} \cdot \omega^2 r;$$

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = 10\pi \text{ с}^{-1};$$



$$F_{и} = \frac{10}{9,81} \cdot (10\pi)^2 \cdot 0,1 = 100 \text{ Н};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}; \quad M_{\max} = F_{и} \cdot l;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{100 \cdot 0,25}{0,05 \cdot 0,005^2 / 6} = 120 \cdot 10^6 \text{ Па} = 120 \text{ МПа};$$

$$y_{\max} = \frac{F_{и} \cdot l^3}{3E \cdot I_x} = \frac{100 \cdot 0,25^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,05 \cdot 0,005^3 / 12} = 0,005 \text{ м} = 5 \text{ мм}.$$

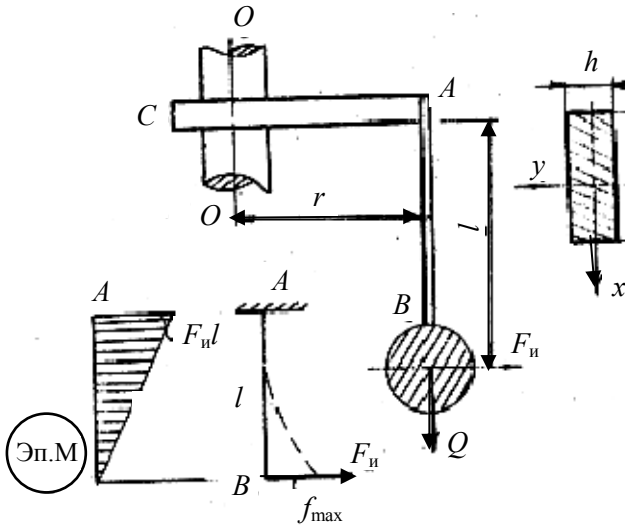


Рис. 1.8

*Задача 1.5.* Определить максимальные напряжения, возникающие в валике  $AB$  от изгиба, вызванного силами инерции маятника (рис. 1.9).

Дано:  $Q = 150 \text{ Н}; r = 0,75 \text{ м}; l = 0,25 \text{ м}; d = 2 \text{ см}; \alpha = 0.$

Собственным весом стержней  $AB$  и  $CD$  пренебречь.

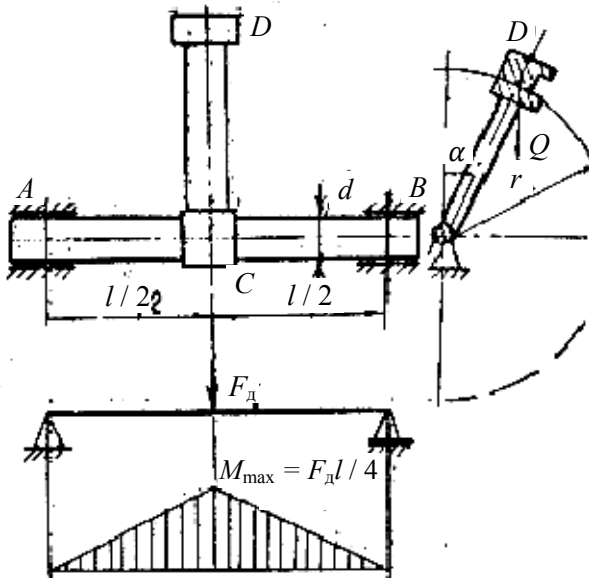


Рис. 1.9

*Решение.* Максимальное усилие на валик при прохождении груза  $Q$  через точку  $F$  ( $\alpha = 180^\circ$ ):

$$F_d = Q + F_n;$$

$$F_d = Q + m \cdot a_n.$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \omega^2 \cdot r,$$

тогда

$$F_d = Q + m \cdot \omega^2 r.$$

Так как линейная скорость

$$v = \omega \cdot r,$$

то

$$F_d = Q + \frac{mv^2}{2}.$$

Исходя из закона сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Q \cdot H.$$

Так как маятник начинает двигаться из состояния покоя, то есть при  $v_0 = 0$ ,

$$\frac{mv^2}{2} = Q \cdot H.$$

При  $\alpha = 0$ ,

$$H = 2r.$$

Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = Q \cdot 2r;$$

$$F_d = Q + \frac{2}{r} \cdot Q \cdot 2r = Q \cdot (1 + 4) = 5Q = 1250 \text{ Н.}$$

Следовательно,

$$M_{\max} = \frac{F_d \cdot l}{4} = \frac{1250 \cdot 0,25}{4} = 78 \text{ Нм,}$$

а максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{78 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 20^3}{32}} \approx 100 \text{ МПа.}$$

*Задача 1.6.* Стальной стержень круглого поперечного сечения равномерно вращается вокруг оси  $OO$ . Определить наибольшую допустимую по прочности длину стержня  $l_{пр}$ , при скорости его вращения  $n = 1200$  об/мин, если

$$[\sigma] = 100 \text{ МПа}; \quad \sigma_B = 800 \text{ МПа}; \quad \gamma = 78,6 \text{ кН/м}^3,$$

и число оборотов, при котором стержень разрушится (рис. 1.10).

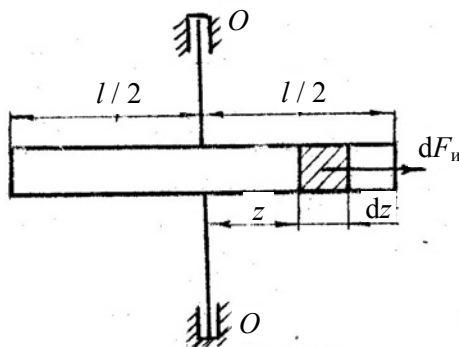


Рис. 1.10

*Решение.* При вращении стержня элементарная сила инерции (центробежная сила), действующая на элемент  $dz$ , масса которой  $dm$  равна:

$$dF_{и} = dm \cdot a_n = \frac{\gamma \cdot A \cdot dz}{g} \cdot \omega^2 z.$$

Максимальное значение продольной силы равно сумме элементарных сил инерции, действующих на одну из половин стержня:

$$N_{д}^{\max} = \int_0^{l/2} dF_{и} = \int_0^{l/2} \frac{\gamma \cdot A \cdot dz}{g} \cdot \omega^2 z = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{l^2}{8}.$$

1. Из условия прочности  $\sigma_{\text{д}}^{\text{max}} = \frac{N_{\text{д}}^{\text{max}}}{A} \leq [\sigma]$  следует, что

$$\frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot l_{\text{пр}}^2}{8g} = [\sigma];$$

$$l_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{8g \cdot [\sigma]}{\gamma \cdot \omega^2}} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{8g \cdot [\sigma]}{\gamma}} = \frac{30}{\pi n} \sqrt{\frac{8g \cdot [\sigma]}{\gamma}} = \frac{30}{3,14 \cdot 1200} \sqrt{\frac{8 \cdot 98 \cdot 100}{7,85 \cdot 10^{-5}}} = 2520 \text{ мм} = 2,52 \text{ м.}$$

2. Исходя из прочности материала, имеем

$$\sigma_{\text{д}}^{\text{max}} = \frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot l_{\text{пр}}^2}{8g} \leq \sigma_{\text{в}},$$

определим число оборотов, при котором произойдет разрушение стержня:

$$\sigma_{\text{д}}^{\text{max}} = \frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot l_{\text{пр}}^2}{8g} = \sigma_{\text{в}},$$

или

$$\frac{\gamma \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot l_{\text{пр}}^2}{30^2 \cdot 8g} = \sigma_{\text{в}},$$

отсюда

$$n = \frac{30}{\pi \cdot l_{\text{пр}}} \sqrt{\frac{8g \cdot \sigma_{\text{в}}}{\gamma}} = \frac{30}{3,14 \cdot 2520} \sqrt{\frac{8 \cdot 9810 \cdot 800}{7,85 \cdot 10^{-5}}} = 3390 \text{ об/мин.}$$

Задача 1.7. Ломаный стержень вращается вокруг оси  $AC$  со скоростью  $n = 300$  об/мин (рис. 1.11).

Дано:  $l = 50$  см;  $d = 2$  см;  $\gamma = 78,5$  кН/м<sup>3</sup>.

Найти  $\sigma_{\max}$  от изгиба стержня силами инерции.

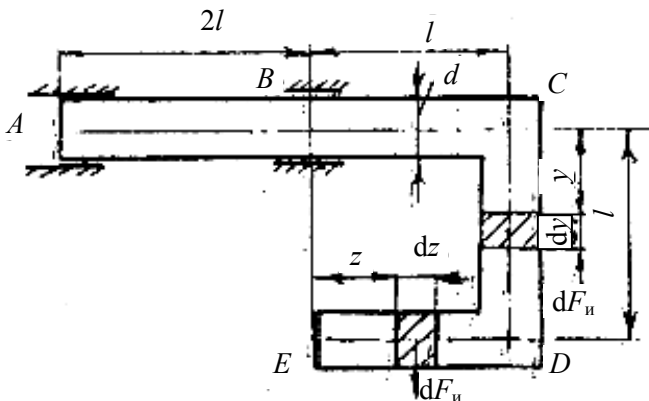


Рис. 1.11

Решение. Определение сил инерции. На участке  $AC$  силы инерции очень малы, ими пренебрегаем.

На участке  $ED$  масса стержня равномерно распределена по его длине, поэтому силы инерции будут представлять равномерно распределенную нагрузку интенсивностью

$$q_{\text{и}} = \frac{dF_{\text{и}}}{dz} = \frac{\gamma \cdot A \cdot dz}{g} = \frac{a_n}{dz};$$

$$a_n = \omega^2 \cdot l, \text{ где } \omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = 10\pi \text{ с}^{-1};$$

$$q_{\text{и}} = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2 l}{g} = \frac{78,5 \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot 0,02^2 (10\pi)^2 \cdot 0,5}{4 \cdot 9,81} = 1,25 \text{ кН/м.}$$

На участке CD сила инерции направлена вдоль оси стержня и изменяется по линейному закону, в зависимости от  $y$  – по закону треугольника:

$$F_{и} = \int_0^l dF'_{и} = \int_0^l \frac{\gamma \cdot A \cdot dy}{g} \cdot a'_n = \int_0^l \frac{\gamma \cdot A \cdot dy}{g} \cdot \omega^2 y = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2 l^2}{2g} = 313 \text{ Н.}$$

От этих сил строится эпюра  $M_{и}$  (рис. 1.12), для чего определяется реакция

$$R_A = \sum M_B = 0; R_A \cdot 2l - F'_{и} \cdot l - q_{и} \cdot l \cdot \frac{1}{2}l = 0; \Rightarrow R_A = 312 \text{ Н;}$$

$$M_{\max} = R_A \cdot 2l = 312 \text{ Нм;}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{312}{\frac{\pi \cdot (0,02)^2}{32}} = 400 \text{ МПа.}$$

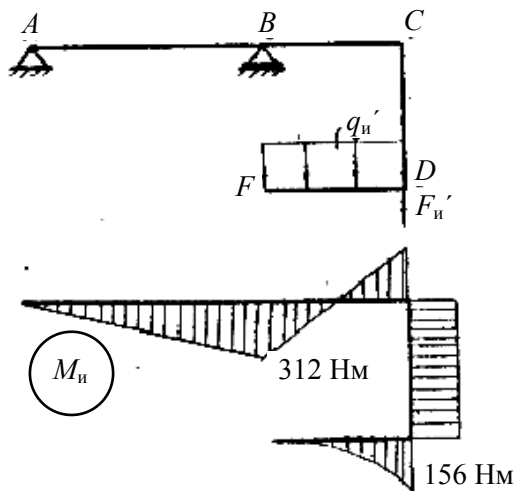


Рис. 1.12

Кроме того, участок  $CD$  испытывает растяжение силой  $(F'_и + q_и \cdot l)$  и напряжение от растягивающей силы

$$\sigma_N = \frac{F'_и + q_и l}{A} = \frac{313 + 1,25 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{\pi \cdot 20^2 / 4} = 3 \text{ МПа},$$

что значительно меньше напряжений от изгиба:

$$\sigma_{\max} = 400 \text{ МПа}.$$

*Задача 1.8.* На вал  $d = 6$  см насажен маховик с моментом инерции массы  $I_0 = 500 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}$ ,  $n = 120$  об/мин. На опоре  $A$  начинает действовать тормоз, останавливающий вал через  $n_1 = 20$  оборотов. Определить максимальные напряжения при скручивании вала силами инерции (рис. 1.13).

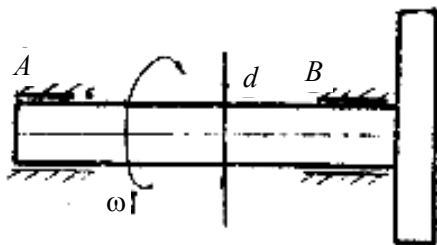


Рис. 1.13

*Решение.* Крутящий момент:

$$M_k = I_0 \varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{\omega_0}{t},$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение;  
 $t$  – время торможения.



Время торможения определим из уравнения движения:

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\omega_0 t}{2},$$

где  $\varphi_0$  – начальный угол;

$$\varphi_0 = 2\pi \cdot n_1 = 40\pi;$$

$\varphi = 0$  – конечный угол, поэтому  $\varphi_0 - \frac{\omega_0 t}{2} = 0$ , отсюда

$$t = \frac{2\varphi_0}{\omega_0};$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2}{2\varphi_0}.$$

Тогда

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = 4\pi \text{ с}^{-1};$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{5} \text{ с}^{-1}.$$

Крутящий момент:

$$M_k = 500 \cdot \frac{\pi}{5} = 100\pi \text{ Нм.}$$

Максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_\rho} = \frac{M_k}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{100 \cdot 10^2 \cdot \pi \cdot 16}{\pi \cdot 60^3} = 7,42 \text{ МПа.}$$

### 1.3. Вопросы и задачи для самостоятельной работы по теме «Учет сил инерции»

1. Каковы общие принципы расчета в сопротивлении материалов при динамических нагрузках?
2. Какие нагрузки называются статическими, а какие динамическими?
3. Что называется динамическим коэффициентом?
4. Чему равен  $K_d$  при равноускоренном подъеме груза  $Q$ ?
5. По какому закону происходит изменение деформаций и напряжений при динамической нагрузке?
6. Между канатом и поднимаемым грузом часто помещают пружину. Для чего это делают?
7. Почему резкое торможение барабана грузоподъемника, вызывающее внезапную остановку опускающегося на канате груза, опасно для прочности каната?
8. Чему равна сила инерции на единицу длины при вращении маховика или ломаного стержня?

## 2. УДАР

*Удар* наблюдается в тех случаях, когда изменение скорости движения конструкции или ее частей происходит в течение небольшого промежутка времени. Возникающие при этом большие ускорения (замедления) приводят к возникновению значительных инерционных сил, которые по законам теоретической механики определить не удастся, так как неизвестно время соударения, то есть время, в течение которого скорость движущегося тела снижается от начала до конца удара. В связи с этим, в инженерной практике при расчете на удар чаще всего используется так называемый *энергетический метод*, основанный на законе сохранения энергии. При этом будем допускать некоторую неточность, т. к. при ударе часть энергии рассеивается или превращается в тепло. Но потери эти незначительны, поэтому с достаточной степенью точности ими можно пренебречь.

В основу теории удара положены следующие допущения:

1. Деформация системы происходит на упругой стадии деформирования, в связи с этим наблюдается пропорциональная зависимость между динамической и статической деформациями, при этом справедлив закон Гука:

$$\frac{\Delta_d}{\Delta_{ст}} = \frac{\Delta_d(z)}{\Delta_{ст}(z)} = K_d.$$

2. Удар считается абсолютно неупругим, т. е. ударяющее тело не отскакивает после удара, а продолжает перемещаться вместе с ударяемым телом, как одно целое.

3. Ударяющее тело является абсолютно жестким и недеформируемым.

4. Сопротивлением движению пренебрегаем, т. е. кинетическая энергия падающего тела полностью переходит в потенциальную энергию деформации упругой системы.

5. Масса ударяемого тела считается весьма малой по сравнению с массой ударяющего тела и в расчет не принимается. Это допущение, как увидим далее, повышает величину динамического напряжения, т. е. увеличивает запас прочности при ударе.

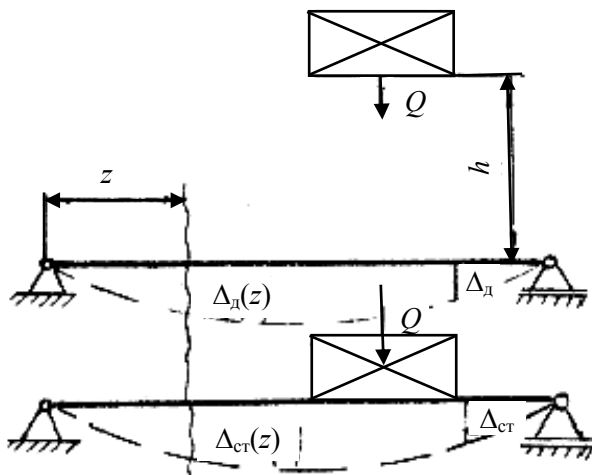


Рис. 2.1

## 2.1. Виды удара (по характеру деформации)

Различают следующие виды удара (рис. 2.2):

- продольный (забивка сваи в грунт);
- поперечный (на балку падает груз);
- скручивающий (при резком торможении вала).

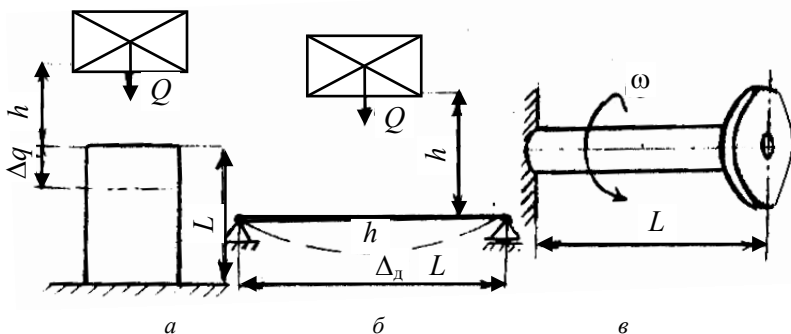


Рис. 2.2. Виды удара:  
*a* – продольный удар; *б* – поперечный удар;  
*в* – скручивающий удар

## 2.2. Определение напряжений и деформаций при ударе

Вывод расчетных формул произведем, рассматривая деформацию невесомой упругой системы. В частном случае это может быть падение груза на конец призматического стержня, другой конец которого закреплен (продольный удар), падение груза на балку, лежащую на опорах (поперечный или изгибающий удар) и т. д.

Рассмотрим два случая нагружения (рис. 2.3):

1. Груз  $Q$  приложен к системе статически. Деформация системы  $\Delta_{ст}$ .

2. Груз  $Q$  падает с некоторой высоты  $h$  и, соударяясь с системой, создает деформацию  $\Delta_{д}$ .

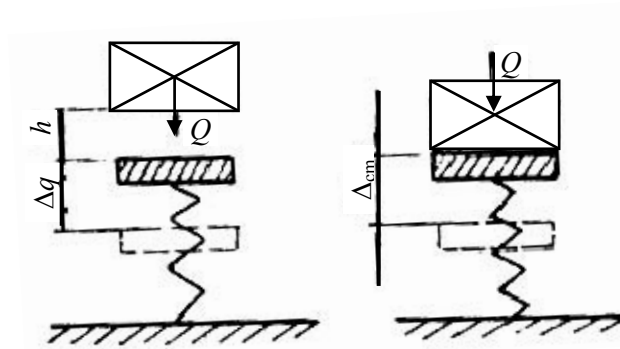


Рис. 2.3

Полагая, что кинетическая энергия  $T$  ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию деформации  $U_{д}$  упругой системы, можем записать:

$$T = U_{д}.$$

Изменение кинетической энергии падающего груза численно равно работе, совершенной им при падении на систему и ее деформировании:

$$T = Q(h + \Delta_{д}).$$

Потенциальную энергию деформации упругой системы тела при ударе определим из допущения 1:

$$U_{\text{ст}} = \frac{Q \cdot \Delta_{\text{ст}}}{2}.$$

Следовательно,

$$U_{\text{д}} = \frac{Q_{\text{д}} \cdot \Delta_{\text{д}}}{2}.$$

Мы знаем, что

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Q}{c},$$

отсюда

$$Q = \Delta_{\text{ст}} \cdot c,$$

где  $c$  – жесткость конструкции, зависящая от свойств материала, форм и размеров тела, вида деформации и положения ударяемого сечения (при растяжении  $c = \frac{EA}{l}$ , т. к.  $\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{N}{c}$ ).

Следовательно,

$$U_{\text{ст}} = \frac{\Delta_{\text{ст}} \cdot c \cdot \Delta_{\text{ст}}}{2} = \frac{c}{2} \Delta_{\text{ст}}^2.$$

При динамическом действии нагрузки нарастание деформации происходит хотя и быстро, но не мгновенно. Можно считать, что  $\Delta_{\text{д}}$  растет постепенно от нуля до окончательного значения в течение очень короткого промежутка времени, но деформации остаются упругими, т. е. справедлив закон Гука. Учитывая сказанное, по аналогии с  $U_{\text{ст}}$  можно записать:

$$U_{\text{д}} = \frac{c \cdot \Delta_{\text{д}}^2}{2}.$$

Но

$$c = \frac{Q}{\Delta_{\text{ст}}},$$

следовательно,

$$U_{\text{д}} = \frac{Q \cdot \Delta_{\text{д}}^2}{2}.$$

В основу исследований мы положили, что кинетическая энергия падающего груза полностью переходит в потенциальную (допущение 4) энергию деформации.

Так как  $U_{\text{д}} = T$ , то

$$Q(h + \Delta_{\text{д}}) = \frac{Q \cdot \Delta_{\text{д}}^2}{2\Delta_{\text{ст}}},$$

или

$$\Delta_{\text{д}}^2 - 2\Delta_{\text{ст}}\Delta_{\text{д}} - 2h \cdot \Delta_{\text{ст}} = 0.$$

Решая уравнение, определяем величину динамической деформации:

$$\Delta_{\text{д}} = \Delta_{\text{ст}} \pm \sqrt{\Delta_{\text{ст}}^2 + 2h \cdot \Delta_{\text{ст}}}.$$

Поскольку знак « $\rightarrow$ » в этой формуле не соответствует физической стороне рассматриваемой задачи ( $\Delta_{\text{д}}$  не может быть меньше  $\Delta_{\text{ст}}$ ), то следует оставить только знак « $+$ ». Следовательно,

$$\Delta_{\text{д}} = \Delta_{\text{ст}} + \sqrt{\Delta_{\text{ст}}^2 + 2h \cdot \Delta_{\text{ст}}} = \Delta_{\text{ст}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} \right).$$

Выражение в скобках показывает, во сколько раз динамическая деформация больше статической, и называется *динамическим коэффициентом* (или коэффициентом динамичности) при ударе:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}$$

Таким образом, при ударном действии нагрузки

$$\Delta_d = K_d \cdot \Delta_{ст}$$

Учитывая линейную связь между напряжением и деформацией, а также принимая одинаковыми модули упругости при статическом и ударном действии нагрузки, по аналогии записываем:

$$\sigma_d = K_d \cdot \sigma_{ст}$$

где  $\Delta_{ст}$  – статическая деформация, возникающая от статического действия силы, равной весу падающего груза, в направлении удара.

Учитывая, что

$$h = \frac{v^2}{2g},$$

где  $v$  – скорость падающего груза в начале удара, динамический коэффициент можно представить в виде:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot \Delta_{ст}}}$$

Выразим величину динамического коэффициента в зависимости от кинетической энергии в момент удара  $T_0$  и энергии упругой деформации системы  $U_{ст}$ . Преобразуем выражение  $\frac{2h}{\Delta_{ст}}$ , умножив и разделив его на  $Q$ :

$$\frac{2h}{\Delta_{ст}} = \frac{2h \cdot Q}{\Delta_{ст} \cdot Q} = \frac{Qh}{\frac{\Delta_{ст} Q}{2}} = \frac{T_0}{U_{ст}}$$



Следовательно,

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{ст}}}.$$

В ряде практических расчетов выражение для динамического коэффициента можно упростить.

Рассмотрим три частных случая:

1. Случай внезапного приложения нагрузки ( $h = 0$ ).

Нагрузка всей величиной воздействует на конструкцию: она надвигается, но не падает. Такой случай нагружения носит название *внезапного* (или мгновенного) *удара*. Он может иметь место при въезде поезда или машины на мост. В этом случае  $K_d = 2$ .

2. Высота падения груза значительно превосходит величину статической деформации, т. е. практически считают

$$\frac{2h}{\Delta_{ст}} \geq 10.$$

В этом случае без особого ущерба можно пренебречь единицей, стоящей под радикалом:

$$K_d \cong 1 + \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}}.$$

3. Высота падения груза во много раз превосходит величину статической деформации, т. е.

$$\frac{2h}{\Delta_{ст}} \geq 100.$$

В этом случае пренебрегаем единицами и перед, и под радикалом:

$$K_d \cong \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}},$$

или

$$K_d \cong \sqrt{\frac{T_0}{U_{ст}}}$$

Погрешность расчетов не превышает 10 %.

## 2.3. Определение напряжений и деформаций при различных видах удара

### 2.3.1. Продольный удар

Допустим, что рассматривается прямолинейный стержень длиной  $l$ , площадью  $A$ , на который падает груз  $Q$ . Под действием нагрузки стержень подвергается деформации сжатия. Для определения динамического напряжения, а, следовательно, и динамического коэффициента, будем пользоваться приближенными формулами (рис. 2.4):

$$K_d = \sqrt{\frac{T_0}{U_{ст}}}$$

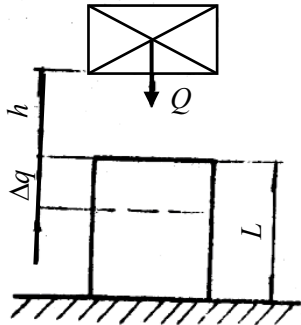


Рис. 2.4

В нашем случае

$$\Delta_{ст} = \Delta l_{ст} = \frac{Ql}{EA}; \quad U_{ст} = \frac{Q \cdot \Delta_{ст}}{2},$$

следовательно,

$$U_{\text{ст}} = \frac{Q^2 l}{2EA},$$

но  $\sigma_{\text{ст}} = \frac{Q}{A}$  – нормальные напряжения; подставим  $\sigma_{\text{ст}}^2 = \frac{Q^2}{A^2}$ , определим:

$$U_{\text{ст}} = \frac{\sigma_{\text{ст}}^2 Al}{2E};$$

$$K_{\text{д}} = \sqrt{\frac{T_0}{U_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{T_0 \cdot 2E}{\sigma_{\text{ст}}^2 \cdot Al}};$$

$$\sigma_{\text{д}} = K_{\text{д}} \cdot \sigma_{\text{ст}} = \sigma_{\text{ст}} \cdot \sqrt{\frac{T_0 \cdot 2E}{\sigma_{\text{ст}}^2 \cdot Al}} = \sqrt{\frac{2T_0 E}{Al}} = \sqrt{\frac{2T_0 E}{V}},$$

где  $V$  – объем стержня.

Из этого выражения следует, что динамические напряжения, в отличие от статических, зависят от упругих свойств материала  $E$ , а также от размеров упругой системы ( $A$ ,  $l$ ,  $V$ ). Динамические напряжения тем меньше, чем больше податливость системы. Этим можно объяснить то, что при буксировке тяжелых барж канаты, соединяющие буксирный катер с баржей, имеют большую длину. Короткие канаты при случайном ударе не выдерживают динамической нагрузки и рвутся. Установка резиновых прокладок между машиной и фундаментом также уменьшает ударное действие.

Рассмотрим влияние на величину динамического коэффициента изменения поперечного сечения стержня.

Для обеих стержней статические напряжения одинаковы (рис. 2.5). Деформации:

$$\Delta l_{\text{ст}}^I = \frac{Ql}{EA};$$

$$\Delta l_{\text{ст}}^{\text{II}} = \frac{Ql_1}{EA} + \frac{Q(l-l_1)}{E \cdot nA}.$$

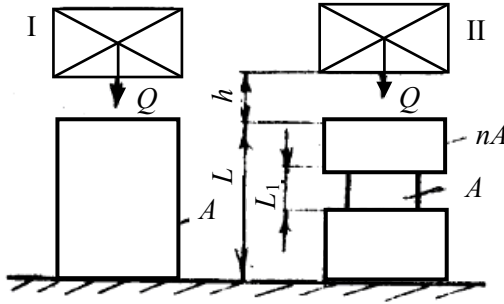


Рис. 2.5

Если предположить, что длина  $l_1$  очень мала (например, трещина), то

$$\Delta l_{\text{ст}}^{\text{II}} \cong \frac{Ql}{E \cdot nA}.$$

Динамический коэффициент:

$$K_{\text{д}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}},$$

тогда

$$K_{\text{д}}^{\text{I}} \cong \sqrt{\frac{2h \cdot EA}{Ql}};$$

$$K_{\text{д}}^{\text{II}} \cong \sqrt{\frac{2hE \cdot nA}{Ql}}.$$

Анализируя полученные выражения, видим, что

$$\frac{K_{д}^{\text{II}}}{K_{д}^{\text{I}}} = \sqrt{n}.$$

Соответственно, больше и динамические напряжения. Таким образом, наличие выточек и трещин отрицательно влияет на величину динамических напряжений. Если же в силу конструктивных особенностей наличие выточек необходимо, то длина их должна быть как можно больше.

Результаты приведенного выше расчета имеют громадное практическое значение. Прежде всего, они показывают, что характер сопротивления стержней удару качественно очень отличается от сопротивления их статической деформации. Кроме того, местные уменьшения площади поперечного сечения на небольшой длине стержня вызывают резкое повышение напряжений.

Для снижения напряжений надо стремиться, главным образом, к увеличению податливости стержня путем увеличения его длины, добавления буферной пружины, замены материала другим, с более низким модулем упругости, выравнивания площадей поперечных сечений. Поэтому при конструировании стержней, работающих на удар, надо добиваться постоянной площади сечения по всей длине стержня; местные утолщения допустимы лишь на небольших участках длины; местные выточки небольшой протяженности крайне нежелательны. Если при таких условиях не удастся сконструировать достаточно прочный стержень, необходимо применение стержней большей длины или равномерное увеличение площади.

В качестве примера можно привести болт, передающий от одной части конструкции на другую растягивающий удар.

Конструкция, показанная на рис. 2.6, *а*, будет плохо сопротивляться удару, так как участок болта с нарезкой, имеющей меньший диаметр, будет работать, как выточка. Для улучшения конструкции надо сделать площадь болта всюду равной площади внутренней нарезки. Этого можно достигнуть высверливанием в нем канала (рис. 2.6, *б*).

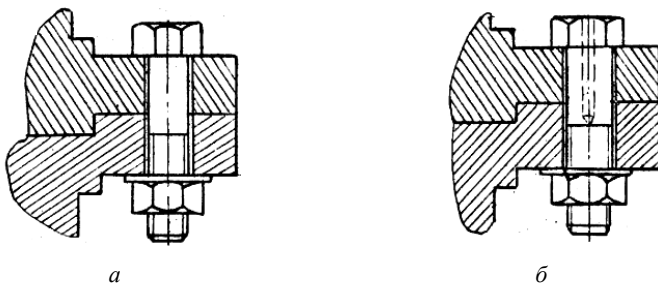


Рис. 2.6

### 2.3.2. Разновидности продольного удара

Рассмотрим несколько случаев продольного удара призматического стержня.

1. Продольный удар стержня о жесткую плиту.

Призматический стержень весом  $Q$  падает с высоты  $h$  и ударяется о жесткую плиту. Поскольку плита не деформируется, то весь запас кинетической энергии  $T = Q \cdot h$ , накопленный падающим стержнем к моменту удара, целиком перейдет в потенциальную энергию деформации падающего стержня. В этом случае напряжение возникает вследствие инерционных нагрузок, распределенных по всей массе стержня.

Если предположить, что динамические напряжения по длине стержня меняются по линейному закону, то (рис. 2.7)

$$\sigma_d(z) = \sigma_d \cdot \frac{z}{l}.$$

Величина потенциальной энергии деформации в элементе стержня  $dz$  равна

$$dU_d = \frac{\sigma_d^2(z)}{2E} \cdot Adz = \frac{\sigma_d^2}{2E} \cdot A \cdot \frac{z}{l^2} dz.$$

Энергия деформации всего стержня:

$$U_d = \int_0^l \frac{\sigma_d^2}{2E} \cdot A \cdot \frac{z^2}{l^2} dz = \frac{\sigma_d}{6E} \cdot Al.$$

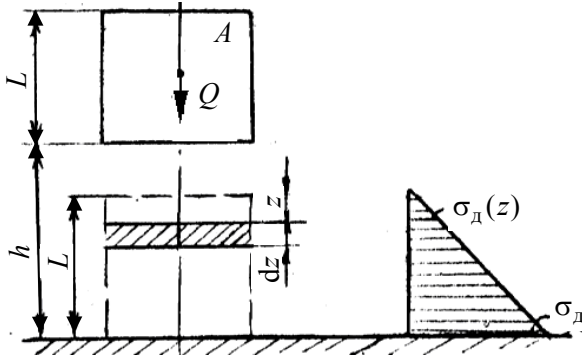


Рис. 2.7

Так как

$$T_0 = U_d,$$

то

$$T_0 = \frac{\sigma_d^2}{6E} Al;$$

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{6ET_0}{Al}}.$$

Учитывая, что

$$T_0 = Qh,$$

получим

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{6EQh}{Al}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2EQh}{Al}}.$$

Отсюда видно, что динамические напряжения в ударяемом стержне будут такие, как будто он получил удар от другого стержня с кинетической энергией в три раза большей, чем у него при падении на жесткую плиту.

2. Призматический стержень движется со скоростью  $v$  и ударяется о жесткую неподвижную стену. Предположим, что динамические напряжения меняются по линейному закону (рис. 2.8).

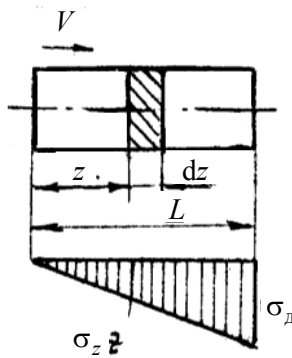


Рис. 2.8

$$\sigma_z = \sigma_d \cdot \frac{z}{l}; \quad \Delta dz = \frac{N_d \cdot dz}{EA};$$

$$T = U_d; \quad T = \frac{\gamma Al}{g} \cdot \frac{v^2}{2};$$

$$dU_d = \frac{N_d \cdot \Delta dz}{2} = \frac{(\sigma_z)^2 \cdot A}{2E} \cdot dz;$$

$$U_d = \int_0^l dU_d = \frac{\sigma_d^2 \cdot A}{6E \cdot l^2} \cdot \int_0^l z^2 dz = \frac{\sigma_d^2 \cdot A \cdot l}{6E};$$

$$\frac{\gamma Al}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{\sigma_d^2 \cdot A \cdot l}{6E}; \quad \sigma_d = v \sqrt{\frac{3\gamma E}{g}}.$$

3. Призматический стержень I движется со скоростью  $v$  и ударяется о другой стержень II, расположенный около жесткой неподвижной стены. Предположим, что динамические напряжения в первом стержне меняются по линейному закону, а во втором стержне постоянны (рис. 2.9).



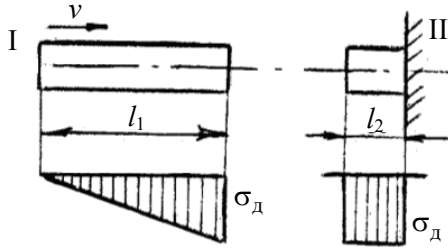


Рис. 2.9

$$T = U_{\text{д}}; \quad T = \frac{\gamma A_1 l_1}{g} \cdot \frac{v^2}{2};$$

$$U_{\text{д}} = U'_{\text{д}} + U''_{\text{д}};$$

$$U'_{\text{д}} = \frac{\sigma_{\text{д}}^2 \cdot A_1 \cdot l_1}{6E}; \quad U''_{\text{д}} = \frac{\sigma_{\text{д}}^2 \cdot A_2 \cdot l_2}{2E};$$

$$\frac{\gamma A_1 l_1}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{\sigma_{\text{д}}^2 \cdot A_1 \cdot l_1}{6E} + \frac{\sigma_{\text{д}}^2 \cdot A_2 \cdot l_2}{2E};$$

$$\sigma_{\text{д}} = v \sqrt{\frac{3\gamma E}{g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3A_2 l_2}{A_1 l_1}}}$$

4. Призматический стержень I движется со скоростью  $v$ , ударяется о другой неподвижный массивный стержень и останавливается (рис. 2.10).

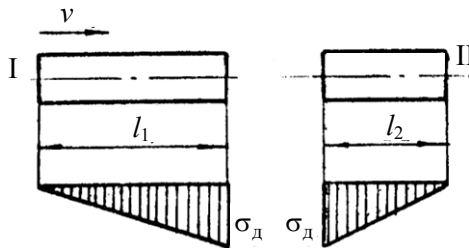


Рис. 2.10

$$T = U_{\text{д}};$$

$$T = \frac{\gamma A_1 l_1}{g} \cdot \frac{v^2}{2};$$

$$U_{\text{д}} = U'_{\text{д}} + U''_{\text{д}};$$

$$U'_{\text{д}} = \frac{\sigma_{\text{д}}^2 \cdot A_1 \cdot l_1}{6E}; \quad U''_{\text{д}} = \frac{\sigma_{\text{д}}^2 \cdot A_2 \cdot l_2}{6E};$$

$$\frac{\gamma A_1 l_1}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{\sigma_{\text{д}}^2}{6E} (A_1 l_1 + A_2 l_2);$$

$$\sigma_{\text{д}} = v \sqrt{\frac{3\gamma E}{g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{A_2 l_2}{A_1 l_1}}}.$$

5. Призматический стержень I движется со скоростью  $v$  и ударяется о другой неподвижный стержень II. После удара оба стержня движутся со скоростью  $v_1$  (рис. 2.11).

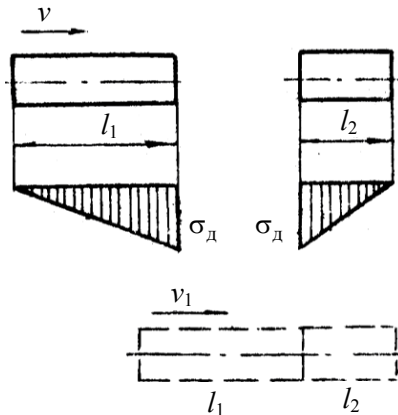


Рис. 2.11

$$T = U_{\text{д}};$$

$$T = \frac{\gamma A_1 l_1}{g} \cdot \frac{v^2}{2} - \frac{\gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 l_2}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2};$$

$$U_{\text{д}} = U'_{\text{д}} + U''_{\text{д}} = \frac{\sigma_{\text{д}}^2}{6E} (A_1 l_1 + A_2 l_2);$$

$$\frac{\gamma A_1 l_1}{g} \cdot v = \frac{\gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 l_2}{g} \cdot v_1;$$

$$v_1 = v \cdot \frac{1}{1 + \frac{A_2 l_2}{A_1 l_1}};$$

$$T = \frac{\gamma A_1 l_1}{g} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{A_1 l_1}{A_2 l_2}};$$

$$\frac{\gamma A_1 l_1}{g} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{A_1 l_1}{A_2 l_2}} = \frac{\sigma_{\text{д}}^2}{6E} (A_1 l_1 + A_2 l_2);$$

$$\sigma_{\text{д}} = v \sqrt{\frac{3\gamma E \cdot A_1 l_1}{g \cdot A_2 l_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{A_1 l_1}{A_2 l_2}}}.$$

6. Призматический стержень I движется со скоростью  $v_1$ , навстречу ему движется стержень II со скоростью  $v_2$ . После удара оба стержня движутся со скоростью  $v_3$  по направлению того стержня, у которого скорость больше (рис. 2.12).

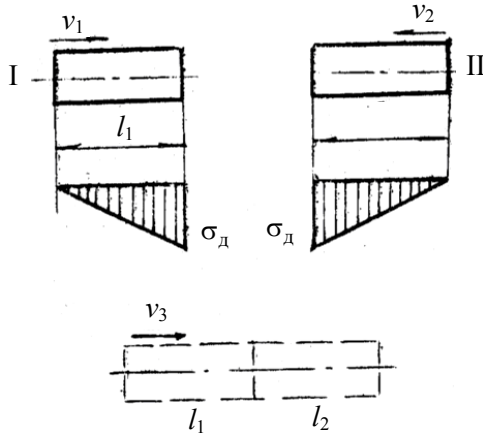


Рис. 2.12

$$T = U_d;$$

$$T = \frac{\gamma A_1 l_1}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2} + \frac{\gamma A_2 l_2}{g} \cdot \frac{v_2^2}{2} - \frac{\gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 l_2}{g} \cdot \frac{v_3^2}{2};$$

$$\frac{\gamma A_1 l_1}{g} v_1 + \frac{\gamma A_2 l_2}{g} v_2 = \frac{\gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 l_2}{g} v_3;$$

$$v_3 = \frac{A_1 l_1 v_1 + A_2 l_2 v_2}{A_1 l_1 + A_2 l_2};$$

$$T = \frac{\gamma}{2g} \left( A_1 l_1 v_1^2 + A_2 l_2 v_2^2 - \frac{A_1 l_1 v_1 + A_2 l_2 v_2}{A_1 l_1 + A_2 l_2} \right);$$

$$U_d = U'_d + U''_d = \frac{\sigma_d^2}{6E} (A_1 l_1 + A_2 l_2);$$

$$\sigma_d = (v_1 - v_2) \cdot \sqrt{\frac{3\gamma E}{g} \cdot A_1 l_1 \cdot A_2 l_2 \cdot \frac{1}{A_1 l_1 + A_2 l_2}}.$$

### 2.3.3. Поперечный удар

Груз  $Q$  падает на середину пролета балки (рис. 2.13). Определим величину максимальных динамических напряжений  $\sigma_{\text{д}}$ .

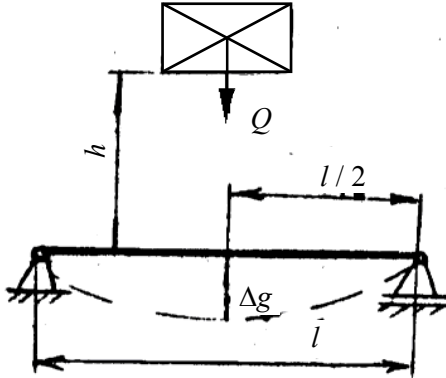


Рис. 2.13

Динамический коэффициент:

$$K_{\text{д}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}$$

Величина статической деформации:

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Q_{\text{д}}^3}{48EI},$$

тогда

$$K_{\text{д}} = \sqrt{\frac{2h \cdot 48EI}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{96hEI}{Ql^3}}$$

Динамические напряжения можно определить, зная величину статических напряжений:

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M}{W} = \frac{Ql}{4W};$$

$$\begin{aligned}\sigma_d &= K_d \cdot \sigma_{ст} = K_d \cdot \frac{M}{W} = \frac{Ql}{4W} \sqrt{\frac{96hEI}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{Q^2 l^2 \cdot 96hEI}{12W^2 Ql^3}} = \\ &= \sqrt{\frac{6QhEI}{W^2 l}} = \sqrt{\frac{6T_0 EI}{W^2 l}}.\end{aligned}$$

Преобразуем выражение:

$$\frac{I}{W^2} = \frac{I}{\left(\frac{I}{y_{\max}}\right)^2} = \frac{I \cdot y_{\max}^2}{I^2} = \frac{y_{\max}^2}{I} = \frac{y_{\max}^2}{i^2 \cdot A}.$$

Следовательно,

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{6T_0 EI}{W^2 l}} = \sqrt{\frac{6T_0 E \cdot y_{\max}^2}{i^2 \cdot Al}} = \frac{y_{\max}}{i} \sqrt{\frac{6T_0 E}{v}}.$$

Итак,

$$\sigma_d = \frac{y_{\max}}{i} \sqrt{\frac{6T_0 E}{v}}.$$

Анализируя полученное выражение, мы видим, что динамические напряжения при ударном изгибе балки зависят от свойств материала  $E$ , объема балки  $V$ , формы ее поперечного сечения  $\frac{y_{\max}}{i}$ , длины  $l$  (чем больше длина пролета, тем легче конструкция переносит ударные нагрузки).

Рассмотрим, как влияет положение поперечного сечения балки на величину динамических напряжений. Представим, что балка имеет прямоугольное сечение с размерами  $h$  и  $b$  (рис. 2.14).

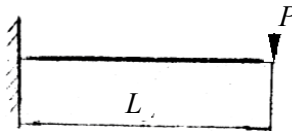


Рис. 2.14

При статической деформации балку целесообразно ставить на ребро. А при динамическом приложении нагрузки? Для анализа определим отношение  $\frac{y_{\max}}{i}$  для каждого варианта расположения сечения.

Случай 1. Балку ставим на ребро (рис. 2.15).

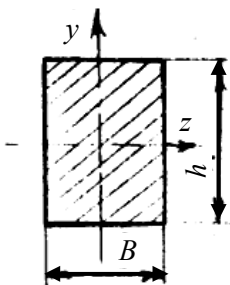


Рис. 2.15

$$y_{\max} = \frac{h}{2};$$

$$i = \sqrt{\frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h}} = \frac{h}{\sqrt{12}};$$

$$\frac{y_{\max}}{i} = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{12}{h^2}} = \sqrt{3}.$$

Случай 2. Балку ставим плашмя (рис. 2.16).

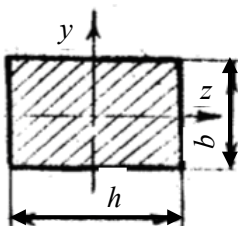


Рис. 2.16

$$y_{\max} = \frac{b}{2};$$

$$i = \sqrt{\frac{h \cdot b^3}{12 \cdot hb}} = \frac{b}{\sqrt{12}};$$

$$\frac{y_{\max}}{i} = \frac{b}{2} \frac{\sqrt{12}}{b} = \sqrt{3}.$$

Таким образом, мы рассмотрели один из парадоксов удара: сечение можно расположить любым способом.

### 2.3.4. Скручивающий удар

Рассмотрим вал, вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  и имеющий шкив и некоторое тормозное устройство. При внезапном торможении, а также при резком пуске, вал будет испытывать скручивающий удар.

Определим величину динамических напряжений, возникающих в сечении вала при ударе (рис. 2.17).

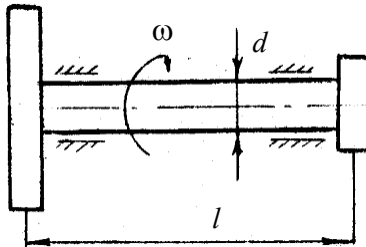


Рис. 2.17

$$\tau_d = \tau_{ст} \cdot K_d,$$

где  $\tau_{ст} = \frac{M_k}{W_p}$ ,  $M_k$  – крутящийся момент.



Известно

$$\Delta_{\text{ст}} = \varphi = \frac{M_{\text{к}} \cdot l}{G \cdot I_{\rho}},$$

откуда

$$U_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{к}} \varphi}{2} = \frac{M_{\text{к}}^2 l}{2GI_{\rho}}.$$

Ранее было получено также

$$K_{\text{д}} \approx \sqrt{\frac{T_0}{U_{\text{ст}}}}.$$

Подставив  $T_0$  и  $U_{\text{ст}}$ , определим величину динамического коэффициента:

$$K_{\text{д}} = \sqrt{\frac{T_0 \cdot 2GI_{\rho}}{M_{\text{к}}^2 \cdot l}} = \sqrt{\frac{T_0 \cdot 2GI_{\rho}}{\tau^2 \cdot W_{\rho}^2 \cdot l}}.$$

Преобразовав выражение:

$$\frac{I_{\rho}}{W_{\rho}^2} = \frac{I_{\rho}}{(I_{\rho} / \rho_{\text{max}})} = \frac{I_{\rho} \cdot \rho_{\text{max}}^2}{I_{\rho}^2} = \frac{\rho^2}{I_{\rho}} = \frac{\rho^2 \cdot 2}{\pi \cdot \rho^4} = \frac{2}{\pi \cdot \rho^2} = \frac{2}{A},$$

получим

$$K_{\text{д}} = \sqrt{\frac{T_0 \cdot 2G \cdot 2}{\tau^2 \cdot l \cdot A}} = \frac{2}{\tau} \sqrt{\frac{T_0 G}{\nu}}.$$

Величина динамических напряжений

$$\tau_{\text{д}} = \tau_{\text{ст}} \cdot K_{\text{д}} = \tau_{\text{ст}} \cdot \frac{2}{\tau} \sqrt{\frac{T_0 G}{\nu}} = 2 \sqrt{\frac{T_0 G}{\nu}},$$

где  $T_0$  – кинетическая энергия маховика:

$$T_0 = \frac{I_0 \cdot \omega^2}{2},$$

где  $I_0$  – момент инерции приведенной массы маховика:

$$I_0 = \frac{Q}{g} r^2.$$

Анализируя полученную формулу, мы видим, что напряжение в сечении вала зависит от свойств материала  $G$  и от размеров вала.

Пользуясь выведенными формулами, необходимо ясно представлять, в каких пределах ими можно пользоваться. Необходимо иметь в виду, что указанный метод является приближенным.

1. Воспользовавшись законом сохранения энергии, мы не учитывали, что часть энергии теряется на нагревание, на создание электромагнитных явлений, на пластические деформации в месте удара и т. д.

2. Рассматривалась идеально упругая система, то есть формулы справедливы, пока напряжения в конструкции не превышают предела упругости.

3. Формулы не справедливы при очень большой скорости удара, когда кинетическая энергия не успевает преобразоваться в потенциальную (удар пули).

4. Формулы не справедливы, когда ударяемая система имеет слишком большие массу или жесткость.

### ***2.3.5. Учет массы упругой системы, испытывающей удар***

При определении напряжений мы предполагали, что вся энергия удара переходит в потенциальную энергию деформации ударяемого тела. В действительности часть ее переходит в энергию местных деформаций, наблюдаемых в месте удара. При значительной массе ударяемого тела эта поправка может оказаться существенной.

Для учета влияния массы упругой системы в процессе удара следует различать два этапа деформации.

Первый этап начинается с момента соприкосновения падающего груза, имеющего максимальную скорость  $v$ , с упругой системой и заканчивается, когда произойдет смятие материала (скоростью  $v_1$ ), а верхний конец ударяемого тела приобретет скорость  $v_1$ , (рис. 2.18).

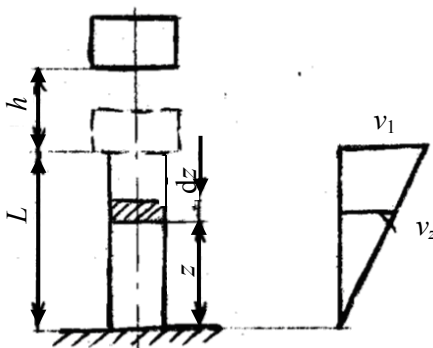


Рис. 2.18

Второй этап начинается с момента совместного движения груза и конца ударяемого тела. Если в момент начала второго этапа удара верхний конец ударяемого тела будет иметь скорость  $v_1$ , то, предположив, что скорость последующих сечений тела снижается по линейному закону, достигая нулевого значения в нижнем сечении, найдем (см. рис. 2.18)

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{z}{l}.$$

Кинетическая энергия  $T_c$  массы тела длиной  $dz$ :

$$dT_c = \frac{\gamma A \cdot dz}{2g} \left( v_1 \cdot \frac{z}{l} \right)^2.$$

Полная кинетическая энергия всего тела:

$$T_c = \int_0^l dT_c = \frac{\gamma A l}{3} \cdot \frac{v_1^2}{2g}.$$

Обозначив собственный вес тела через  $Q_{\text{св}}$ , кинетическую энергию в начале второго этапа выразим формулой:

$$T_c = \frac{Q_{\text{св}}}{3} \cdot \frac{v_1^2}{g}.$$

Следовательно, для учета массы ударяемого тела нужно к уда-  
ряющему грузу присоединить  $1/3$  веса тела, испытывающего удар.

Величина  $\frac{1}{3}Q_{\text{св}} = Q_{\text{пр}}$  трактуется как *приведенный вес*, а  $1/3$  – *коэффициент приведения*, показывающий, какую часть веса упру-  
гой системы следует присоединить к весу ударяющего груза. По-  
этому обозначим коэффициент приведения:

$$K_{\text{св}} = \frac{Q_{\text{пр}} / v_1^2}{2g}.$$

Величина коэффициента приведения зависит от особенностей  
упругой системы и в небольшой мере от принятого закона распре-  
деления скоростей. Величину  $v_1$  определим из закона сохранения  
количества движения. К моменту соприкосновения скорость груза  $v$ ,  
а скорость тела равна нулю. В следующий момент обе массы дви-  
жутся с одинаковой скоростью  $v_1$ , поэтому

$$\frac{Q}{g} v = \frac{Q + Q_{\text{пр}}}{g} v_1,$$

откуда

$$v_1 = v \frac{1}{1 + \frac{Q_{\text{пр}}}{Q}}.$$

Кинетическая энергия груза и тела:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{Q + Q_{\text{np}}}{g} \cdot \frac{v_1^2}{2} = \frac{Q}{2g} \left( 1 + \frac{Q_{\text{np}}}{Q} \right) v_1^2 = \\
 &= \frac{Q}{2g} \left( 1 + \frac{Q_{\text{np}}}{Q} \right) \frac{v^2}{\left( 1 + \frac{Q_{\text{np}}}{Q} \right)^2} = \frac{Q \cdot v^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Q_{\text{np}}}{Q}}.
 \end{aligned}$$

Энергия  $T$  при ударе, согласно закону сохранения энергии, превратится в потенциальную энергию  $U_c$  деформации упругого тела. Поэтому полученное выражение энергии удара  $T$  должно быть подставлено вместе  $T_0$  в формулу для определения динамического коэффициента:

$$\begin{aligned}
 K_d &= 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q \cdot v^2}{2g \left( 1 + \frac{Q_{\text{np}}}{Q} \right) U_c}} = \\
 &= 1 + \sqrt{1 + \frac{Q \cdot h}{U_c \left( 1 + \frac{Q_{\text{np}}}{Q} \right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_c \left( 1 + \frac{Q_{\text{np}}}{Q} \right)}}.
 \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{v^2}{2g} = h \text{ и } Qh = T_0,$$

максимальное напряжение в теле, испытывающем удар, будет

$$\sigma_d = \sigma_c \cdot K_d = \sigma_c \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_c \left( 1 + \frac{Q_{\text{np}}}{Q} \right)}} \right).$$

Отсюда видно, что при учете массы ударяемого тела снижается напряжение при ударе.

В других случаях удара (рис. 2.19):

$$Q_{\text{пр}} = \frac{17}{35} Q_{\text{балки}};$$

$$Q_{\text{пр}} = \frac{33}{140} Q_{\text{балки}}.$$

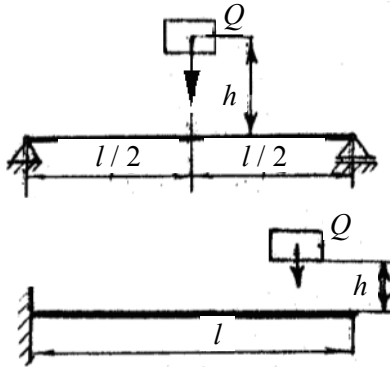


Рис. 2.19

#### 2.4. Испытания на удар. Ударная проба

Как известно, динамическое действие нагрузок не ограничивается тем, что напряжения (в пределах упругости) оказываются иными, чем при статических нагрузках. Сам материал иначе реагирует на динамическую нагрузку, нежели на статическую. Особенно это заметно при ударе.

Опыты с ударным разрывом образцов показывают, что диаграмма растяжения в этом случае имеет иной вид, чем при статическом разрыве (рис. 2.20).

При ударе характерны повышение предела текучести и смещение предела прочности влево. Поэтому при выборе материала для деталей, подвергающихся динамическим нагрузкам, вводят так называемую *ударную пробу*. Эта проба заключается в том, что образцы мате-

риала подвергают разрушению ударом (чаще всего при изгибе) и оценивают количество энергии, затраченной на их разрушение.

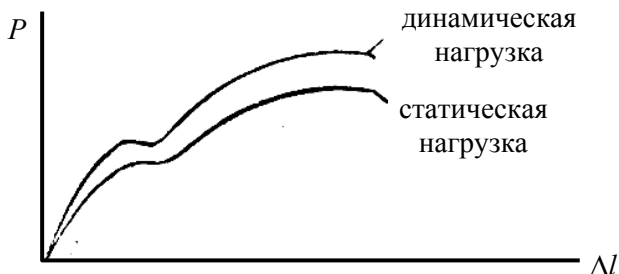


Рис. 2.20

Если количество энергии, затраченной на излом образца, равно  $T$ , а площадь поперечного сечения образца в месте излома –  $A$ , то

$$a = \frac{T}{A} \frac{\text{Нм}}{\text{м}^2},$$

где  $a$  – ударная вязкость.

Для того, чтобы выявить свойства материала при ударной пробе, образцу придают специальную форму, в том сечении, где наносится удар, делают надрез (рис. 2.21).

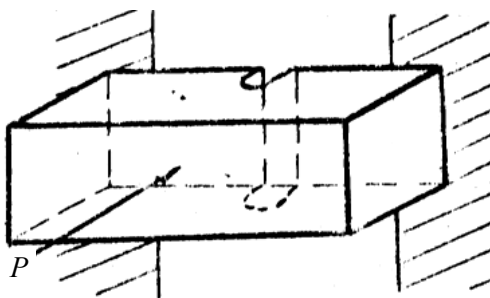


Рис. 2.21

Надрез делают для того, чтобы поставить материал в наиболее тяжелые условия работы в отношении ударных нагрузок. Надрез

создает ослабление сечения и, следовательно, повышение напряжения изгиба на протяжении небольшой длины образца. Мы уже видели, как сильно влияет на величину напряжений подобное местное ослабление сечения (см. рис 2.5). Кроме того, наличие надреза вызывает вблизи его дна еще местные повышенные напряжения.

Ниже предлагаются задачи с подробным методическим решением при ударном приложении нагрузок.

*Задача 2.1.* Определить допускаемую высоту падения  $h$  груза  $Q = 80$  Н, при  $[\sigma_d] = 100$  МПа, с учетом и без учета собственного веса. Материала стержня – сталь:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\gamma = 8$  г/см<sup>3</sup> =  $8 \cdot 10^4$  Н/м<sup>3</sup> (рис. 2.22).

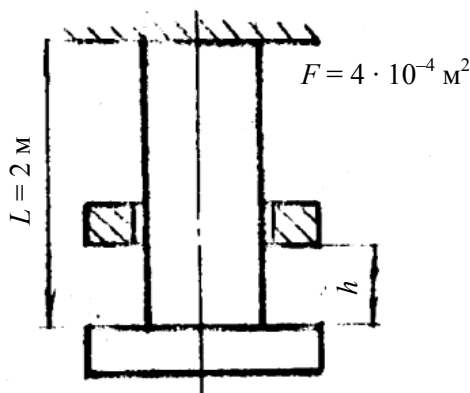


Рис. 2.22

*Решение.* Статическое напряжение:

$$\sigma_{ст} = \frac{Q}{A} = \frac{80}{40 \cdot 10^{-4}} = 20 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 = 0,2 \text{ МПа.}$$

Динамический коэффициент:

$$K_d = \frac{[\sigma_d]}{\sigma_{ст}} = \frac{100}{0,2} = 500.$$



С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 K_d &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\beta Q_1}{Q}}} = \\
 &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2h \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{80 \cdot 2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 2}{80}}} = \\
 &= 1 + \sqrt{1 + \frac{1 \cdot 10^6}{1 + \frac{0,8}{3}} h} = 1 + \sqrt{1 + \frac{3 \cdot 10^6}{3,8} h},
 \end{aligned}$$

где  $\Delta_{ст} = \frac{Q}{c} = \frac{Ql}{EA}$ ;

$\beta$  – коэффициент приведения массы стержня к месту удара равный 1/3;

$Q_1 = \gamma \cdot A \cdot l$  – вес стержня.

$$500 = 1 + \sqrt{1 + \frac{3 \cdot 10^6}{3,8} h};$$

$$499^2 = 1 + \frac{3 \cdot 10^6}{3,8} h;$$

$$h = \frac{(499^2 - 1) \cdot 3,8}{3 \cdot 10^6} = 0,3154 \text{ м} \approx 315 \text{ мм.}$$

Без учета массы стержня:

$$K_d = 500 = \sqrt{\frac{2hEA}{Ql}} = \sqrt{\frac{2h \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{80 \cdot 2}} = 10^3 \cdot h;$$

$$500^2 = 10^6 \cdot h;$$

$$h = \frac{25 \cdot 10^4}{10^6} = 0,25 = 250 \text{ мм.}$$

Это значит, что расчет, не учитывавший вес стержня, в рассматриваемом случае дает заниженное значение безопасности высоты падения груза на

$$\frac{315 - 250}{315} \cdot 100 \% = 20,6 \%$$

*Задача 2.2.* Определить наибольшие напряжения, возникающие при ударе в поперечных сечениях ступенчатого бруса. Материал – сталь: предел пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}} = 300$  МПа;  $h = 25$  мм;  $F = 4000$  Н;  $A_1 = 1000$  мм<sup>2</sup>;  $A_2 = 2A_1$ ;  $l_1 = 400$  мм;  $l_2 = 400$  мм;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа (рис. 2.23).

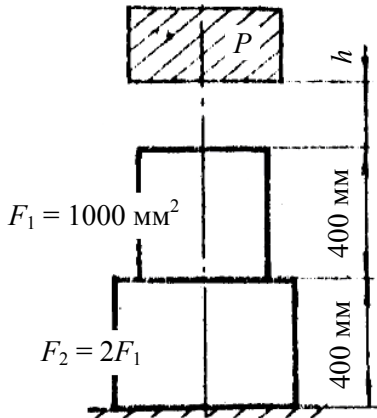


Рис. 2.23

*Решение.*

1. Максимальное статическое сжимающее напряжение возникает в сечениях верхней части стержня от статического нагружения силой  $P$ :

$$\sigma_{\text{ст}}^{\text{max}} = \frac{F}{A_1} = \frac{4000}{1000} = 4 \text{ МПа.}$$

2. Статическое перемещение в месте удара равно укорочению стержня при статическом приложении груза  $P$ :

$$\Delta_{ст} = \frac{Pl}{EA_1} + \frac{Pl}{EA_2} = \frac{4000 \cdot 400}{2 \cdot 10^5 \cdot 1000} + \frac{4000 \cdot 400}{2 \cdot 10^5 \cdot 2000} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

3. Определяем величину динамического коэффициента  $K_d$ :

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 25}{12 \cdot 10^{-3}}} \approx 65,7.$$

Максимальное динамическое напряжение возникает в поперечном сечении верхнего участка бруса:

$$\sigma_d^{\max} = \sigma_{ст} \cdot K_d = \frac{F}{A} \cdot K_d = 4 \cdot 65,7 = 262,8 \text{ МПа.}$$

Полученный результат имеет смысл лишь при том условии, если предел пропорциональности стержня выше найденного динамического напряжения  $\sigma_{пл}$ , равного 300 МПа.

*Задача 2.3.* Определить максимально допустимую высоту падения груза  $Q$ , если допустимый прогиб

$$\left[ \frac{y}{l} \right] = \frac{1}{300}.$$

Определить нормальное напряжение. Массой балки пренебречь (рис. 2.24).

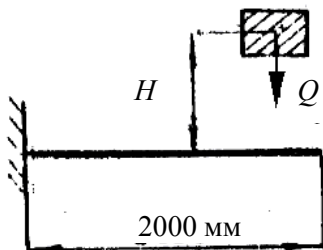


Рис. 2.24

Решение.

1. Максимально допустимый прогиб:

$$y_{\max} = \frac{l}{300} = \frac{2000}{300} = 6,7 \text{ мм.}$$

2. Статический прогиб:

$$y_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{3EI} = \frac{3000 \cdot 2000^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 9840 \cdot 10^4} = 0,406 \text{ мм.}$$

3. Динамический прогиб, так как

$$y_{\text{д}} = y_{\text{ст}} \cdot K_{\text{д}},$$

то

$$K_{\text{д}} = \frac{y_{\max}}{y_{\text{ст}}} = \frac{6,7}{0,406} = 16,502;$$

$$K_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{0,427}} = 16,502.$$

Отсюда  $H = 48,58$  мм.

4. Максимальное напряжение:

$$\sigma_{\text{д}} = \sigma_{\text{ст}} \cdot K_{\text{д}} = \frac{M_{\max}}{W_x} \cdot K_{\text{д}} = \frac{3000 \cdot 2000}{537 \cdot 10^3} \cdot 16,502 = 165,85 \text{ МПа.}$$

*Задача 2.4.* На середину балки, длиной  $l = 2,4$  м, свободно лежащей на двух опорах, с высоты  $h = 120$  мм падает груз  $F = 10$  кН. Сечение балки – два швеллера № 18а ( $I_x = 1190 \text{ см}^4$ ;  $W_x = 232 \text{ см}^3$ ).

Найти наибольшее нормальное напряжение в балке в момент удара и динамический прогиб (рис. 2.25).

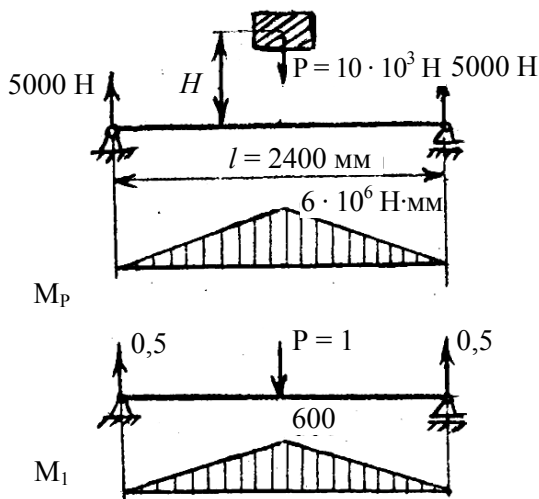


Рис. 2.25

*Решение.*

1. Определяем наибольшее динамическое напряжение, возникающее в момент удара:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_d.$$

Динамический коэффициент:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}}}.$$

Для определения  $\Delta_{ст}$  воспользуемся способом Верещагина:

$$\Delta_{ст} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 \right) \cdot 2 = \frac{2,88}{EI} = 0,607 \text{ мм};$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 120}{0,607}} = 2.$$

2. Динамический прогиб:

$$\Delta_d = \Delta_{ст} \cdot K_d = 0,607 \cdot 2 = 1,214 \text{ мм.}$$

3. Наибольшее нормальное напряжение при статическом нагружении:

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{6 \cdot 10^6}{2 \cdot 132 \cdot 10^3} = 25,3 \text{ МПа.}$$

4. Наибольшее нормальное напряжение в момент удара:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_d = 25,3 \cdot 2 = 50,6 \text{ МПа.}$$

*Задача 2.5.* Две двутавровые балки, у которых один из концов заделан, свободно положены друг на друга.

Определить напряжения, возникающие в балках, при падении на место их соприкосновения груза  $Q = 0,6 \text{ кН}$  с высоты  $h = 0,1 \text{ м}$  (рис. 2.26).

По ГОСТ 8239-72 Двутавр № 24а:  $I_x = 3800 \text{ см}^4$ ;  $W_x = 317 \text{ см}^3$ ;  
Двутавр № 18а:  $I_x = 1430 \text{ см}^4$ ;  $W_x = 159 \text{ см}^3$ .

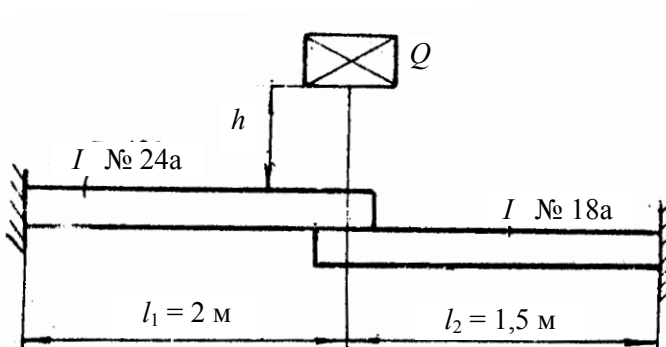


Рис. 2.26

*Решение.*

Конструкция представляет собой систему с параллельным соединением элементов (рис. 2.27).

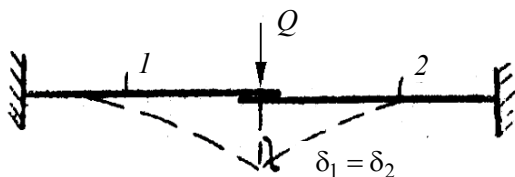


Рис. 2.27

При параллельном соединении элементарные системы

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta.$$

Из условия равновесия  $Q = Q_1 + Q_2$ , обозначив

$$\Delta = \frac{Q}{c},$$

где  $c$  – коэффициент жесткости, и учитывая, что

$$Q = \Delta \cdot c;$$

$$Q_1 = \Delta_1 \cdot c_1;$$

$$Q_2 = \Delta_2 \cdot c_2,$$

получим

$$\Delta \cdot c = \Delta_1 \cdot c_1 + \Delta_2 \cdot c_2,$$

где  $c$  – коэффициент жесткости системы;

$c_1$  – коэффициент жесткости элемента системы 1;

$c_2$  – коэффициент жесткости элемента системы 2.

Коэффициенты жесткости элементов системы:

$$c_1 = \frac{3EI_{x_1}}{l_1^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}}{2^3} = 28,5 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$c_2 = \frac{3EI_{x_2}}{l_2^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1430 \cdot 10^{-8}}{1,5^3} = 25,42 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Коэффициент жесткости системы:

$$c = c_1 + c_2 = (28,5 + 25,42) \cdot 10^5 = 53,92 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Статический прогиб:

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Q}{c} = \frac{600}{53,92 \cdot 10^5} = 11,13 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}} = \frac{2 \cdot 0,1}{11,13 \cdot 10^5} = 1797,$$

следовательно, используя приближенное выражение динамического коэффициента, получим

$$K_{\text{д}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{1797} = 42,39.$$

Прогиб системы в результате динамического приложения нагрузки:

$$\Delta_{\text{д}} = K_{\text{д}} \cdot \Delta_{\text{ст}} = 42,39 \cdot 11,13 \cdot 10^{-5} = 471,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Статическая сила эквивалентна ударному приложению нагрузки к системе:

$$Q = c \cdot \Delta_{\text{д}} = 53,92 \cdot 10^5 \cdot 471,8 \cdot 10^{-5} = 25439 \text{ Н}.$$



Сила распределяется между балками пропорционально коэффициентам жесткости.

Динамическая нагрузка на элементы системы:

$$Q_{1д} = c_1 \cdot \Delta_{д} = 28,5 \cdot 10^5 \cdot 471,8 \cdot 10^{-5} = 13446 \text{ Н};$$

$$Q_{2д} = c_2 \cdot \Delta_{д} = 25,42 \cdot 10^5 \cdot 471,8 \cdot 10^{-5} = 11993 \text{ Н}.$$

Динамические напряжения в балках:

$$\sigma_{д1} = \frac{Q_{1д} \cdot l_1}{W_{x1}} = \frac{13446 \cdot 2}{317 \cdot 10^{-6}} = 84,83 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 84,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{д2} = \frac{Q_{2д} \cdot l_2}{W_{x2}} = \frac{11993 \cdot 1,5}{159 \cdot 10^{-6}} = 113,1 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 113,1 \text{ МПа}.$$

*Задача 2.6.* Диск, диаметром  $D = 0,2$  м и весом  $Q = 500$  Н, насаженный на вал  $AB$ , длиной  $l = 1$  м, диаметром  $d = 0,06$  м, вращается с постоянной угловой скоростью, соответствующей  $n = 120$  об/мин.

Определить величину наибольших касательных напряжений в вале в тот момент, когда конец вала  $A$  внезапно останавливается (скручивающий удар).

Массой вала пренебречь. Модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа (рис. 2.28).

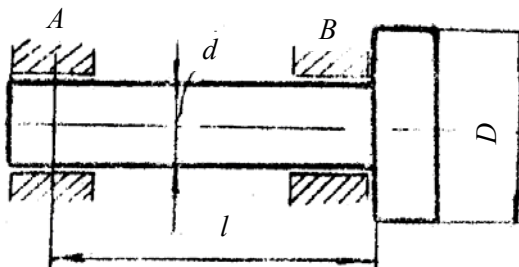


Рис. 2.28

*Решение.*

Статически действующий крутящий момент  $M_{к(д)}$ , эквивалентный по результатам своего действия скручивающему удару, равен:

$$M_{к(д)} = \omega \sqrt{\frac{I_m \cdot G \cdot I_p}{l}} = \frac{\pi n \cdot 16}{30 \cdot \pi \cdot d^3} \sqrt{\frac{Q \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot G \cdot \pi d^4}{2g \cdot l \cdot 32}} = \frac{3,14 \cdot 120 \cdot 16}{30 \cdot 3,14 \cdot 0,06^3} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{500 \cdot 0,2^2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,06^4}{2 \cdot 9,81 \cdot 1 \cdot 32}} = 47,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47,7 \text{ МПа},$$

где  $I_m$  – момент инерции тела.

*Задача 2.7.* Шкив весом  $Q = 600$  Н насажен на стальной вал, вращающийся со скоростью  $n = 300$  об/мин.

Вычислить величину максимальных касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении вала в момент внезапного торможения. Массой вала пренебречь (рис. 2.29).

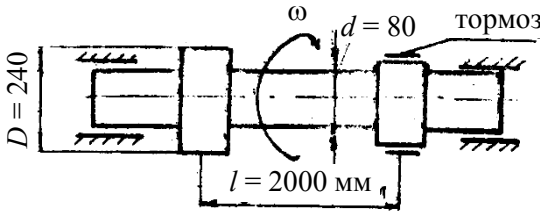


Рис. 2.29

*Решение.*

Считая, что кинетическая энергия шкива равна потенциальной энергии деформации, имеем

$$T = U_d;$$

$$\frac{I_m \cdot \omega^2}{2} = \frac{M_{к(д)}^2 \cdot l}{2G \cdot I_p}.$$

Момент инерции массы шкива:

$$I_m = \frac{Q \cdot D^2}{8g} = \frac{600 \cdot 240^2}{8 \cdot 9810} = 440 \text{ Н} \cdot \text{мм} \cdot \text{с}^2.$$

Угловая скорость:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 10\pi \text{ с}^{-1}.$$

Динамический крутящий момент:

$$M_{\text{к(д)}} = \omega \cdot \sqrt{\frac{I_T \cdot G \cdot I_p}{l}}.$$

Максимальные динамические касательные напряжения в поперечном сечении вала:

$$\tau_d = \frac{M_{\text{к(д)}}}{W_\rho} = \frac{\omega}{\frac{\pi d^3}{16}} \sqrt{\frac{I_T \cdot G \cdot \pi d^4}{l \cdot 32}} = \frac{10\pi}{8\pi} \sqrt{\frac{440 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 80^4}{2000}} = 83,3 \text{ МПа}.$$

*Задача 2.8.* Определить наибольшее нормальное напряжение, наибольший прогиб в раме в момент удара, если  $F = 2 \text{ кН}$ ,  $h = 25 \text{ мм}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ . Поперечное сечение рамы – стальной двутавр № 20 ( $W_x = 184 \text{ см}^3$ ;  $I_x = 1840 \text{ см}^4$ ). Массой рамы пренебречь. Длина каждого участка –  $l$  (рис. 2.30).

*Решение.*

При ударе:

$$\sigma_d = \sigma_{\text{ст}} \cdot K_d; \quad \Delta_d = \Delta_{\text{ст}} \cdot K_d,$$

где  $\sigma_{\text{ст}}$  и  $\Delta_{\text{ст}}$  – напряжения и деформации при статическом действии груза  $F$ .

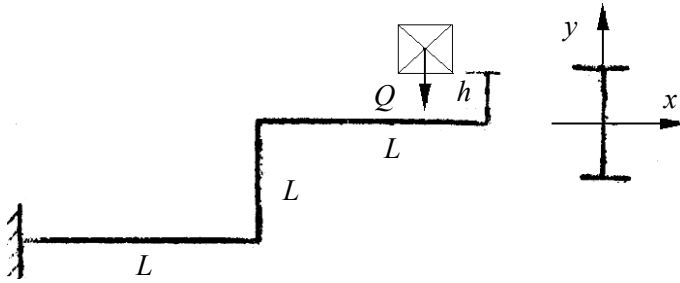


Рис. 2.30

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}$$

где  $K_d$  – динамический коэффициент.

Определяем по способу Верещагина величину статической деформации (рис. 2.31):

$$\begin{aligned} \Delta_{ст} &= \sum \int_l \frac{\overline{M}_1 \cdot M \cdot dz}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} F \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + F \cdot l \cdot l \cdot l + F \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} F \cdot l \cdot l \cdot \left( l + \frac{2}{3} l \right) \right) = \frac{11}{3} \cdot \frac{Fl^3}{EI_x} = \frac{11}{3} \cdot \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 0,002 \text{ м} = 2 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Максимальные статические напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{2Fl}{W_x} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 1}{184 \cdot 10^{-6}} = 21,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 21,7 \text{ МПа}.$$

Динамический коэффициент:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 25}{2}} = 6,1.$$

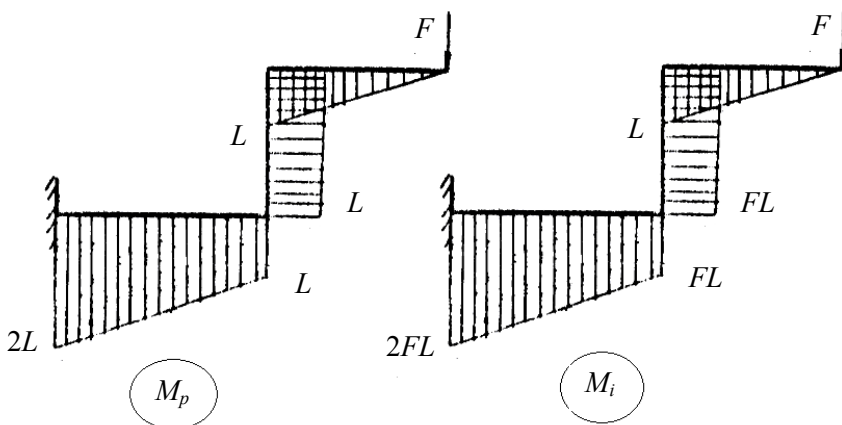


Рис. 2.31

Динамические напряжения:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_d = 21,7 \cdot 6,1 = 132 \text{ МПа.}$$

Динамические перемещения:

$$\Delta_d = \Delta_{ст} \cdot K_d = 2 \cdot 6,1 = 12,2 \text{ мм.}$$

## 2.5. Вопросы и задачи для самостоятельной работы по теме «Удар»

1. Какие допущения положены в основу теории удара?
2. Как учитывается масса упругой системы при ударе?
3. Какой закон применяется при исследовании явления удара?
4. Какие разновидности удара Вы знаете?
5. От каких величин зависят динамические напряжения при ударе?
6. Зависит ли максимальное динамическое напряжение при поперечном ударе от расположения поперечного сечения балки? Ответ обоснуйте.
7. От каких величин зависит динамический коэффициент при ударе?

8. Во сколько раз возрастает динамическая деформация и динамическое напряжение, если нагрузка прикладывается мгновенно?

9. Запишите выражение динамического коэффициента  $K_d$  в общем виде и объясните 3 частных случая его упрощения.

10. В каком стержне возникнут большие динамические напряжения при падении груза (рис. 2.32)? Почему?

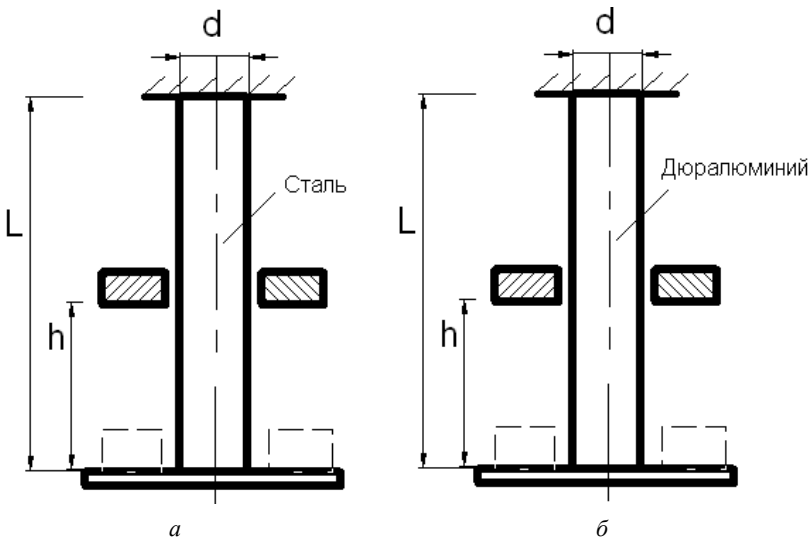


Рис. 2.32

11. Высоту падения груза на балку увеличили в два раза. Во сколько раз соответственно увеличились динамические напряжения в балке? Считать, что высота падения груза во всех случаях значительно больше величины статического прогиба, предел упругости не превзойден.

12. Как определяется ударная вязкость?

13. Для чего делают надрезы на образцах, которые испытываются на ударную вязкость?

## ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Тема: «Учет сил инерции»

1. *Принцип Даламбера*, согласно которому всякое движущееся тело может рассматриваться как находящееся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силы инерции. Следовательно, принцип Даламбера можно использовать в случае, когда силы инерции определяются по законам механики твердого тела. *Закон сохранения энергии* используется в том случае, когда силы инерции зависят от упругих свойств и их нельзя определить по законам кинематики твердого тела.

2. *Статическая нагрузка* – это любое силовое воздействие, прикладываемое к конструкции без ускорения. *Динамическая нагрузка* – это любое силовое воздействие, прикладываемое к конструкции с ускорением.

3. *Динамическим коэффициентом* называется величина, которая показывает, во сколько раз динамическая деформация или напряжение больше статической деформации или напряжения.

$$4. K_d = \left( 1 + \frac{a}{g} \right).$$

5. По линейному закону.

6. Пружину между канатом и поднимаемым грузом ставят для уменьшения динамического напряжения в канате при отрыве груза от поверхности, резких остановок и т. д. Чем меньше жесткость пружины, тем меньше динамические напряжения в канате.

7. Внезапная остановка спускающегося на канате груза вызывает резкое возрастание динамических напряжений, что может вызвать обрыв каната.

$$8. p_{и} = \frac{A \cdot \gamma}{g} \cdot \omega^2 r.$$

## Тема: «Удар»

1. Допущения теории удара:

а) напряжения в стержне при ударе не превышают предела пропорциональности;

б) удар является неупругим;

в) деформация распространяется по стержню мгновенно.

2. Масса упругой системы при ударе учитывается коэффициентом приведения массы, величина которого зависит от вида и типа упругой системы. Коэффициент приведения массы показывает, какую часть массы упругой системы нужно прибавить к массе ударяемого груза.

3. При изучении удара следует пользоваться законом сохранения энергии.

4. Удар бывает продольным, поперечным и скручивающим.

5. Динамические напряжения при ударе зависят от объема стержня  $V$  и модуля продольной упругости  $E$ . При этом, чем больше  $V$ , тем больше  $E$ .

6. Не зависит. Это объясняется тем, что динамическое напряжение определяется количеством поглощаемой энергии удара.

7. Динамический коэффициент при ударе зависит от высоты падения груза и статической деформации сечения в том месте, где приложена нагрузка падающего груза.

8.  $K_d = 2$ .

$$9. K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}; \quad K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U_{ст}}}.$$

Случаи упрощения динамического коэффициента  $K_d$ :

а) мгновенное приложение нагрузки:  $H = 0$ ;  $K_d = 2$ ;

$$\text{б) если } \frac{2h}{\Delta_{ст}} \geq 10, \text{ то } K_d = 1 + \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}}; \quad K_d = 1 + \sqrt{\frac{T}{U_{ст}}};$$

$$\text{в) если } \frac{2h}{\Delta_{ст}} \geq 100, \text{ то } K_d = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}}; \quad K_d = \sqrt{\frac{T}{U_{ст}}}.$$

10. Большие напряжения возникают в случае *a*, так как напряжения при статическом действии нагрузок одинаковы в обоих стержнях. Удлинение в случае *a* в два раза меньше, чем в *б*. Следовательно



но, динамический коэффициент и динамические напряжения в случае *a* будут больше, чем в случае *b*.

11. Напряжения увеличатся в  $\sqrt{2}$  раза.

12.  $a = \frac{P}{A}$ .

13. При наличии надреза на образце значительно ослабляется сечение посередине пролета. Так как надрез является концентратором напряжений, то резко повышается динамическое напряжение, а, следовательно, испытания условно приближаются к реальным условиям работы деталей, имеющих отверстия, надрезы и аналогичные ослабления при динамическом действии нагрузок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскребко. – Минск : Высшая школа, 2007. – 797 с.
2. Сопротивление материалов : учебник для вузов / под общ. ред. Г. С. Писаренко. – 4-е изд., перераб. и доп. – Киев : Вища школа Головное изд-во, 1979. – 696 с.
3. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1967. – 552 с.
4. Руденок, Е. Н. Методическое пособие. Сопротивление материалов. Задачи динамики / Е. Н. Руденок. – Минск : БПИ, 1986.

Учебное издание

**ВАСИЛЕВИЧ** Юрий Владимирович  
**НЕУМЕРЖИЦКАЯ** Елена Юрьевна  
**ХВАСЬКО** Виктория Михайловна и др.

**РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ  
ЗАДАЧ С УЧЕТОМ СИЛ ИНЕРЦИИ  
И УДАРНОЙ НАГРУЗКИ**

Пособие  
для студентов специальностей  
1-36 01 03 «Технологическое оборудование  
машиностроительного производства»,  
1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства»,  
1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника»

Редактор *Е. И. Бенищевич*  
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 26.10.2021. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 4,36. Уч.-изд. л. 3,41. Тираж 100. Заказ 857.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.