МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

П.Г. Кужир, Н.П. Юркевич, Г.К. Савчук

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

В 2 частях

Ч а с т ь 1

МЕХАНИКА. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

3-е издание, исправленное и дополненное

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений по техническим специальностям

М и н с к
Б Н Т У
2 0 1 4

УДК 53(076.1)(075.3)
ББК 22.3я729
К89

Р е ц е н з е н т ы :
профессор кафедры общей физики БГУ *И.Р. Гулаков*;
заведующий кафедрой физики БГТУ, профессор *И.И. Наркевич*

Кужир, П.Г.

К89 Сборник задач по общему курсу физики : учебное пособие для высших учебных заведений : в 2 ч. / П.Г. Кужир, Н.П. Юркевич, Г.К. Савчук. – 3-е изд., испр. и доп. – Минск : БНТУ, 2014. – Ч. 1: Механика. Статистическая физика и термодинамика. – 220 с.

ISBN 978-985-550-472-7 (Ч. 1).

Предназначено для проведения практических занятий по общему курсу физики со студентами дневной формы обучения высших учебных заведений технического профиля.

Представлены краткие сведения из теории, примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения, которые условно разделены на уровни, соответствующие десятибалльной системе оценки знаний. Все задачи снабжены ответами.

Издается с 2009 г. Второе издание выпущено в БНТУ в 2012 г.

УДК 53(076.1)(075.3)
ББК 22.3я729

ISBN 978-985-550-472-7 (Ч. 1)

ISBN 978-985-550-473-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью данного учебного пособия является оказание помощи преподавателям и студентам в проведении практических занятий по курсу общей физики, закреплении полученных теоретических знаний и приобретении навыков решения задач студентами инженерно-технического профиля.

В пособии представлены более 500 задач по разделам «Механика», «Статистическая физика и термодинамика» общего курса физики. Для удобства пользования материалом пособия приведены краткие сведения из теории: определения основных понятий и физических величин, формулы с описанием всех входящих в них величин, справочные данные, а также примеры решения задач по каждой теме. Задачи для самостоятельного решения имеют ответы.

Особенностью пособия является разделение задач по уровням сложности в соответствии с десятибалльной системой оценки знаний, принятой в настоящее время в высшей школе. Такое представление следует считать условным, поскольку оно было сделано на основе профессионально-субъективного подхода с учетом опыта преподавания курса общей физики для студентов инженерно-технических специальностей БНТУ. Разумеется, что право оценки уровня сложности решения определенной задачи остается за преподавателями, которые будут использовать данное пособие.

При проведении практических занятий обратите внимание на следующие методологические аспекты решения задач.

1. Изучите соответствующий теоретический материал, ознакомьтесь с примерами решения задач по заданной теме.
2. Прочитайте условие задачи. Особое внимание обратите на поставленный в задаче вопрос, так как решение следует начинать именно с него.
3. Проанализируйте данные, представленные в задаче. Если необходимо, недостающие значения констант, физических свойств тел или веществ найдите в таблицах приложения.
4. Определите физические состояния или процессы, рассматриваемые в задаче, а также законы и закономерности, которыми они описываются.
5. Сделайте краткую запись условия задачи, в которой должны быть отражены все исходные и искомые данные.
6. Сделайте схематический рисунок. Смысл рисунка заключается в графическом представлении информации, содержащейся в условии задачи в текстовом виде. Если рисунок отражает текстовую информацию достаточно полно, то запись математической модели физического процесса значительно облегчается, а следовательно, и само решение задачи. Запишите уравнения, описывающие рассматриваемый физический процесс, которые в совокупности с другими вспомогательными соотношениями и будут представлять математическую модель.
7. Векторные уравнения проецируйте на оси выбранной системы координат.
8. Задачу решайте, как правило, в общем виде, т.е. в конечной формуле искомая величина должна быть выражена через известные исходные данные. Решение задачи в общем виде позволяет проследить логику решения, оценить правильно оно или нет, а также снизить вероятность ошибки при выполнении числового расчета. Однако если решение становится достаточно громоздким, возможны промежуточные числовые расчеты.
9. Проверьте полученную конечную формулу с точки зрения соответствия размерностей. Если размерности величин, стоящих в формуле слева и справа от знака равенства, не сходятся, решение является неверным.

10. Используйте числовые значения известных величин в основных единицах СИ и подставьте в формулу. Выполните необходимые математические действия и получите результат.

11. При вычислениях применяйте правила действия с приближенными числами. Точность вычислений должна соответствовать точности исходных данных задачи.

12. Оцените правдоподобность полученного числового значения.

Авторы выражают благодарность рецензентам: профессору кафедры общей физики БГУ, доктору физико-математических наук **И.Р. Гулакову** и заведующему кафедрой физики БГТУ, профессору, доктору физико-математических наук **И.И. Наркевичу**, полезные замечания и советы которых позволили значительно повысить качество данного учебного пособия.

Авторы с благодарностью примут конструктивные замечания и пожелания, касающиеся содержания учебного пособия.

I. МЕХАНИКА

1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Краткие теоретические сведения

Механическое движение – это изменение положения тел или их частей относительно друг друга в пространстве с течением времени.

Материальная точка – это тело, размерами и формой которого при заданных условиях можно пренебречь, а всю массу считать сконцентрированной в одной точке.

Абсолютно твердое тело – это тело, деформациями которого можно пренебречь.

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся абсолютно твердым телом, остается параллельной самой себе.

Траектория – это линия, которую описывает материальная точка при своем движении.

Положение материальной точки в пространстве определяется **радиус-вектором** $\vec{r}$ – вектором, проведенным из начала координат в точку пространства, в которой находится данная материальная точка.

Перемещение ($\Delta\vec{r}$) тела – это вектор, проведенный из начального положения тела в его конечное положение,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 .$$

Мгновенная скорость тела – производная от радиус-вектора движущегося тела по времени t:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} .$$

Мгновенная скорость характеризует направление и быстроту перемещения тела по траектории.

Ускорение тела – производная от скорости по времени или вторая производная от радиус-вектора движущегося тела по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

При равномерном прямолинейном движении ($\vec{v}$ = const) выполняется соотношение

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t.$$

Уравнения движения тела с постоянным ускорением $\vec{a}$ = const:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \pm \vec{a}t,$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t \pm \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

где $\vec{v}_0$ – начальная скорость.

В криволинейном движении материальной точки **полное ускорение** $\vec{a}$ – это векторная сумма **тангенциального** $\vec{a}_\tau$ и **нормального** $\vec{a}_n$ ускорений. Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

при этом

$$a_\tau = \frac{dv}{dt};$$

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

где R – **радиус кривизны** в данной точке траектории.

Среднее значение модуля скорости тела в промежутке времени от t до $(t + \Delta t)$

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где ΔS – путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt.

Примеры решения задач

Задача 1. Уравнение движения материальной точки имеет вид $x = A + Bt + Ct^4$, где A = 1,0 м, B = 2,0 м/с, C = –0,5 м/с^4. Найти координату, проекции скорости и ускорения точки в момент времени t = 3 с.

Дано:
$x = A + Bt + Ct^4$ м;
A = 1,0 м;
B = 2,0 м/с;
C = –0,5 м/с^4;
t = 3 с

Найти: x; a_x; v_x

Решение. Координату x точки находим, подставляя числовые значения в уравнение движения:

$$x = 1 + 2 \cdot 3 - 0{,}5 \cdot 81 = -33{,}5 \text{ м}.$$

Проекция мгновенной скорости точки

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 4Ct^3.$$

Проекция мгновенного ускорения точки

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 12Ct^2.$$

В момент времени t = 3 с:

$$v_x = 2{,}0 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 27 = -52{,}0 \text{ м/с};$$

$$a_x = -12 \cdot 0{,}5 \cdot 9 = -54{,}0 \text{ м/с}^2 .$$

Следовательно, точка движется в отрицательном направлении оси *OX* ускоренно.

Ответ. $\boldsymbol{x} = -33{,}5$ **м**; $v_x = -52{,}0$ **м/с**; $a_x = -54{,}0$ **м/с²**.

Задача 2. С башни в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью v_0 = 10,0 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить для момента времени t = 2 с после начала движения: 1) скорость тела; 2) радиус кривизны его траектории.

Дано:
v_0 = 10,0 м/с;
t = 2 с;
g = 10 м/с²

Найти: v; R

Решение. Разложим векторы скорости и ускорения на составляющие по осям *OX* и *OY* (рис. 1.1):

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_y ; \ \vec{g} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau .$$

Так как проекция скорости $v_y = gt$, то модуль скорости

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} ;$$

$$v = \sqrt{10{,}0^2 + 9{,}8^2 \cdot 2^2} = 22{,}0 \text{ м/с}.$$

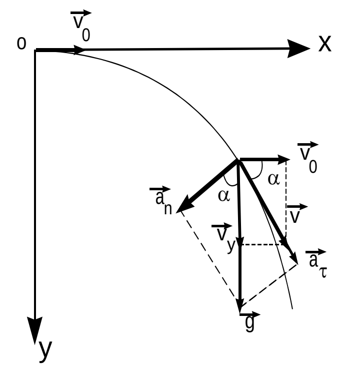

Рис. 1.1

Из рис. 1.1 видно, что проекция нормального ускорения

$$a_n = g\cos\alpha .$$

Из треугольника разложения вектора скорости $\vec{v}$ на составляющие имеем

$$\cos\alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} .$$

Тогда

$$a_n = g\cos\alpha = \frac{g\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}}.$$

С другой стороны,

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

Тогда радиус кривизны траектории

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{\left(\upsilon_0^2 + g^2t^2\right)^{3/2}}{g\upsilon_0};$$

$$R = \frac{\left(10{,}0^2 + 9{,}8^2 \cdot 2^2\right)^{3/2}}{10{,}0 \cdot 10{,}0} = 109{,}0 \text{ м}.$$

Ответ. $\upsilon = 22{,}0$ **м/с;** $R = 109{,}0$ **м.**

Задача 3. Ускорение материальной точки изменяется по закону $\vec{a} = 3{,}0t^2\vec{i} - 3{,}0\vec{j}$ (м/с^2). Найти, на каком расстоянии от начала координат точка будет находиться в момент времени $t = 1$ с, если при $t = 0$ $\vec{\upsilon}_0 = 0$; $\vec{r}_0 = 0$.

Дано:
$\vec{a} = 3{,}0t^2\vec{i} - 3{,}0\vec{j}$ м/с^2;
$t = 1$ с;
$\vec{\upsilon}_0 = 0$; $\vec{r}_0 = 0$ при $t = 0$

Найти: r

Решение. Разложим вектор скорости $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j}.$$

Так как компоненты вектора скорости $\vec{\upsilon}$ связаны с компонентами вектора ускорения соотношениями

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}; \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} \quad ,$$

то, учитывая, что по условию задачи $\vec{a} = 3{,}0t^2\vec{i} - 3{,}0\vec{j}$, можем записать

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = 3{,}0t^2 \text{ м/с}^2; \qquad \frac{d\upsilon_y}{dt} = -3{,}0 \text{ м/с}^2 .$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\upsilon_x = t^3 + C_1; \; \upsilon_y = -3{,}0t + C_2 .$$

Найдем постоянные интегрирования, исходя из начальных условий $\upsilon_{0x} = 0$, $\upsilon_{0y} = 0$ при $t = 0$,

$$C_1 = 0; \; C_2 = 0.$$

Так как компоненты вектора скорости $\vec{\upsilon}$ связаны с компонентами радиус-вектора $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ соотношениями

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}; \; \upsilon_y = \frac{dy}{dt} \quad ,$$

то получаем два дифференциальных уравнения

$$\frac{dx}{dt} = t^3; \; \frac{dy}{dt} = -3{,}0t . \tag{1.1}$$

Тогда координаты $x(t)$, $y(t)$ получаются интегрированием выражений (1.1)

$$x(t) = \frac{t^4}{4} + C_3;$$

$$y(t) = -\frac{3{,}0t^2}{2} + C_4 .$$

Учитывая начальные условия: $x = 0$, $y = 0$ при $t = 0$, находим $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

Уравнение движения материальной точки будет иметь вид

$$\vec{r}(t) = \frac{t^4}{4}\vec{i} - \frac{3{,}0t^2}{2}\vec{j} .$$

Модуль радиус-вектора $\vec{r}(t)$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{\left(\frac{t^4}{4}\right)^2 + \left(\frac{3{,}0t^2}{2}\right)^2} .$$

Подставляя время $t = 1$ с, получим расстояние r от начала координат до материальной точки:

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{\left(\frac{1^4}{4}\right)^2 + \left(\frac{3{,}0 \cdot 1^2}{2}\right)^2} = 1{,}5 \text{ м.}$$

Ответ. r **= 1,5 м.**

З а д а ч и

4 балла

1.1 Точка движется в плоскости XOY. Проекция скорости на ось OX составляет $v_x = 3{,}0$ м/с, на ось OY – $v_y = 4{,}0$ м/с. Чему равен модуль скорости v точки?
Ответ. $v = 5{,}0$ **м/с**.

1.2 Радиус-вектор точки изменяется по закону $\vec{r} = 4\vec{i} + 5t\vec{j} - 8t^2\vec{k}$ (м). Как изменяются с течением времени координаты точки x, y, z?

Ответ. $x = 4$ **(м) и с течением времени не изменяется;** $y = 5t$ **(м) – линейная зависимость координаты** y **от** t; $z = -8t^2$ **(м) – параболическая зависимость координаты** $z(t)$.

1.3 Изменение координаты x материальной точки от времени определяется уравнением $x = 6t^5$ (м). С какой по модулю скоростью движется материальная точка вдоль оси OX?

Ответ. $\upsilon_x = 30t^4$ **м/с.**

1.4 Модуль скорости тела, движущегося вдоль оси OX, изменяется по закону $\upsilon = 3 + 4t$ (м/с). Чему равна средняя скорость тела в промежутке времени от $t_1 = 5$ с до $t_2 = 10$ с?

Ответ. $\langle\upsilon\rangle = 33$ м/с.

1.5 Вектор скорости материальной точки изменяется по закону $\vec{\upsilon} = 3\vec{i} + 4t^2\vec{j}$ (м/с). Чему равны проекции скорости на оси OX и OY?

Ответ. $\upsilon_x = 3$ **м/с;** $\upsilon_y = 4t^2$ **м/с.**

1.6 Модуль скорости точки изменяется с течением времени по закону $\upsilon = 3t^2$ м/с. Как изменяется модуль ускорения?

Ответ. $a = 6t$ **м/с^2 – линейная зависимость.**

1.7 Траектория движения тела имеет радиус кривизны 10,0 м. Модуль скорости движения тела 5,0 м/с. Чему равно нормальное ускорение тела?

Ответ. $a_n = 2,5$ **м/с^2**.

1.8 Тело проходит за 10,0 с путь длиной 2,0 м. Начальная скорость тела равна нулю. Считая движение равноускоренным, найти модуль ускорения тела.

Ответ. $a = 4,0 \cdot 10^{-2}$ **м/с^2**.

1.9 В данной точке траектории нормальное ускорение тела $a_n = 3$ м/с^2, тангенциальное ускорение $a_\tau = 4$ м/с^2. Чему равно полное ускорение тела?
Ответ. $\boldsymbol{a} = 5$ **м/с^2**.

1.10 Полное ускорение тела $a = 10{,}0$ м/с^2, нормальное ускорение $a_n = 4{,}0$ м/с^2. Чему равно тангенциальное ускорение тела?
Ответ. $a_\tau = 9{,}2$ **м/с^2**.

5–6 баллов

1.11 Координаты двух точек в зависимости от времени имеют вид $x_1 = 23{,}0 + 2{,}6t + 1{,}5t^2$ (м); $x_2 = 16{,}0 + 8{,}0t - 0{,}75t^2$ (м). Определить момент времени t_1, в который скорости этих точек будут одинаковыми.
Ответ. $t_1 = 1{,}2$ **с**.

1.12 Модуль скорости точки изменяется по закону $v = 5 + 4t^2$ (м/с). Чему равно тангенциальное ускорение точки в момент времени $t_1 = 2$ с?
Ответ. $a_\tau = 16$ **м/с^2**.

1.13 Тело брошено под углом к горизонту. Максимальная высота подъема $h = \dfrac{1}{4}S$, где S – дальность полета. Определить угол бросания к горизонту. Сопротивлением воздуха пренебречь.
Ответ. $\alpha = 45°$.

1.14 Тело падает с высоты $h = 19{,}60$ м с начальной скоростью $v_0 = 0{,}0$ м/с. Какой путь пройдет тело за первую и последнюю 0,1 с своего движения?
Ответ. $h_1 = 0{,}05$ **м;** $h_2 = 1{,}90$ **м.**

1.15 Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии $l = 5{,}0$ м от места бросания. Высота места удара мяча о стенку на $\Delta h = 1{,}0$ м меньше высоты h, с которой брошен мяч. С какой начальной скоростью v_{0x} брошен мяч? Под каким углом φ мяч подлетает к поверхности стенки?

Ответ. v_{0x} = 11,1 **м/с;** $\mathrm{tg}\boldsymbol{\varphi} = 2{,}5$; $\boldsymbol{\varphi} \approx 68^\circ$.

1.16 Камень, брошенный со скоростью v_0 = 10,0 м/с под углом α = 45° к горизонту, упал на землю на расстоянии l от места бросания. С какой высоты h надо бросить камень в горизонтальном направлении, чтобы при той же начальной скорости v_0 он упал на то же место?

Ответ. h = 5,1 **м.**

1.17 Два автомобиля, выехав одновременно из одного пункта, движутся прямолинейно в одном направлении. Зависимости пройденных автомобилями путей задаются уравнениями $S_1 = At + Bt^2$ (м); $S_2 = Ct + Dt^2 + Ft^3$ (м), соответственно. Определить скорость первого автомобиля относительно второго автомобиля.

Ответ. $u = A - C + 2t(B - D) - 3Ft^2$.

1.18 Уравнение движения материальной точки вдоль оси OX имеет вид $x = At - Bt^2 + Ct^3$(м), где A = 2 м/с, B = 3 м/с^2, C = 4 м/с^3. Найти: 1) зависимость модуля скорости v и модуля ускорения a от времени t; 2) путь, модули скорости и ускорения тела через 2 с после начала движения.

Ответ. **1)** $v = 2 - 6t + 12t^2$; $a = -6 + 24t$; 2) S = 24 **м;** v = 38 **м/с;** a = **42 м/с**^{2}.

1.19 Уравнения движения двух материальных точек имеют вид $x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$; $x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$, где B_1 = = 4,0 м/с^2; C_1 = –3,0 м/с^3; B_2 = –2,0 м/с^2; C_2 = 1,0 м/с^3. Определить момент времени t_1, для которого ускорения этих точек будут равны.

Ответ. t_1 = 0,5 **с.**

1.20 Тело, движущееся со скоростью v = 36 км/ч, останавливается при торможении в течение 2 с. С каким средним ускорением двигалось тело? Какое расстояние оно прошло до остановки?

Ответ. $\boldsymbol{a}$ = 5 **м/с**^{2}; S = 10 **м.**

1.21 При равномерном торможении проекция скорости автомобиля v_x за 20 с уменьшилась с 72 до 54 км/ч. Получить уравнение изменения проекции скорости v_x от времени t и построить ее график.

Ответ. $v_x(t) = 20 - 0{,}25t$ **(м/с) – линейная зависимость**.

7–8 баллов

1.22 Тело 1 брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_{01} = 20{,}0$ м/с. Тело 2 падает с высоты $H = 5{,}0$ м с начальной скоростью $v_{02} = 0$ м/с. Найти расстояние h между телами через промежуток времени $\Delta t = 0{,}1$ с. Определить время $t_{вс}$, через которое тела встретятся.

Ответ. $h = 3{,}0$ **м;** $t_{вс} = 0{,}25$ **с.**

1.23 Два тела движутся навстречу друг другу в вертикальном направлении. Тело 1 свободно падает с высоты $H = 16{,}0$ м, тело 2 начинает двигаться вверх с начальной скоростью v_{02}. Через время $t = 0{,}5$ с расстояние между телами $h = 10{,}0$ м. Найти модуль начальной скорости v_{02} второго тела.

Ответ. $v_{02} = 12$ **м/с.**

1.24 Первое тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью $v_{01} = 5{,}0$ м/с. В тот же момент времени вертикально вниз с той же начальной скоростью из точки, находящейся на максимальной высоте подъема h_{max} первого тела, брошено второе тело. Определить: 1) в какой момент времени t тела встретятся; 2) на какой высоте h от поверхности Земли произойдетвстреча; 3) проекции скоростей v_1 и v_2 тел в момент встречи.

Ответ. $t = 1{,}3 \cdot 10^{-1}$ **с;** $h = 5{,}6 \cdot 10^{-1}$ **м;** $v_1 = -3{,}8$ **м/с;** $v_2 = 6{,}3$ **м/с.**

1.25 Тело брошено горизонтально со скоростью $v = 15{,}0$ м/с. Найти нормальное и тангенциальное ускорения тела через $t = 1$ с после начала движения.

Ответ. $a_n = \dfrac{gv_x}{\sqrt{v_x^2 + g^2t^2}} = 8{,}2$ **м/с**^{2};

$$a_\tau = \frac{g^2t}{\sqrt{v_x^2 + g^2t^2}} = 5{,}4 \text{ м/с}^2.$$

1.26 Тело брошено со скоростью v_0 = 20,0 м/с под углом α = 30° к горизонту. Определить в момент времени t_1 = 1,5 с после начала движения нормальное и тангенциальное ускорения.
Ответ. a_n = 9,5 **м/с**^{2}; a_τ = 2,6 **м/с**^{2}.

1.27 Точка движется в плоскости *XOY* из положения с координатами $x_0 = y_0 = 0$. Вектор скорости с течением времени изменяется по закону $\vec{v} = a\vec{i} + bt\vec{j}$, где a и b – постоянные. Определить: 1) уравнение траектории точки $y(x)$; 2) форму траектории.

Ответ. $y = \dfrac{b}{2a^2}x^2$ **; парабола.**

1.28 Материальная точка движется прямолинейно. Уравнение движения имеет вид $x = 2{,}0t + 0{,}04t^3$ (м). Найти скорость и ускорение точки в моменты времени t_1 = 0 и t_2 = 5 с. Каковы средние значения скорости и ускорения за первые 5 с движения?
Ответ. v_1 = 2,0 м/с; v_2 = 5,0 м/с; a_1 = 0 м/с^2;
a_2 = 1,20 м/с^2; $\langle v \rangle$ = 3,0 **м/с;** $\langle a \rangle$ **= 0,60 м/с**^{2}.

1.29 Точка движется вдоль оси *OX* согласно уравнению $x = 6{,}0t - \dfrac{t^3}{8}$ (м). Найти среднюю скорость движения точки в интервале времени от t_1 = 2 с до t_2 = 6 с, проекции скорости и ускорения точки в момент времени t_2 = 6 с.
Ответ. $\langle v \rangle$ = 3,0 **м/с;** v_x = –7,5 **м/с;** a_x = –4,5 **м/с**^{2}.

1.30 Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = At\vec{i} + Bt^2\vec{j}$ (м). Найти: а) уравнение траектории, изобразить ее графически; б) проекции скорости на оси координат; в) зависимости от времени векторов скорости и ускорения, модули этих величин в момент времени t_1 = 1,5 с. Данные: A = 2,0 м/с, B = 6,0 м/с^2.

Ответ. **а)** $y = 1{,}5x^2$; **б)** v_x = 2,0 **м/с;** $v_y = 12{,}0t$ **м/с;** **в)** $\vec{v} = 2{,}0\vec{i} + 12{,}0t\vec{j}$; $\vec{a} = 12{,}0\vec{j}$; v_1 = **18,1 м/с;** $\boldsymbol{a}$ = 12,0 **м/с**^{2}.

1.31 Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt\vec{j}$ (м). Найти: а) уравнение траектории, изобразить ее графически; б) проекции скорости на оси координат; в) зависимости от времени векторов скорости и ускорения, модули этих величин в момент времени t_1 = 0,3 с. Данные: A = 36,0 м/с^2, B = 12,0 м/с.

Ответ. **а)** $y = 2\sqrt{x}$ **;** **б)** $v_x = 72{,}0t$ **(м/с);** v_y = 12,0 **м/с;** **в)** $\vec{v} = 72{,}0t\vec{i} + 12{,}0\vec{j}$; $\vec{a} = 72{,}0\vec{i}$; v_1 = 24,7 **м/с;** $\boldsymbol{a}$ = 72,0 **м/с**^{2}.

1.32 Две материальные точки движутся из начала координат в одной и той же системе отсчета со скоростями, изменяющимися с течением времени по следующим законам: $\vec{v}_1 = 5{,}0t\vec{i} + 2{,}0t^2\vec{j} + 3{,}0\vec{k}$ (м/с); $\vec{v}_2 = 4{,}0\vec{i} + 1{,}0t\vec{j} + 2{,}0t^2\vec{k}$ (м/с). Найти расстояние между точками в момент времени t_1 = 1,0 с.

Ответ. r_{12} = 2,8 **м.**

1.33 Две материальные точки движутся из начала координат в одной и той же системе отсчета со скоростями, изменяющимися с течением времени по следующим законам: $\vec{v}_1 = 2{,}0t\vec{i} - 6{,}0t^2\vec{k}$ (м/с); $\vec{v}_2 = 4{,}5t^2\vec{i} - 4{,}0t\vec{j} + 2{,}0t\vec{k}$ (м/с). Найти расстояние между материальными точками в момент времени t_1 = 2 с.

Ответ. r_{12} = 23,0 **м.**

1.34 Радиус-вектор материальной точки относительно начала координат изменяется со временем по закону $\vec{r} = 2t\vec{i} + 6t^2\vec{j}$ (м). Найти уравнение траектории и проекции скорости на оси координат.

Ответ. $y = 1{,}5x^2$; v_x = 2 **(м/с);** $v_y = 12t$ **(м/с).**

1.35 Проекция ускорения материальной точки изменяется по закону $a = -2{,}0 + 20{,}0t + 14{,}0t^2$ (м/с^2). Какой скорости достигнет материальная точка через $t_1 = 0{,}5$ с после начала движения из состояния покоя? Какой путь она пройдет за это время?

Ответ. $v = 2{,}1$ **м/с;** $S = 0{,}24$ **м.**

1.36 Уравнение движения материальной точки вдоль оси OX имеет вид $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ (м), где $C = 0{,}14$ м/с^2 и $D = 0{,}01$ м/с^3. Через какое время после начала движения ускорение тела будет равно 1,0 м/с^2?

Ответ. $t = 12$ с.

1.37 Велосипедист ехал из одного города в другой. Половину пути он проехал со скоростью 12 км/ч. Затем половину оставшегося времени ехал со скоростью 6 км/ч, после чего до конца пути – со скоростью 4 км/ч. Чему равна средняя скорость велосипедиста?

Ответ. $v_{ср} = 1{,}90$ **м/с**.

1.38 В первой половине пути автобус двигался со скоростью в 8 раз большей, чем во второй. Средняя скорость автобуса на всем пути 16 км/ч. Чему равна скорость автобуса на каждой половине пути?

Ответ. $v_1 = 20$ **м/с**; $v_2 = 2{,}5$ **м/с.**

9–10 баллов

1.39 Три точки находятся в вершинах равностороннего треугольника, сторона которого равна a. Они начинают одновременно двигаться с постоянной по модулю скоростью v, причем первая точка все время держит курс на вторую, вторая – на третью, третья – на первую. Через сколько времени они встретятся?

Ответ. $t = \dfrac{2a}{3v}$.

1.40 Две частицы движутся с ускорением $g = 9{,}8$ м/с^2 в однородном поле тяжести. В начальный момент времени частицы находились в одной точке, имели скорости $v_1 = 3{,}0$ м/с и $v_2 = 4{,}0$ м/с, направленные горизонтально и в противоположные стороны. Найти расстояние между частицами в момент, когда векторы их скоростей окажутся взаимно перпендикулярными.

Ответ. $l = (v_1 + v_2)\dfrac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} = 2{,}5$ **м.**

1.41 На реке на расстоянии $l = 60$ м от берега закреплен на якоре плот. Скорость течения реки у берега равна нулю и возрастает пропорционально расстоянию от берега, так что у плота скорость реки равна 2 м/с. Лодка движется от берега к плоту. Скорость лодки относительно воды 2 м/с. Под каким углом φ должна быть направлена скорость лодки перед отплытием, чтобы без дальнейших корректировок ее скорости пристать к плоту точно напротив места отплытия? Сколько времени понадобится лодке, чтобы достичь плота?

Ответ. **$\varphi = 30°$ от перпендикуляра к берегу против течения реки;** $t = 35$ с.

1.42 Уравнения движения материальной точки имеют вид $x = -9 + 3t$, $y = 4t - t^2$. Определить векторы скорости, ускорения и угол между ними в момент времени $t = 2$ с.

Ответ. $\vec{v} = 3\vec{i} + (4 - 2t)\vec{j}$; $\vec{a} = -2\vec{j}$ **; угол между векторами скорости и ускорения равен 90°**.

1.43 Две частицы движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 по двум взаимно перпендикулярным прямым к точке их пересечения O. В момент $t = 0$ частицы находились на расстояниях l_1 и l_2 от точки O, соответственно. Через какой промежуток времени после этого расстояние между частицами станет наименьшим? Чему оно равно.

Ответ. $t_m = \dfrac{v_1 l_1 + v_2 l_2}{v_1^2 + v_2^2}$; $l_{\min} = \dfrac{|v_2 l_1 - v_1 l_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

2. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Краткие теоретические сведения

Вращательное движение твердого тела – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, которая называется осью вращения.

Угловая скорость твердого тела – это производная от угла поворота по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловое ускорение твердого тела – это производная от угловой скорости по времени или вторая производная от угла поворота по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

При **равномерном** вращательном движении вокруг неподвижной оси ($\omega = \mathrm{const}$) выполняется соотношение

$$\varphi = \omega t.$$

Уравнения равнопеременного вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси ($\varepsilon = \mathrm{const}$):

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Уравнения связи модулей угловых величин с модулями линейных:

$$dS = Rd\varphi, \quad \upsilon = \omega R, \quad a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R,$$

где dS – путь, пройденный точкой вращающегося тела (длина дуги) при повороте на угол $d\varphi$ за промежуток времени dt;

R – расстояние от точки до оси вращения;

a_τ – модуль тангенциального ускорения;

a_n – модуль нормального ускорения.

Частотой n при равномерном вращении называется число оборотов в единицу времени

$$n = N/t, \qquad [n] = 1 \text{ Гц}.$$

Периодом вращения T называется время одного полного оборота.

Угловая скорость тела ω, вращающегося равномерно, связана с частотой n и периодом вращения T соотношением

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$ (рад), где $A = 10{,}0$ рад; $B = 20{,}0$ рад/с; $C = -2{,}0$ рад/с^2. Расстояние от точки до оси вращения $R = 0{,}1$. Найти полное ускорение материальной точки в момент времени $t = 4{,}0$ с.

Дано:
$\varphi = A + Bt + Ct^2$ рад;
$A = 10{,}0$ рад;
$B = 20{,}0$ рад/с;
$C = -2{,}0$ рад/с^2;
$R = 0{,}1$ м;
$t = 4{,}0$ с

Найти: a

Решение. Полное ускорение $\vec{a}$ точки, движущейся по кривой линии, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного к центру кривизны траектории (рис. 2.1),

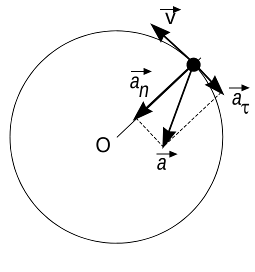

Рис. 2.1

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

Так как векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно перпендикулярны, модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} . \qquad (2.1)$$

Модули тангенциального и нормального ускорения точки вращающегося тела выражаются формулами

$$a_\tau = \varepsilon R ; \qquad a_n = \omega^2 R .$$

Подставляя выражения a_τ и a_n в формулу (2.1), находим

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} . \qquad (2.2)$$

Угловую скорость ω найдем, взяв первую производную от угла поворота по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct .$$

В момент времени $t = 4$ с модуль угловой скорости

$$\omega = \left(20 + 2 \cdot (-2) \cdot 4\right) \text{рад/с} = 4{,}0 \text{ рад/с} .$$

Угловое ускорение найдем, взяв первую производную от угловой скорости по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C = -4{,}0 \text{ рад/с}^2 ,$$

следовательно, движение равнозамедленное при $t = 4{,}0$ с .

Подставляя значения ω, ε и R в формулу (2.2), получим

$$a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} = 1{,}7 \text{ м/с}^2 .$$

Ответ. $a = 1{,}7$ **м/с**^{2} .

Задача 2. Диск радиусом R = 5 см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угловой скорости от времени задается уравнением $\omega = 2At + 5Bt^4$ (рад/с), где A = 2,0 рад/с^2; B = 1,0 рад/с^2. Определить для точек на ободе диска к концу первой секунды после начала движения: 1) модуль полного ускорения; 2) число оборотов, сделанных диском.

Дано:
$\omega = 2At + 5Bt^4$ рад/с;
A = 2,0 рад/с^2;
B = 1,0 рад/с^2;
t = 1с;
R = 5 см = 0,05 м

Найти: a; N

Решение. Модуль полного ускорения точек на ободе диска

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения рассчитываются по формулам

$$a_\tau = \varepsilon R ;\ a_n = \omega^2 R .$$

Тогда

$$a_\tau = \varepsilon R = R\frac{d\omega}{dt} = R(2A + 20Bt^3) ;$$

$$a_n = \omega^2 R = R(2At + 5Bt^4)^2 .$$

Полное ускорение

$$a = R\sqrt{(2A + 20Bt^3)^2 + (2At + 5Bt^4)^4} .$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$a = 0{,}05 \cdot \sqrt{(2 \cdot 2{,}0 + 20 \cdot 1{,}0 \cdot 1^3)^2 + (2 \cdot 2{,}0 \cdot 1 + 5 \cdot 1{,}0 \cdot 1^4)^4} =$$
$$= 4{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Если диск совершил N оборотов, то угол поворота диска

$$\varphi = 2\pi N .$$

Так как

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

то

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (2At + 5Bt^4) dt = At^2 + Bt^5 .$$

Следовательно, число оборотов диска

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{At^2 + Bt^5}{2\pi} = 0{,}5;$$

$$N = \frac{2{,}0 \cdot 1^2 + 1{,}0 \cdot 1^5}{2\pi} = 0{,}5 \cdot$$

Ответ. a **= 4,2 м/с**^{2}; N = 0,5.

Задача 3. Точка движется по окружности радиусом R = 20 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти нормальное ускорение a_n точки через время t_1 = 20 с после начала движения, если известно, что к концу десятого оборота после начала движения линейная скорость точки v = 0,5 м/с.

Дано:
R = 20 см = 0,2 м;
a_τ = const;
t_1 = 20 с;
v = 0,5 м/с;
N = 10;
φ_0 = 0 рад при t_0 = 0 с

Найти: a_n

Решение. Нормальное ускорение точки определяется по соотношению

$$a_n = \omega^2 R.$$

Так как $\omega = \varepsilon t$, то

$$a_n = \varepsilon^2 t^2 R. \qquad (2.3)$$

За время t_1 изменение угла поворота составит

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \varphi = \frac{\varepsilon t_1^2}{2}. \qquad (2.4)$$

Учитывая, что число оборотов равно N, выражение (2.4) можно записать так

$$2\pi N = \frac{\varepsilon t_1^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$\frac{4\pi N}{\varepsilon} = t_1^2; \quad \sqrt{\frac{4\pi N}{\varepsilon}} = t_1. \qquad (2.5)$$

Через время t_1 угловая скорость точки будет

$$\omega_1 = \varepsilon t_1.$$

Тогда

$$t_1 = \frac{\omega_1}{\varepsilon}.$$

С учетом (2.4) можно записать, что

$$\frac{4\pi N}{\varepsilon} = \frac{\omega_1^2}{\varepsilon^2}; \qquad 4\pi N = \frac{\omega_1^2}{\varepsilon}.$$

С другой стороны, угловая скорость точки может быть вычислена через линейную скорость и радиус окружности

$$\omega_1 = \frac{v}{R}.$$

Тогда

$$4\pi N = \frac{v^2}{\varepsilon R^2}.$$

Откуда получаем величину углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{v^2}{4\pi N R^2}. \qquad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), окончательно получим для нормального ускорения выражение

$$a_n = \frac{v^4 t_1^2}{16\pi^2 N^2 R^3} = \frac{0{,}5^4 \cdot 20^2}{16 \cdot 3{,}14^2 \cdot 100 \cdot 0{,}2^3} \approx 0{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Ответ. $\boldsymbol{a_n} =$ **0,2 м/с**^{2}.

З а д а ч и

4 балла

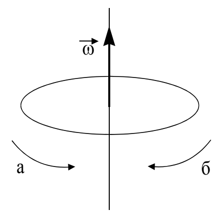

Рис. 2.2

2.1 Вектор угловой скорости направлен так, как показано на рис. 2.2. В какую сторону вращается материальная точка: по стрелке (*а*) или по

стрелки (*б*)? Почему?
Ответ. По стрелке (*а*).

2.2 Тело за 2 с совершило поворот на угол 2π. Найти угловую скорость?
Ответ. $\omega = \pi$ **рад/с**.

2.3 Если за время 10 с тело совершило 100 полных оборотов с постоянной угловой скоростью, чему равен период и частота вращения тела?
Ответ. $T = 0{,}1$ **с;** $n = 10$ **Гц.**

2.4 Тело вращается вокруг оси с частотой $n = 10$ Гц. Чему равен модуль угловой скорости тела?
Ответ. $\omega = 20\pi$ **рад/с**.

2.5 Тело вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 2t$ рад/с. Чему равен модуль углового ускорения тела?
Ответ. $\varepsilon = 2$ **рад/с**^{2}.

2.6 Тело равномерно вращается по окружности радиуса $R = 10$ м с угловой скоростью $\omega = 3$ рад/с. Чему равен модуль линейной скорости тела?
Ответ. $v = 30$ **м/с.**

2.7 Тело движется по окружности с угловой скоростью $\omega = 3 + 4t$ (рад/с). Найти модуль углового ускорения тела?
Ответ. $\varepsilon = 4$ **рад/с**^{2}.

2.8 Угловое ускорение точки, движущейся по окружности радиуса $R = 10$ м, равно $\varepsilon = 5t^2$ рад/с^2. Чему равен модуль тангенциального ускорения в момент времени $t_1 = 1$ с?
Ответ. $a_\tau = 50$ **м/с**^{2}.

2.9 Тело за 10 с совершило 20 полных оборотов по окружности радиуса 5 м. Найти нормальное ускорение тела.
Ответ. $a_n = 789$ **м/с**^{2}.

2.10 Тело движется по окружности радиуса $R = 5$ м с тангенциальным ускорением, равным 10 м/с^2. Чему равен модуль

углового ускорения тела?
Ответ. $\varepsilon = 2$ **рад/с**^{2}.

5–6 баллов

2.11 Точка движется по окружности радиусом $R = 20$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 5{,}0$ см/с^2. Через какое время t после начала движения модуль центростремительного ускорения a_n точки будет а) равен модулю тангенциальному; б) вдвое больше модуля тангенциального.
Ответ. $t_1 = 2$ **с;** $t_2 = 2{,}8$ **с.**

2.12 Точка движется по окружности радиусом R с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0{,}5$ м/с^2. Через время $t = 2{,}1$ с после начала движения модуль нормального ускорения точки $a_n = 0{,}6 a_\tau$. Найти радиус окружности.
Ответ. $R = 3{,}7$ **м.**

2.13 Колесо радиусом $R = 0{,}10$ м вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 3{,}14$ рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения: а) угловую скорость ω; б) модуль линейной скорости v; в) модуль тангенциального ускорения a_τ; г) модуль нормального ускорения a_n; д) модуль полного ускорения a; е) угол α, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса.
Ответ. **а)** $\omega = 3{,}14$ **рад/с; б)** $v = 0{,}31$ **м/с;**
в) $a_\tau = 0{,}31$ **м/с**^{2}; **г)** $a_n = 0{,}99$ **м/с**^{2};
д) $a = 1{,}03$ **м/с**^{2}**; е)** $\sin\alpha = 0{,}30$, $\alpha = 17°46'$.

2.14 Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = 0{,}5t^2$. Определить к концу второй секунды после начала движения: 1) модуль угловой скорости диска; 2) модуль углового ускорения диска; 3) для точки, находящейся на расстоянии 0,8 м от оси вращения модули тангенциального a_τ, нормального a_n и полного a ускорения.
Ответ. $\omega = 2$ **рад/с;** $\varepsilon = 1$ **рад/с**^{2}; $a_\tau = 0{,}8$ **м/с**^{2}; $a_n = 3{,}2$ **м/с**^{2}; $a = 3{,}3$ **м/с**^{2}.

2.15 Автомобиль движется по горизонтальной дороге со скоростью 90 км/ч. Чему равен модуль скорости точки обода, лежащей на одном уровне с осью колеса, относительно поверхности Земли.

Ответ. v = 35,25 **м/с.**

2.16 Определить модуль полного ускорения a точки, находящейся на ободе колеса радиусом R = 0,5 м, вращающегося согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$ (рад), где A = 2,0 рад/с; B = 0,2 рад/с^3, в момент времени t = 3 с.

Ответ. $\boldsymbol{a}$ = 27,4 **м/с**^{2}.

2.17 Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ (рад), где B = 1,0 рад/с, C = 1,0 рад/с^2, D = 1,0 рад/с^3. Найти радиус колеса R, если известно, что к концу второй секунды движения для точек, лежащих на ободе колеса, модуль нормального ускорения $a_n = 3{,}46 \cdot 10^2$ м/с^2.

Ответ. R = 1,20 **м.**

2.18 Диск радиусом R = 0,2 м вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$ (рад), где A = 3,0 рад; B = –1,0 рад/с; C = 0,1 рад/с^3. Определить модули тангенциального a_τ,, нормального a_n и полного a ускорение точек на окружности диска для момента времени t = 10 с.

Ответ. $\boldsymbol{a_\tau}$ = 1,2 **м/с**^{2}; $\boldsymbol{a_n}$ = 168,2 **м/с** ^{2}; $\boldsymbol{a}$ = **168,2 м/с**^{2}.

2.19 Колесо радиусом R = 0,1 м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$ (рад), где B = 2,0 рад/с; C = 1,0 рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через 2 с после начала движения: 1) угловую скорость; 2) модуль линейной скорости; 3) модуль углового ускорения; 4) модуль тангенциального ускорения; 5) модуль нормального ускорения.

Ответ. $\boldsymbol{\omega}$ = 14,0 **рад/с;** v = 1,4 **м/с;** $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 12,0 **рад/с**^{2}; $\boldsymbol{a_\tau}$ = 1,2 **м/с**^{2}; $\boldsymbol{a_n}$ = **19,6 м/с**^{2}.

7–8 баллов

2.20 Материальная точка движется вдоль осей x и y по законам: $x = 2{,}0t - t^3$ (м); $y = t^2 + 2{,}0t^3$ (м). Найти модули полного, тангенциального и нормального ускорений точки в момент времени $t_1 = 0{,}2$ с, а также радиус кривизны траектории в этот момент времени.
Ответ. $\boldsymbol{a}$ = 4,6 **м/с**^{2}; $\boldsymbol{a}_\tau$ = 0,3 **м/с**^{2}; $\boldsymbol{a}_n$ = 4,6 **м/с**^{2}; $R = 86{,}7\cdot10^{-2}$ **м.**

2.21 Колесо вращается с постоянным угловым ускорением ε = 3,0 рад/с^2. Определить радиус колеса, если через t = 1 с после начала движения полное ускорение колеса a = 7,5 м/с^2.
Ответ. R = 0,8 **м.**

2.22 Материальная точка движется вдоль осей x и y по законам $x = 34{,}0 - t + 2{,}0t^3$ (м); $y = 5{,}0t - t^2$ (м). Найти модули полного, тангенциального и нормального ускорений точки в момент времени $t_1 = 0{,}6$ с, а также радиус кривизны траектории в этот момент времени.
Ответ. $\boldsymbol{a}$ = 7,5 **м/с**^{2}; $\boldsymbol{a}_\tau$ = 0,20 **м/с**^{2}; $\boldsymbol{a}_n$ = 7,5 **м/с**^{2}; R = 2,1 **м.**

2.23 Точка движется вдоль осей x и y по законам $x = 2{,}0t + 3{,}0t^2$ (м), $y = 24{,}0 - 4{,}0t^3$ (м). Найти модуль полного, тангенциального и нормального ускорений точки в момент времени t = 1 с, а также радиус кривизны траектории в этот момент времени.
Ответ. $\boldsymbol{a}$ = 24,7 **м/с**^{2}; $\boldsymbol{a}_\tau$ = 23,3 **м/с**^{2}; $\boldsymbol{a}_n$ = 8,3 **м/с**^{2}; R = 25,0 **м.**

2.24 Найти модуль углового ускорения ε колеса, если известно, что через время t = 2 с после начала движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол $\alpha = 60°$ с вектором ее линейной скорости.
Ответ. $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 0,43 **рад/с**^{2}.

2.25 Материальная точка движется по окружности радиуса R = 10 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 0,4 см/с^2. Через какие промежутки времени вектор полного ускорения образует с вектором скорости $\vec{V}$ угол равный 60° и 80°? Какова длина пути, пройденного точкой за эти промежутки времени?

Ответ. Δt_1 = 6,6 с; $S_1 = 8{,}7 \cdot 10^{-2}$ **м**; Δt_2 = 12 с; $S_2 = 2{,}9 \cdot 10^{-1}$ **м.**

2.26 Диск радиусом R = 0,1 м вращается вокруг своей оси. Зависимость угла поворота диска от времени задается уравнением $\varphi = 2{,}0 + 4{,}0t^3$ рад. Определить угол поворота φ, при котором вектор полного ускорения составляет с радиусом диска угол 45°.

Ответ. φ = 2,7 **рад.**

2.27 Точка движется по окружности радиусом R = 0,02 м. Зависимость пройденного точкой пути от времени дается уравнением $S = Ct^3$ (см), где C = 0,1 см/с^3. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки в момент, когда модуль линейной скорости точки v = 0,3 м/с.

Ответ. a_n = 4,50 **м/с**^{2}; a_τ = **0,06 м/с**^{2}.

9–10 баллов

2.28 Точка движется по окружности так, что зависимость пройденного точкой пути от времени дается уравнением $S = A + Bt + Ct^2$ (м), где B = –2,0 м/с и C = 1,0 м/с^2. Найти модули линейной скорости точки, ее тангенциального, нормального и полного ускорения через t_1 = 3 с после начале движения, если известно, что нормальное ускорение точки при t_2 = 2 с будет $a_{n2} = 0{,}5$ м/с^2.

Ответ. v_1 = 4 **м/с;** a_{n1} = 2 **м/с**^{2}; $a_{\tau 1}$ = 2 **м/с**^{2}; a_1 = 2,8 **м/с**^{2}.

2.29 Колесо радиусом R = 5 см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ (рад), где D = 1,0 рад/с^3. Найти для точек, лежащих на ободе колеса, изменение модуля тангенциального ускорения Δa_t за каждую секунду движения.

Ответ. Δa_τ = **0,3 м/с**^{2}.

2.30 Зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе диска, от времени определяется уравнением $v = 0{,}3t + 0{,}1t^2$ (м/с). Диск имеет радиус $R = 10$ см. Определить момент времени, для которого вектор полного ускорения образует с радиусом колеса угол $\alpha = 4°$.
Ответ. $t = 2$ **с**.

2.31 Точка движется по окружности радиусом $R = 15$ см и с постоянным по модулю тангенциальным ускорением a_τ. К концу четвертого оборота после начала движения линейная скорость точки $v = 15{,}0$ м/с. Определить модуль нормального ускорения точки a_n через $t = 16$ с после начала движения.
Ответ. $a_n = 1{,}5$ **м/с**^{2}.

2.32 Два тела начинают двигаться из одной точки окружности друг за другом с разницей во времени $\Delta t = 2$ с. Через какое минимальное время тела снова окажутся в одной точке? Период обращения первого тела $T_1 = 70$ с, второго $T_2 = 65$ с.
Ответ. $t = 26$ **с.**

2.33 Тело, привязанное к нерастяжимой нити, равномерно вращается в вертикальной плоскости по окружности, центр которой находится на высоте h от поверхности Земли. Нить обрывается в нижней точке траектории. При какой длине нити проекция перемещения тела на горизонтальное направление максимальна?
Ответ. $l = 2/3h$.

2.34 Гладкий диск радиусом R вращается в горизонтальной плоскости. От диска отрывается тело и скользит по его поверхности. На каком расстоянии от оси вращения оторвалось тело, если за время его скольжения диск повернулся на угол 90°?

Ответ. $r = \dfrac{2R}{\sqrt{\pi^2 + 4}}$.

3. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Краткие теоретические сведения

Сила – количественная мера взаимодействия тел.

Первый закон Ньютона: существуют такие системы отсчета, относительно которых тело движется равномерно прямолинейно или сохраняет состояние покоя, если действие сил на него равно нулю или скомпенсировано.

Импульс материальной точки – это векторная величина

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Полный импульс системы тел равен векторной сумме импульсов $\vec{p}_i$ всех тел, образующих систему:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i ,$$

где m_i, $\vec{v}_i$ – масса и скорость i-го тела, соответственно.

Второй закон Ньютона: скорость изменения импульса тела равна векторной сумме всех сил, действующих на тело:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i ,$$

где N – число действующих на тело сил.

Третий закон Ньютона: силы, с которыми два тела взаимодействуют друг с другом, равны по модулю и противоположны по направлению.

Силы в механике:

а) **сила упругости (закон Гука)**

$$F = -k\Delta x ,$$

где k – коэффициент упругости (в случае пружины – жесткость);

$\Delta x = x - x_0$ – абсолютная деформация удлинения (сжатия) тела;

x_0 – начальная длина тела;

x – длина деформированного тела.

Нормальным напряжением σ называется величина равная отношению модуля нормальной составляющей силы $F_\perp$ к площади поверхности S, на которую действует сила:

$$\sigma = \frac{F_\perp}{S}.$$

Связь нормального напряжения σ с относительной деформацией растяжения (сжатия) тела ε

$$\sigma = E\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{x - x_0}{x_0},$$

где E – модуль Юнга.

Связь тангенциального напряжения τ с деформацией сдвига γ

$$\tau = G\gamma,$$

где G – модуль сдвига;

б) **сила тяжести**

$$P = mg;$$

в) **сила гравитационного взаимодействия (закон всемирного тяготения)**

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная;

m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел;

r – расстояние между телами (тела рассматриваются как материальные точки);

г) **сила трения** (скольжения)

$$F = \mu \cdot N,$$

где μ – коэффициент трения;

N – сила реакции опоры.

Параллельным соединением двух пружин с жесткостями k_1 и k_2 называется такое соединение, при котором абсолютные деформации пружин одинаковы: $\Delta x_1 = \Delta x_2$.

Последовательным соединением двух пружин с жесткостями k_1 и k_2 называется такое соединение, при котором абсолютные деформации пружин различны: $\Delta x_1 \neq \Delta x_2$.

Общая жесткость k системы, состоящей из двух пружин с жесткостями k_1 и k_2:

1) при **параллельном** соединении

$$k = k_1 + k_2;$$

2) при **последовательном** соединении

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. На гладком горизонтальном столе лежит брусок массой $M = 2{,}0$ кг, на котором находится брусок массой $m = 1{,}0$ кг. Оба бруска соединены нитью, перекинутой через невесомый блок. Какую силу F нужно приложить к нижнему бруску, чтобы он начал двигаться от блока с постоянным ускорением $a = g/2$? Коэффициент трения между брусками $\mu = 0{,}5$. Трением между нижним бруском и столом пренебречь.

Дано:
M = 2,0 кг;
m = 1,0 кг;
$a = g/2$;
g = 9,8 м/с^2;
μ = 0,5

Найти: F

Решение. Горизонтальные силы, действующие на оба бруска, показаны на рис. 3.1.

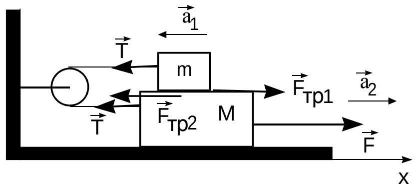

Рис. 3.1

По третьему закону Ньютона сила трения $\vec{F}_{тр_1}$, действующая на брусок массой m, равна по величине и противоположна по направлению силе трения $\vec{F}_{тр_2}$, действующей на брусок массой M со стороны бруска массой m:

$$F_{тр_1} = F_{тр_2} = F_{тр}.$$

Ускорения брусков одинаковы, так как они связаны нерастяжимой нитью

$$a_1 = a_2 = a.$$

Запишем второй закон Ньютона для брусков массой M и m в проекциях на ось X, соответственно:

$$Ma = F - T - F_{тр}\quad; \tag{3.1}$$

$$-ma = -T + F_{тр}\ . \tag{3.2}$$

Сила трения, действующая на брусок m:

$$F_{тр} = \mu mg\ . \tag{3.3}$$

Решая совместно уравнения (3.1)–(3.3), получим величину искомой силы:

$$F = a(M + m) + 2mg\mu;$$

$$F = 9{,}8 : 2(1{,}0 + 2{,}0) + 2 \cdot 1{,}0 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 24{,}5\ \text{Н}.$$

Ответ. F = 24,5 Н.

Задача 2. Два одинаковых шарика связаны невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок, причем один из шариков погружен в сосуд с жидкостью (рис. 3.2). С какой установившейся скоростью v будут двигаться шарики, если известно, что установившаяся скорость падения одиночного шарика в той же жидкости равна v_0? Сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости. Плотность жидкости $\rho_ж$, плотность материала шариков ρ.

Дано:
v_0;
$\rho_ж$;
ρ

Найти: v

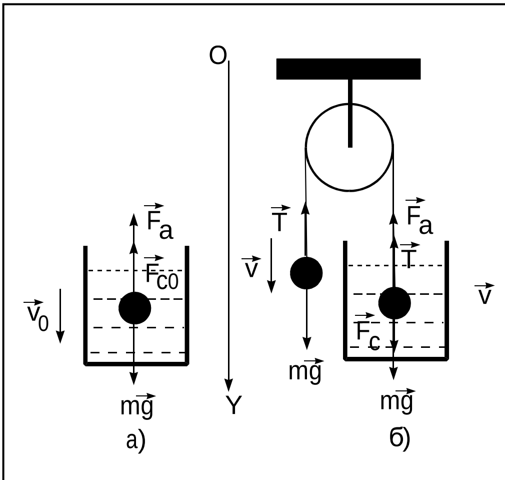

Рис.3.2

Решение. При свободном падении шарика в сосуде на него действуют сила Архимеда $\vec{F}_а$, сила сопротивления движению $\vec{F}_{c0}$ и сила тяжести $m\vec{g}$ (рис. 3.2, *а*). Если шарик движется с неизменной (установившейся) скоростью, то векторная сумма сил, действующих на шарик:

$$\vec{F}_а + \vec{F}_{c0} + m\vec{g} = 0.$$

Сила сопротивления пропорциональна скорости, поэтому ее модуль

$$F_{c0} = cv_0, \tag{3.4}$$

где c – коэффициент пропорциональности.

Сила Архимеда определяется по формуле

$$F_а = \rho_ж g V, \tag{3.5}$$

где $\rho_ж$ – плотность жидкости; V – объем шарика, погруженного в жидкость.

$$kv_0 + \rho_ж gV = \rho gV, \tag{3.6}$$

где $\rho = m/V$ – плотность материала шарика.

Из (3.6) следует, что коэффициент пропорциональности

$$c = (\rho - \rho_{ж})\frac{Vg}{v_0}. \tag{3.7}$$

При установившемся движении связанных шариков векторные суммы сил, действующих на левый и правый шарики, будут (рис. 3.2, *б*)

$$\vec{T} + m\vec{g} = 0, \tag{3.8}$$

$$\vec{F}_а + \vec{T} + \vec{F}_с + m\vec{g} = 0. \tag{3.9}$$

Тогда в проекциях на ось OY уравнения (3.8)–(3.9) с учетом (3.4), (3.5) и (3.7) можно переписать как

$$\rho Vg = T, \tag{3.10}$$

$$T + \rho_ж Vg = \rho Vg + (\rho - \rho_ж)\frac{Vgv}{v_0}. \tag{3.11}$$

Решая совместно уравнения (3.10) и (3.11), находим величину установившейся скорости

$$v = v_0 \rho_ж / (\rho - \rho_ж).$$

Ответ. $v = v_0 \rho_ж / (\rho - \rho_ж)$.

Задача 3. Тормозная система развивает силу тяги, пропорциональную времени $F = -ct$, где $c = \text{const}$. Пренебрегая трением, определить через какое время от момента начала торможения автомобиль массой m остановится. Найти тормозной путь. К моменту торможения автомобиль имел скорость v_0.

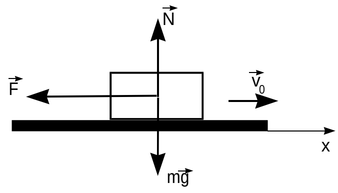

Рис. 3.3

Дано:
$F = -ct$;
$c = \text{const}$;
v_0;
m

Найти: $t_{ост}$; $x_{ост}$

Решение. На автомобиль действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила тяги тормозной системы $\vec{F} = -ct\vec{i}$, где $\vec{i}$ – единичный орт направления оси OX (рис. 3.3).

Согласно второму закону Ньютона, векторная сумма всех сил, действующих на автомобиль, равна скорости изменения импульса автомобиля:

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}.$$

В проекциях на ось OX имеем

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -ct\ .$$

Разделим переменные и проинтегрируем данное выражение с учетом начальных условий $v = v_0$ при $t_0 = 0$. Получим уравнение изменения скорости автомобиля с течением времени t

$$v = v_0 - \frac{ct^2}{2m}. \tag{3.12}$$

В момент остановки скорость автомобиля $v = 0$ м/с. Тогда время движения автомобиля до остановки $t_{\text{ост}}$ может быть найдено из уравнения

$$0 = v_0 - \frac{ct_{\text{ост}}^2}{2m}.$$

Отсюда находим, что время до остановки определяется по формуле

$$t_{\text{ост}} = \sqrt{\frac{2mv_0}{c}}. \tag{3.13}$$

Величину тормозного пути $x_{\text{ост}}$ получаем интегрированием выражения (3.12) для скорости, полагая, что $x_0 = 0$ при $t_0 = 0$:

$$x_{\text{ост}} = \int_{t_0}^{t_{\text{ост}}} v(t)dt = \int_{t_0}^{t_{\text{ост}}} \left(v_0 - \frac{ct^2}{2m} \right) dt; \tag{3.14}$$

$$x_{\text{ост}} = v_0 t_{\text{ост}} - \frac{ct_{\text{ост}}^3}{6m}.$$

Подставляя в (3.14) выражение для времени остановки (3.13), получим

$$x_{\text{ост}} = \frac{2}{3} v_0 \sqrt{\frac{2mv_0}{c}}.$$

Ответ. $t_{\text{ост}} = \sqrt{\frac{2mv_0}{c}}$; $x_{\text{ост}} = \frac{2}{3} v_0 \sqrt{\frac{2mv_0}{c}}$.

З а д а ч и

4 балла

3.1 Если система отсчета К′ движется относительно инерциальной системы отсчета К с ускорением a, является ли система К′ инерциальной? Почему?

3.2 На тело массой $m = 2$ кг действует сила $F = 10$ Н. С каким ускорением движется тело?
Ответ. $\boldsymbol{a} = 5$ **м/с.**

3.3 При движении тела массой $m = 1$ кг модуль его скорости с течением времени t изменяется по закону $v = 2 + 5t$ (м/с). Чему равен модуль скорости изменения импульса тела?

Ответ. $\dfrac{dp}{dt} = 5$ **кг·м/с**^{2}.

3.4 Объясните, почему в соревнованиях по перетягиванию каната возможно выиграть, ведь натяжение каната остается во всех сечениях одинаковым?

3.5 Если на закрепленную пружину жесткостью $k = 400$ Н/м подействовать силой $F = 80$ Н, насколько удлинится пружина?
Ответ. $\boldsymbol{\Delta x} = 0{,}2$ **м.**

3.6 Если нормальное напряжение в теле, вызванное относительной деформацией $\varepsilon = 0{,}01$, составляет 10^8 Па, чему равен модуль Юнга материала тела?
Ответ. $\boldsymbol{E} = 10^{10}$ **Па.**

3.7 Материал тела имеет модуль сдвига $G = 1{,}00 \cdot 10^8$ Па. Чему равна деформация сдвига, если тангенциальное напряжение в теле $1{,}00 \cdot 10^6$ Па?
Ответ. $\gamma = 0{,}01$.

3.8 От каких характеристик зависит коэффициент трения покоя, трения скольжения и трения качения?

3.9 При действии силы $F = 10$ Н на тело некоторой массы, лежащее на шероховатой поверхности стола, тело остается в покое. Чему равна сила трения покоя? Объясните ответ.
Ответ. $F_{тр} = 10$ **Н.**

3.10 В чем заключаются основные отличия силы тяжести от веса тела?

3.11 Тело массой $m = 1$ кг поднимают на подвесе вверх с ускорением $a = 1$ м/с^2. С какой силой тело действует на подвес?
Ответ. $F = 11$ **Н.**

3.12 Какими типами взаимодействия обусловлены: а) сила трения; б) сила упругости; в) сила тяготения?

5–6 баллов

3.13 Два тела массами $m_1 = 4{,}0$ кг и $m_2 = 2{,}0$ кг движутся прямолинейно. Модули скоростей обоих тел изменяются с течением времени t по следующим законам:

$$v_1 = -0{,}8 - 0{,}5t + t^2 + 0{,}5t^3 \text{ (м/с)};$$
$$v_2 = 0{,}25 + 3t + 1{,}5t^2 + 0{,}8t^3 \text{ (м/с)}.$$

В какой момент времени t_1 значения равнодействующих сил, действующих на эти тела, окажутся одинаковыми?
Ответ. $t_1 = 1{,}88$ **с.**

3.14 Автомобиль массой $m = 1020$ кг, двигаясь равнозамедленно, остановился через время $t = 5{,}0$ с, пройдя путь $S = 25{,}0$ м. Найти начальную скорость v_0 автомобиля и силу торможения F.
Ответ. $F = 2{,}04$ **кН;** $v_0 = 10$ **м/с.**

3.15 Вагон массой $m = 20$ т движется равнозамедленно вдоль направления OX. Проекции начальной скорости $v_{0x} = 54$ км/ч, а ускорения $a_x = -0{,}3$ м/с^2. Какая сила торможения F действует на вагон? Через какое время t вагон остановится? Какое расстояние S вагон пройдет до остановки?
Ответ. $F = 6$ **кН**; $t = 50$ с; $S = 375$ **м.**

3.16 Тело движется прямолинейно под действием постоянной силы 15,0 Н. Зависимость координаты тела от времени имеет вид $x = 10{,}0 - 5{,}0t + 2{,}0t^2$ (м). Найти массу тела.

Ответ. m = 3,75 **кг.**

3.17 Камень, пущенный по поверхности льда со скоростью v_0 = 2 м/с, прошел до полной остановки расстояние S = 20,4 м. Найти коэффициент трения камня о лед, считая его постоянным.

Ответ. μ = 0,01.

3.18 Шайба, пущенная по поверхности льда с начальной скоростью v_0 = 20 м/с, остановилась через t = 40 с. Найти коэффициент трения шайбы о лед.

Ответ. μ = 0,05.

3.19 Тело массой 0,5 кг движется прямолинейно, причем уравнение движения имеет $x = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ (м), где C = 5м/с^2 и D = 1 м/с^3. Найти силу, действующую на тело в конце первой секунды.

Ответ. F = 2 Н.

3.20 Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45^\circ$. Пройдя расстояние S = 36,4 см, тело приобретает скорость v = 2 м/с. Чему равен коэффициент трения тела о плоскость?

Ответ. μ = 0,2.

3.21 Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 45°. Зависимость пройденного телом расстояния S от времени t дается уравнением $S = Ct^2$, где C = 1,73 м/с^2. Найти коэффициент трения тела о плоскость.

Ответ. μ = 0,5.

3.22 Тело массой m движется в плоскости XOY по закону $x = A\cos\omega t$, $y = B\sin\omega t$, где A, B и ω – постоянные. Определить модуль силы, действующей на тело.

Ответ. $F = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$.

7–8 баллов

3.23 Аэростат, масса которого вместе с балластом $m = 140$ кг, равномерно опускается. Если сбросить балласт массой $m_1 = 24{,}9$ кг, аэростат начнет равномерно подниматься с той же скоростью. Найти подъемную силу аэростата.
Ответ. $F = 1250$ **Н.**

3.24 Найти радиус кривизны моста, если автомобиль, движущийся со скоростью 19,6 м/с, оказался в состоянии невесомости на его середине.
Ответ. R **= 39,2 м**.

3.25 Каким должен быть минимальный коэффициент трения, чтобы автомобиль, движущийся со скоростью 60 км/ч, смог сделать поворот с радиусом кривизны 200 м?
Ответ. $\mu = 0{,}14$.

3.26 Материальная точка массой 50 г, прикрепленная к пружине длиной 30 см, вращается в горизонтальной плоскости. Конец пружины закреплен в центре вращения. При какой частоте вращения пружина удлинится на 5 см, если жесткость пружины 300 Н/м?
Ответ. $n = 4{,}7$ **Гц.**

3.27 Какая сила действует в поперечном сечении однородного стержня длины l на расстоянии x от того конца, к которому вдоль стержня приложена сила F? Стержень находится на гладкой горизонтальной поверхности.
Ответ. $T = F\left(1 - \frac{x}{l}\right)$.

3.28 Парашютист массой $m_1 = 80$ кг падает при открытом парашюте с установившейся скоростью $v_1 = 5$ м/с. Какой будет установившаяся скорость, если на том же парашюте спускается мальчик $m_2 = 40$ кг? Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости.
Ответ. $v_2 = v_1\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ **= 3,5 м/с.**

3.29 На обледеневшем участке дороги коэффициент трения между колесами и дорогой в 10 раз меньше, чем на не обледеневшем. Во сколько раз нужно уменьшить скорость автомобиля, чтобы тормозной путь на обледеневшем участке дороги остался прежним?

Ответ. В $\sqrt{10}$ **раз.**

3.30 Груз массой m = 200 г, привязанный к нити длиной l = 40 см, вращается в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью так, что нить описывает коническую поверхность. При этом угол отклонения нити от вертикали $\alpha = 37°$ ($\cos 37° = 0{,}7986$). Найти угловую скорость ω вращения груза и силу натяжения нити.

Ответ. $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = 2{,}5$ Н; $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}} = 5{,}6$ **рад/с**.

3.31 Дана система блоков (рис. 3.4). Массы грузов m_1 = 200 г, m_2 = 500 г. Найти: 1) силу натяжения нити; 2) ускорения, с которыми движутся грузы.

Ответ. $\boldsymbol{T}$ = 2,26 **Н;** $\boldsymbol{a}_1$ = 1,5 **м/с^2**; $\boldsymbol{a}_2$ = 0,75 **м/с^2**.

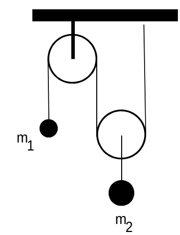

Рис. 3.4

3.32 Железнодорожный вагон тормозится, его скорость равномерно изменяется за время Δt = 3,3 с от v_1 = 47,5 км/ч до v_2 = 30 км/ч. При каком предельном значении коэффициента трения между чемоданом и полкой чемодан при торможении начинает скользить по полке?

Ответ. При μ < 0,15 чемодан начнет скользить.

3.33 Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола, и начинает скользить тогда, когда длина свешивающейся части составляет 25 % всей его длины. Чему равен коэффициент трения каната о стол?

Ответ. μ = 0,33.

3.34 Груз массой 2 т необходимо поднять на гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути. Во время подъема груза действует сила трения, равная 0,1 его силы тяжести. Найти силу тяги, развиваемую двигателем подъемного механизма, если груз перемещают с постоянной скоростью.

Ответ. F = 2,8 **кН.**

3.35 Найти силу тяги, развиваемую двигателем автомобиля, движущегося в гору с ускорением 1 м/с^2. Уклон горы равен 1 м на каждые 25 м пути. Масса автомобиля 1 т. Коэффициент трения 0,1.

Ответ. F = **2,4 кН.**

3.36 Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 4°. При каком предельном значении коэффициента трения тело начнет скользить по наклонной плоскости? С каким ускорением будет скользить тело по плоскости, если коэффициент трения 0,03? Сколько времени потребуется для прохождения при этих условиях 100 м пути? Какую скорость будет иметь тело в конце этих 100 м?

Ответ. 1) $\mu_{\text{пред}}$ = 0,07; 2) a = **0,39 м/с**^{2}; 3) t = 22,6 с; **4)** v = 8,8 **м/с.**

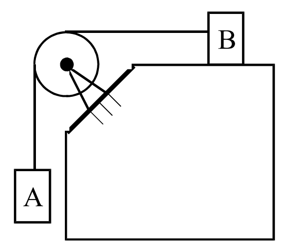

Рис. 3.5

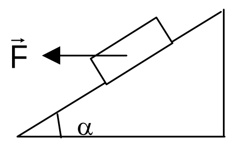

Рис. 3.6

3.37 Невесомый блок укреплен на конце стола (рис. 3.5). Гири А и В равной массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири В о стол $\mu = 0{,}1$. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири; 2) натяжение нити. Трением в блоке пренебречь.

Ответ. a = 4,4 **м/с**^{2}; $T_1 = T_2$ = 5,4 **Н.**

3.38 На тело массой m = 10,0 кг, находящееся на наклонной плоскости с α = 20°, действует горизонтально направленная сила F = 8,0 Н (рис. 3.6). Пренебрегая трением, определить: 1) ускорение тела; 2) силу, с которой тело давит на плоскость.

Ответ. $\boldsymbol{a}$ = 4,1 **м/с**^{2}; $\boldsymbol{P}$ = 89,4 **Н.**

3.39 Частица массой m движется под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos\omega t$, где F_0 и ω – постоянные. Силой тяжести пренебречь. Определить положение частицы, т.е. выразить ее радиус-вектор $\vec{r}$ как функцию времени, если в начальный момент времени $t = 0$; $\vec{r}(0) = 0$; $\vec{v}(0) = 0$.

Ответ. $\vec{r}(t) = (1 - \cos\omega t) \times \dfrac{\vec{F}_0}{m\,\omega^2}$.

9–10 баллов

3.40 С каким минимальным ускорением следует перемещать в горизонтальном направлении брусок A, чтобы тела 1 и 2 не двигались относительно него (рис. 3.7)? Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и телами равен μ. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет.

Ответ. $\alpha_{\min} = g\dfrac{(1-\mu)}{(1+\mu)}$.

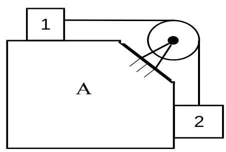

Рис. 3.7

3.41 На наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, поместили два бруска 1 и 2 (рис. 3.8). Массы брусков равны m_1 и m_2, коэффициенты трения между плоскостью и этими брусками μ_1 и μ_2, соответственно, причем $\mu_1 > \mu_2$. Найти силу взаимодействия между брусками в процессе

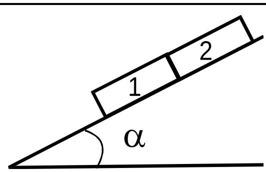

Рис. 3.8

движения.

Ответ. $F = \dfrac{(\mu_1 - \mu_2)m_1 m_2 g\cos\alpha}{m_1 + m_2}$.

3.42 На тележке массой m_1 = 20,0 кг, которая может свободно перемещается вдоль горизонтальных рельсов, лежит брусок массой m_2 = 5,0 кг (рис. 3.9). Коэффициент трения между бруском и тележкой μ = 0,2. Брусок тянут с силой $\vec{F}$, направленной параллельно рельсам. Найти ускорение бруска и тележки, если модуль силы изменяется по закону $F = ct$ (Н), где c = 4,0 Н/с. Построить графики зависимости пройденных ускорений от времени.

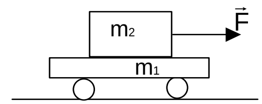

Рис. 3.9

Ответ. **При** $0 < t < 3{,}1$ **с** $a_1 = a_2 = \dfrac{ct}{m_1 + m_2}$;

$a_1 = \dfrac{\mu g m_2}{m_1} = 0{,}5$ **м/с**^{2}; **при** $t > 3{,}1$ **с** $a_2 = \dfrac{ct}{m_2} - \mu g$.

3.43 На наклонную плоскость с углом наклона к горизонту α = = 35° положена доска массой m_2 = 2 кг, а на доску − брусок массой m_1 = 1 кг. Между бруском и доской коэффициент трения μ_1 = 0,1, а между доской и плоскостью – μ_2 = 0,2. Определить: 1) ускорение бруска; 2) ускорение доски; 3) коэффициент трения μ_3, при котором доска не будет двигаться.

Ответ. $\boldsymbol{a_1}$ **= 4,82 м/с**^{2}; $\boldsymbol{a_2}$ **= 3,62 м/с**^{2}; $\boldsymbol{\mu_3 \geq}$ 0,5;

$$a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha);$$

$$a_2 = g\left(\sin\alpha + \mu_1\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\cos\alpha - \mu_2\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)\cos\alpha\right);$$

$$\mu_3 \geq \frac{m_2\left(\sin\alpha + \mu_1\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\cos\alpha\right)}{(m_1+m_2)\cos\alpha}.$$

3.44 Четырьмя натянутыми нитями груз закреплен на тележке (рис. 3.10). Сила натяжения горизонтальных нитей соответственно равны T_1 и T_2 , вертикальных T_3 и T_4. С каким ускорением тележка движется по горизонтальной плоскости?

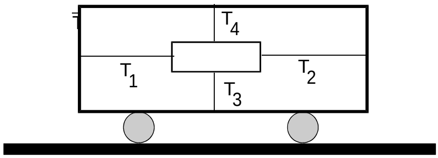

Рис. 3.10

Ответ. $a = g\dfrac{T_2 - T_1}{T_4 - T_3}$.

3.45 Два тела массами m_1 и m_2 связаны нитью, выдерживающей силу натяжения T. К телам приложены силы, модули которых изменяются по законам $F_1 = ct$ (Н) и $F_2 = 2ct$ (Н), где c – постоянный коэффициент, t – время действия силы (рис. 3.11). Определить, в какой момент времени нить порвется.

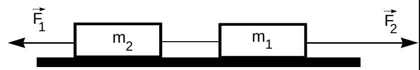

Рис. 3.11

Ответ. $t = \dfrac{T(m_1 + m_2)}{c(2m_2 + m_1)}$.

4. МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ. РАБОТА. МОЩНОСТЬ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Краткие теоретические сведения

Систему взаимодействующих тел называют **замкнутой**, если на нее извне не действуют внешние силы. Для замкнутой системы выполняется **закон сохранения импульса**: полный вектор импульса замкнутой системы есть величина постоянная:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const}.$$

Закон сохранения импульса для двух тел, взаимодействующих по тиру упругого удара, имеет вид

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1^{\,'} + m_2\vec{v}_2^{\,'},$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости до упругого удара;

$\vec{v}_1^{\,'}$ и $\vec{v}_2^{\,'}$ – скорости тех же тел после упругого удара.

Закон сохранения импульса для двух тел, взаимодействующих по тиру неупругого удара, имеет вид

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v},$$

где $\vec{v}$ – скорости тел после неупругого удара.

Работа, **совершаемая силой** $\vec{F}$ **при элементарном перемещении** $d\vec{r}$:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = FdS \cdot \cos\alpha,$$

где $dS = |\, d\vec{r}\, |$ – элементарный путь;

α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$.

Работа переменной силы F **на пути** S

$$A = \int_0^S F \cdot \cos\alpha \, dS .$$

Изменение **полной энергии** системы равно работе, совершенной внешними и внутренними силами, приложенными к системе:

$$W_2 - W_1 = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}} .$$

Кинетическая энергия тела массой m, движущегося поступательно со скоростью v:

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} \quad \text{или} \quad W_{\text{к}} = \frac{p^2}{2m} .$$

Работа A, совершаемая результирующей силой, определяется как мера изменения кинетической энергии тела:

$$A = W_{\text{к}_1} - W_{\text{к}_2} .$$

Мощность – это физическая величина, равная работе, совершаемой в единицу времени:

$$P = \frac{dA}{dt} .$$

Консервативными называются силы, работа которых не зависит от траектории движения тела, а определяется только начальным и конечным положением тела в пространстве.

Если на систему материальных точек действуют консервативные силы, то вводят понятие **потенциальной энергии**. Работа A_{12}, совершаемая консервативными силами, определяется потенциальными энергиями начальной и конечной конфигураций системы:

$$A_{12} = W_{\text{п}_1} - W_{\text{п}_2} ,$$

где $W_{\text{п}_i}$ – потенциальная энергия системы в начальной (1) и конечной (2) конфигурациях системы.

Потенциальная энергия:

а) **упругодеформированной пружины**

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2}k\Delta x^2,$$

где k – жесткость пружины;

Δx – абсолютная деформация пружины;

б) **гравитационного взаимодействия**

$$W_{\text{п}} = -\frac{Gm_1m_2}{r},$$

где G – гравитационная постоянная;

m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел;

r – расстояние между телами (тела рассматриваются как материальные точки);

в) **тела, находящегося в однородном поле силы тяжести**

$$W_{\text{п}} = mgh,$$

где g – ускорение свободного падения;

h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой (формула справедлива при условии $h << R$, где R – радиус Земли).

Связь вектора силы $\vec{F}$, действующей в точке с координатами (x, y, z) потенциального силового поля, с потенциальной энергий $W_{\text{п}}(x, y, z)$

$$\vec{F} = -\text{grad}W_{\text{п}}(x, y, z) =$$
$$= -\left(\frac{\partial W_{\text{п}}(x, y, z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_{\text{п}}(x, y, z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_{\text{п}}(x, y, z)}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Закон сохранения полной механической энергии: полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, с течением времени не изменяется

$$W = W_{п} + W_{к} = \text{const}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. На горизонтальных рельсах стоит платформа с песком общей массой $m_1 = 5{,}0 \cdot 10^3$ кг. В песок попадает снаряд массой $m_2 = 5{,}0$ кг. В момент попадания скорость снаряда $v_1 = 4{,}0 \cdot 10^2$ м/с. Направление скорости снаряда сверху вниз под углом $\alpha = 37°$ к горизонту (рис. 4.1, а). Найти модуль скорости платформы в направлении *OX*, если снаряд застревает в песке.

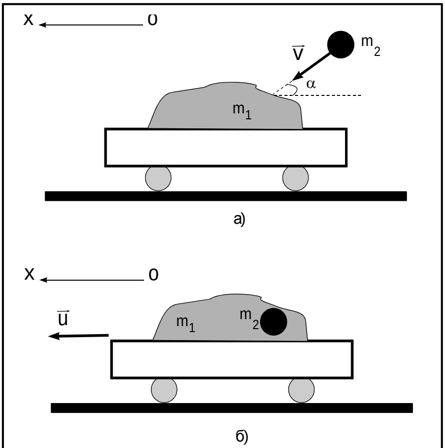

Рис. 4.1

Дано:
$m_1 = 5{,}0 \cdot 10^3$ кг;
$m_2 = 5{,}0$ кг;
$v_1 = 4{,}0 \cdot 10^2$ м/с;
$\alpha = 37°$

Найти: u

Решение. На систему «платформа-снаряд» действуют следующие внешние силы: сила тяжести, сила нормальной реакции рельсов, сила трения. Учитывая, что силы тяжести и сила реакции рельсов действуют только в вертикальном направлении, и, считая силу трения пренебрежимо малой, можно заключить, что проекция вектора импульса системы на горизонтальное направление остается постоянной. Тогда по закону сохранения импульса для неупругого взаимодействия в направлении оси *OX* имеем

$$m_2 v_1 \cos\alpha = (m_1+m_2)u,$$

где u – скорость платформы с песком после попадания в нее снаряда (рис. 4.1, б).

Отсюда

$$u = \frac{m_2 v_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2};$$

$$u = \frac{5{,}0 \cdot 4{,}0 \cdot 10^2 \cos 37^\circ}{5{,}0 \cdot 10^3 + 5{,}0} = 0{,}32 \text{м/с}.$$

Ответ. u = **0,32 м/с.**

Задача 2. Тело массой m_1 = 1,0 кг ударяется о неподвижное тело массой m_2 = 4,0 кг. Считая удар центральным и абсолютно упругим, найти, какую долю кинетической энергии передает первое тело второму при ударе.

Дано:
m_1 = 1,0 кг;
m_2 = 4,0 кг

Найти: $\frac{W_{к2}}{W_{к1}}$

Решение. Закон сохранения энергии для абсолютно упругого удара тел (рис. 4.2) будет иметь вид

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

где v_1, v_2, u_1, u_2 – скорости тел соответственно до и после удара.

Так как удар центральный и абсолютно упругий, выполняется закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2.$$

Кинетическая энергия второго тела до удара была равна нулю. По сле удара изменение энергии второго тела $\Delta W_{к2} = W_{к2}$, где $W_{к2}$ – кинетическая энергия второго тела после удара.

Так как $v_2 = 0$, то

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \qquad (4.1)$$

Закон сохранения импульса в проекции на ось *OX*, параллельную скорости движения первого тела, запишем так:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \qquad (4.2)$$

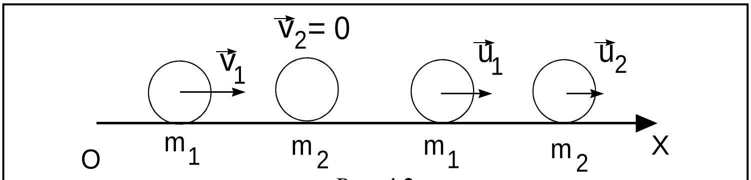

Рис. 4.2

Решая систему уравнений (4.1), (4.2), найдем

$$u_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Кинетическая энергия второго тела после удара

$$W_{к2} = \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{2 m_2 m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Определим часть энергии, которую передаст первое тело при ударе:

$$\frac{W_{к2}}{W_{к1}} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2};$$

$$\frac{W_{к2}}{W_{к1}} = \frac{4 \cdot 1{,}0 \cdot 4{,}0}{(1{,}0 + 4{,}0\ )^2} = 0{,}6\,.$$

Ответ. $\dfrac{W_{к2}}{W_{к1}} = 0{,}6\,.$

Задача 3. Тело массой 1,0 кг под действием силы движется прямолинейно. Зависимость модуля перемещения тела от времени задана уравнением $r = 2t^2 + 4t + 1$ (м). Определить работу силы за 10 с от начала ее действия и зависимость кинетической энергии от времени.

Дано:
m = 1,0 кг;
$r = 2t^2 + 4t + 1$;
Δt = 10 с

Найти: A; $W_к$

Решение. Работа, совершаемая силой:

$$A = \int F dr\,. \qquad (4.3)$$

По второму закону Ньютона сила, действующая на тело:

$$F = ma,$$

или $$F = m\frac{d^2 r}{dt^2}\,. \qquad (4.4)$$

Мгновенное ускорение определяется первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени. В соответствии с этим

$$v = \frac{dr}{dt} = 4t + 4\,; \qquad (4.5)$$

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = 4 \text{ м/с}^2\,. \qquad (4.6)$$

Тогда из (4.4) и (4.6) имеем

$$F = m\frac{d^2r}{dt^2} = 4m. \qquad (4.7)$$

Из выражения (4.5) находим

$$dr = (4t + 4)dt. \qquad (4.8)$$

Подставив (4.7) и (4.8) в (4.3) вычисления *A*, получим

$$A = \int 4m(4t + 4)dt.$$

По этой формуле вычислим работу, совершаемую силой за 10 с с начала ее действия:

$$A = \int_0^{10} (16mt + 16m)dt = m\left[\frac{16t^2}{2} + 16t\right]_0^{10}.$$

$$A = 1{,}0 \cdot (8 \cdot 100 + 16 \cdot 10) = 960 \text{ Дж}.$$

Кинетическая энергия тела

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (4.9)$$

Подставляя (4.3) в формулу (4.9), имеем

$$W_к = \frac{m\,(4t + 4)^2}{2} = m\,(8t^2 + 16t + 8).$$

Ответ. ***A*** = 960 **Дж;** $W_к = m\,(8t^2 + 16t + 8)$.

З а д а ч и

4 балла

4.1 С какими свойствами пространства и времени связаны законы сохранения энергии и импульса?

4.2 Частица под действием силы F = 2 Н совершила перемещение r = 10 м. Вектор силы и вектор перемещения направлены друг по отношению к другу под углом 60°. Найти работу силы F.
Ответ. A **= 10 Дж**.

4.3 Тело движется вдоль оси OX под действием силы $F =$ $= x + 3$ (Н). Какую работу совершила сила при перемещении тела из положения с координатой x_1 = 0 м в положение с координатой x_2 = 4 м.
Ответ. A **= 20 Дж**.

4.4 Тело массой 1 кг под действием силы изменило скорость от 10 м/с до 20 м/с. Найти совершенную силой работу.
Ответ. A **= 150 Дж**.

4.5 Тело массой 1 кг брошено под углом 60° к горизонту со скоростью 10 м/с. Чему равна кинетическая энергия тела в верхней точке траектории?
Ответ. $W_к$ **= 12,5 Дж**.

4.6 При каком условии силовое поле можно считать потенциальным?

4.7 Потенциальная энергия частицы в силовом поле имеет вид $W_п = 3x$ (Дж), где x – координата тела при перемещении его вдоль оси OX. Найти проекцию силы на ось OX, действующую на тело со стороны поля.
Ответ. F_x **= −3 Н**.

4.8 Два тела движутся по двум взаимно перпендикулярным направлениям вдоль осей OX и OY. Импульсы тел равны

$\vec{p}_1 = 3\vec{i}$ (кг·м)/с, $\vec{p}_2 = 4\vec{j}$ (кг·м)/с. Чему равен модуль суммарного импульса частиц?
Ответ. p **= 5 (кг· м)/с**.

4.9 За время 60 с двигатель совершил работу равную 120 Дж. Чему равна мощность двигателя?
Ответ. P **= 2 Вт**.

4.10 Кинетическая энергия тела, движущегося вдоль оси OX, равна 20 Дж. При ударе о стенку 10 % кинетической энергии превратилось в тепло. Найти кинетическую энергию тела после удара.
Ответ. $W_к = 18$ **Дж**.

5–6 баллов

4.11 Насос мощностью N используют для откачки нефти с глубины h. Определите массу жидкости, поднятой за время t, если КПД насоса η.
Ответ. $m = \dfrac{\eta N t}{gh}$.

4.12 Граната, летящая со скоростью 10,0 м/с, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составляет 60 % массы всей гранаты, продолжал двигаться со скоростью 25,0 м/с. Найти проекцию скорости меньшего осколка на направление движения гранаты.
Ответ. $v'_{1x} = -12{,}5$ **м/с.**

4.13 Тело соскальзывает без наличия начальной скорости по гладкой наклонной плоскости длиной $S_1 = 90$ см, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние $S_2 = 40$ см, останавливается. Найдите коэффициент трения μ на горизонтальном участке пути движения тела.
Ответ. $\mu = 1{,}1$.

4.14 Человек массой 60 кг, бегущий со скоростью 8 км/ч, догоняет тележку массой 80 кг, движущуюся со скоростью 2,9 км/ч, и вскакивает на неё. Найти: 1) с какой скоростью будет двигаться тележка? 2) с какой скоростью будет двигаться тележка, если человек бежал ей навстречу?
Ответ. v_1 = 1,4 **м/с**; v_2 = 0,5 **м/с**.

4.15 Снаряд массой 100 кг, летящий горизонтально вдоль железнодорожного пути со скорость 500 м/с, попадает в вагон с песком массой 10 т и застревает в нём. Какую скорость получит вагон, если: 1) вагон стоял неподвижно; 2) вагон двигался со скоростью 36 км/ч в том же направлении, что и снаряд; 3) вагон двигался со скоростью 36 км/ч в направлении, противоположном движению снаряда?
Ответ. v_1 **= 5 м/с;** v_2 = 15 **м/с;** v_3 **= –5 м/с.**

4.16 Тело массой 1 кг, движущееся горизонтально со скоростью 1,0 м/с, встречает второе тело массой 0,5 кг и неупруго сталкивается с ним. Какую скорость получит тело, если: 1) второе тело было неподвижно; 2) второе тело двигалось со скоростью 0,5 м/с в том же направлении, что и первое тело; 3) второе тело двигалось со скоростью 0,5 м/с в направлении, противоположном направлению движения первого тела.
Ответ. v_1 = 0,7 **м/с;** v_2 = 0,8 **м/с;** v_3 = **0,5 м/с.**

4.17 Пружина жёсткостью k = 500 Н/м сжата силой $1{,}0 \cdot 10^2$ Н. Определите работу A внешней силы, дополнительно сжимающей пружину ещё на Δx = 2,0 см.
Ответ. A = 2,1 **Дж.**

4.18 Из пружинного пистолета с пружиной жёсткостью k = = 150 Н/м был произведён выстрел пулей массой m = 8,0 г. Определить скорость v пули при вылете её из пистолета, если пружина была сжата на Δx = 4 см.
Ответ. v = 5,5 **м/с.**

4.19 Налетев на пружинный буфер, вагон массой 16 т, двигавшийся со скоростью 0,6 м/с, остановился, сжав пружину на Δx = 8,0 см. Найти общую жёсткость k пружины буфера.
Ответ. k **= 900 кН/м.**

4.20 Какую нужно совершить работу A, чтоб пружину жёсткостью k = 800 Н/м, сжатую на Δx_1 = 6,0 см, дополнительно сжать на Δx_2 = 8,0 см?
Ответ. A **= 6,4 Дж.**

4.21 Конькобежец массой 70,0 кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой 3,0 кг со скорость 8,0 м/с. Найти расстояние, на которое откатится при этом конькобежец, если известно, что коэффициент трения коньков о лёд 0,02.
Ответ. S **= 0,3 м.**

4.22 Определить работу растяжения двух соединенных последовательно пружин жёсткостями k_1 = 400 Н/м и k_2 = 400 Н/м, если первая пружина при этом растянулась на Δx = 2,0 см.
Ответ. A = 0,16 **Дж.**

4.23 Две пружины жёсткостью k_1 = 0,5 кН/м и k_2 = 1,0 кН/м скреплены параллельно. Определить потенциальную энергию W данной системы при абсолютной деформации 4,0 см.
Ответ. W **= 1,2 Дж.**

4.24 Определить работу растяжения двух соединённых последовательно пружин, жесткость которых k_1 = 400 Н/м и k_2 = = 250 Н/м, если первая пружина при этом растянулась на Δx = 2,0 см.
Ответ. A **= 208 мДж.**

7–8 баллов

4.25 Материальная точка массой m = 3,0 кг движется прямолинейно под действием силы так, что координата точки со временем изменяется по закону $x = 5 + 8t + 2t^2$ (м). Какая работа A совершается за первые 4 с? Какая мощность P развивается при движении точки в момент t = 2с?
Ответ. A **= 768 Дж;** P **= 192 Вт.**

4.26 Материальная точка массой m = 1,0 кг под действием консервативной силы переместилась из точки с координатой x_1 = 1,0 м в точку с координатой x_2 = 1,5 м. Составляющая

силы F_x вдоль оси OX изменяется в зависимости от координаты x по закону $F_x = 1{,}5\dfrac{m}{x^2} + 4x$ (Н). Найти работу, производимую силой, по перемещению материальной точки.
Ответ. A **= 3 Дж.**

4.27 Потенциальная энергия частицы в силовом поле изменяется по закону $W_п = -x^2 + 2{,}0y^2 - 4{,}0$ (Дж). Найти работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе из точки с координатами (6,0; 2,5; 0) в точку с координатами (4,0; 2,0; 0). Найти выражение для силы, действующей на частицу, и модули этой силы в начальной и конечной точках.
Ответ. A = –15,5 **Дж;** $\vec{F} = 2x\vec{i} - 4y\vec{j}$; F_1 **= 15,6 Н;** F_2 **= 11,3 Н**.

4.28 Потенциальная энергия частицы в силовом поле изменяется по закону $W_п = x^2 + 1{,}2y - \dfrac{2{,}0}{z}$ (Дж). Найти работу, совершаемую над частицей силами поля при переходе из точки с координатами (1,2; 0,8; 1,5) в точку с координатами (1,0; 1,2; 1,4). Найти модули силы, действующей на частицу, в начальной и конечной точках.
Ответ. $A = 5{,}5 \cdot 10^{-2}$ **Дж;** F_1 **= 2,8 Н;** F_2 = 2,6 **Н.**

4.29 Шар массой m_1 = 3,0 кг движется со скорость v_1 = 2,0 м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой m_2 = 5,0 кг. Какая работа будет совершена при деформации шаров? Удар считать абсолютно неупругим, центральным.
Ответ. A = 3,8 **Дж.**

4.30 Из орудия, не имеющего противооткатного устройства, производилась стрельба в горизонтальном направлении. Когда орудие было неподвижно закреплено, снаряд вылетел со скорость v_1 = 600 м/с, а когда орудию дали возможность свободно откатываться назад, снаряд вылетел со скорость v_2 = 580 м/с. С какой скорость откатилось при этом орудие?
Ответ. v **= 40 м/с.**

4.31 Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скорость v_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Какую долю своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Ответ. $\frac{W_2}{W_1} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$.

4.32 Из шахты глубиной h = 600 м поднимают клеть массой m_1 = 3,0 т на канате, каждый метр которого имеет массу m = 1,5 кг. Какая работа A совершается при поднятии клети на поверхность земли? Каков КПД подъёмного устройства?
Ответ. $A = 2{,}07 \cdot 10^7$ **Дж;** $\eta = 0{,}87$.

4.33 Если на верхний конец вертикально расположенной спиральной пружины положить груз, пружина сожмётся на Δx_0 = 3 мм. На сколько сожмёт пружину тот же груз, упавший на конец пружины с высоты h = 8,0 см?
Ответ. $\Delta x = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ **м.**

4.34 Тело массой m = 2,5 кг движется вниз по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^o$ с горизонтом. На отрезке пути S = 0,5 м на него действует постоянная сила F в направлении движения. Изменение кинетической энергии тела на этом отрезке пути $\Delta W_к$ = 9,98 Дж, коэффициент трения μ = 0,07. Найти модуль силы, действующей на тело.
Ответ. F **= 9,2 Н.**

4.35 Два движущихся друг за другом тела ударяются неупруго. Скорость первого тела до удара v_1 = 2,0 м/с, скорость второго тела v_2 = 3,6 м/с. Общая скорость тел после удара равна v. Кинетическая энергия первого тела до удара была меньше кинетической энергии второго тела в n = 0,679 раз. Найти модуль скорости v тел после удара.
Ответ. v = **2,6 м/с.**

4.36 Снаряд, выпущенный со скоростью v_0 = 100,0 м/с под углом $\alpha = 45^o$ к горизонту, разорвался в верхней точке траектории на два одинаковых осколка. Один осколок упал на землю под местом разрыва снаряда со скоростью v_1 = 97,0 м/с. С какой скоростью упал на землю второй осколок? Сопротивления воздуха нет.

Ответ. $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 4v_0^2\cos^2\alpha} = 171{,}0$ **м/с.**

9–10 баллов

4.37 Между двумя шариками с массами m_1 и m_2 находится сжатая пружина. Если один из шариков (например, массой m_2) удерживать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью v_0. С какой скоростью будет двигаться шарик массой m_1, если оба шарика освободить одновременно? Деформации пружины в обоих случаях одинаковы.

Ответ. $v_1 = v_0\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1+m_2}}$.

4.38 По небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне массой m_1 = 300 кг, ударяет молот массой m_2 = 8 кг. Определить КПД η удара, если удар неупругий. Полезной считать энергию, затраченную на деформацию куска железа.
Ответ. η = 0,97.

4.39 Молот массой m = 5,0 кг, двигаясь со скоростью v = 4,0 м/с, ударяет по железному изделию, лежащему на наковальне. Масса наковальни с изделием M = 95 кг. Считая удар абсолютно неупругим, определить энергию, расходуемую на ковку (деформацию) изделия. Чему равен КПД процесса ковки при данных условиях?
Ответ. A = 38 **Дж;** η = 0,95.

4.40 Статический прогиб сетки под действием силы тяжести спортсмена x_0 = 15 см. Спортсмен с высоты h = 12 м падает на упругую сетку. Пренебрегая массой сетки, определить, во сколько раз наибольшая сила давления спортсмена на сетку больше его силы тяжести.
Ответ. В 14 раз.

4.41 Шайба 1, скользящая по шероховатой горизонтальной поверхности, испытала соударение с покоившейся шайбой 2. После столкновения шайба 1 отскочила под прямым углом к направлению своего первоначального движения и прошла до остановки путь S_1 = 1,5 м, а шайба 2 – путь S_2 = 4 м. Найти скорость шайбы 1 непосредственно перед столкновением, если её масса в η = 1,5 раза меньше массы шайбы 2, а коэффициент трения μ = 0,17.

Ответ. $v = \sqrt{2\mu g(\eta^2 S_2 - S_1)} = 5{,}0$ **м/с**.

4.42 Сначала тело поднимают из шахты глубиной $h_1 = R/2$, где R – радиус Земли, на поверхность Земли, а затем ещё на высоту $h_2 = h_1$ от поверхности Земли. В каком случае работа по подъёму тела больше?
Ответ. $A_1 > A_2$.

4.43 Потенциальная энергия частицы в центральном силовом поле задана как функция расстояния r от центра поля до некоторой точки: $W(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}$, где $A = 6 \cdot 10^{-6}$ Дж·м^2; $B = 3 \cdot 10^{-4}$ Дж·м^2. Определить, при каких значениях r потенциальная энергия и сила, действующая на частицу, имеют экстремальное значение. Какую минимальную скорость надо сообщить частице массой 0,2 г, находящейся в положении равновесия, чтобы она могла удалиться от центра поля на расстояние R = 10 см, или выйти за пределы действия поля.

Ответ. Потенциальная энергия и сила имеют экстремальные (минимальные) значения при r равном 0,04 м и 0,06 м, соответственно. Для перехода частицы в точку, находящуюся на расстоянии $r = R$ = 0,10 м минимальная скорость частицы должна составлять 3,7 м/с, а для перехода частицы на бесконечность – 6,2 м/с.

5. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Краткие теоретические сведения

Момент импульса материальной точки относительно центра вращения

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, m\vec{v}\right],$$

где $m\vec{v}$ – вектор импульса точки;

$\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Момент инерции материальной точки относительно оси вращения

$$I = mR^2,$$

где m – масса точки;

R – расстояние точки до оси вращения.

Момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции материальных точек, составляющих это тело,

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 .$$

Моменты инерции некоторых однородных тел вращения относительно их геометрических осей вращения:

- **тонкостенный цилиндр** $I = mR^2$;
- **сплошной цилиндр** $I = \dfrac{mR^2}{2}$;
- **шар** $I = \dfrac{2mR^2}{5}$.

Момент инерции **однородного тонкого стержня** длиной l относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно его длине,

$$I = \frac{ml^2}{12}.$$

Теорема Штейнера. Момент инерции I тела относительно любой оси вращения и момент инерции I_0 тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, связаны соотношением

$$I = I_0 + md^2,$$

где m – масса тела;

d – расстояние между осями.

Вектор момента импульса твердого тела относительно центра вращения равен произведению момента инерции тела на вектор его угловой скорости:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Момент импульса системы тел есть векторная сумма моментов импульсов всех тел системы:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum I_i \vec{\omega}_i .$$

Закон сохранения момента импульса относительно точки *O*: если вектор результирующего момента внешних сил, приложенных к системе, равен нулю ($\vec{M} = 0$), то вектор момента импульса системы есть величина постоянная, т.е.

$$\vec{L} = \text{const}.$$

Проекция на ось Z момента импульса тела, вращающегося относительно неподвижной оси Z:

$$L_z = I_z \omega,$$

где ω – угловая скорость тела.

Закон сохранения момента импульса системы тел, вращающихся вокруг неподвижной оси Z:

$$\sum_i I_{zi}\omega_i = \mathrm{const},$$

где I_{zi} – момент инерции i-го тела системы относительно оси вращения Z;

ω_i – угловая скорость вращения i-го тела системы вокруг неподвижной оси Z.

Примеры решения задач

Задача 1. Платформа в виде сплошного диска радиусом R = 1,5 м и массой m_1 = 180 кг вращается вокруг вертикальной оси с частотой n = 10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой m_2 = 60 кг. Какую линейную скорость v относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы? Человека рассматривать как материальную точку.

Дано:
R = 1,5 м;
m_1 = 180 кг;
n = 10 мин$^{-1}$ = 1/6 с$^{-1}$;
m_2 = 60 кг

Найти: v

Решение. Согласно условию задачи, момент внешних сил относительно оси вращения Z, совпадающей с геометрической осью платформы, можно считать равным нулю. При этом условии проекция L_z момента импульса системы платформа – человек остается постоянной:

$$L_z = I_z\omega = \mathrm{const}, \tag{5.1}$$

где I_z – момент инерции платформы с человеком относительно оси Z;

ω – угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы. Поэтому в начальном состоянии

$$I_z = I_1 + I_2,$$

а в конечном состоянии

$$I'_z = I'_1 + I'_2.$$

С учетом этого равенство (5.1) примет вид

$$\left(I_1 + I_2\right)\omega = \left(I'_1 + I'_2\right)\omega', \tag{5.2}$$

где значения моментов инерции I_1 и I_2 платформы и человека соответственно относятся к начальному состоянию системы, I'_1 и I'_2 – к конечному.

Момент инерции платформы относительно оси Z при переходе человека не изменяется:

$$I_1 = I'_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2.$$

Момент инерции человека относительно той же оси будет изменяться. Если рассматривать человека как материальную точку, его момент инерции I_2 в начальном состоянии можно считать равным нулю. В конечном состоянии момент инерции человека:

$$I'_2 = m_2 R^2.$$

Подставим в формулу (5.2) выражения моментов инерции, начальной угловой скорости вращения платформы с человеком ($\omega = 2\pi n$) и конечной угловой скорости ($\omega' = {}^{v}\!/_{R}$, где v – скорость человека относительно пола)

$$\left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + 0\right) 2\pi n = \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2\right) \cdot \frac{v}{R}.$$

Откуда

$$v = \frac{2\pi n R m_1}{(m_1 + 2m_2)},$$

$$v = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}5 \cdot 180}{180 + 2 \cdot 60} = 1{,}0 \text{ м/с}.$$

Ответ. v = 1,0 **м/с.**

Задача 2. Деревянный стержень массой $M = 6{,}0$ кг и длиной $l = 2{,}0$ может свободно вращаться в вертикальной плоскости, относительно оси проходящей через точку О, и перпендикулярной плоскости рис. 5.1. В нижний конец неподвижного стержня попадает пуля массой m = 0,01 кг, летевшая со скоростью $v_0 = 10^3$ м/с, и застревает в нем. Скорость пули направлена перпендикулярно стрежню и оси. Определить угловую скорость стержня в момент удара. Моментом инерции пули пренебречь

Дано:
$M = 6{,}0$ кг;
$l = 2{,}0$ м;
m = 0,01 кг;
$v_0 = 10^3$ м/с

Найти: ω

Решение. Для решения задачи применим закон сохранения момента импульса. Свяжем систему отсчета с Землей, ось OX направим по оси вращения: через точку O перпендикулярно плоскости рис. 5.1. Момент импульса пули относительно оси вращения до удара

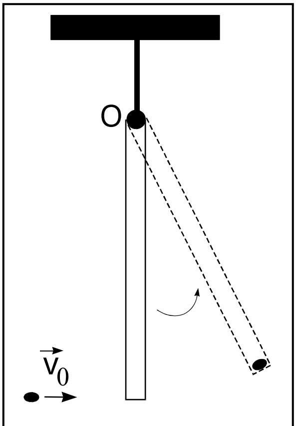

Рис. 5.1

$$L_п = m v_0 l.$$

Момент импульса стрежня равен нулю, так как до попадания пули он неподвижен.

После удара момент импульса стержня

$$L_{ст} = I\omega,$$

где $I = \frac{1}{3}Ml^2$ – момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через точку O (определяется по теореме Штейнера);

ω – угловая скорость стержня после удара.

По закону сохранения момента импульса полный момент импульса системы до попадания пули в стержень и после ее опадания должен сохраняться, поэтому

$$mv_0 l = I\omega.$$

Отсюда найдем угловую скорость стержня ω

$$\omega = \frac{mv_0 l}{I} = \frac{3mv_0}{Ml} = \frac{3 \cdot 0{,}01 \cdot 10^3}{6{,}0 \cdot 2{,}0} = 2{,}5 \text{ рад/с}.$$

Ответ. $\omega = 2{,}5$ **рад/с.**

З а д а ч и

4 балла

5.1 Тело вращается с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. Момент инерции тела $I = 24$ кг·м^2. Чему равен момент импульса?
Ответ. $L = 48$ **(кг·м^2)/с.**

5.2 Материальная точка массы $m = 1{,}0$ кг движется по окружности радиуса $R = 0{,}5$ м со скоростью $v = 2{,}0$ м/с. Чему равен момент импульса материальной точки?
Ответ. $L = 1{,}0$ **(кг·м^2)/с.**

5.3 Две материальные точки массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг движутся по окружностям радиусами $R_1 = 1$ м и $R_2 = 2$ м со скоростями $v_1 = 2$ м/с и $v_2 = 4$ м/с. Чему равен полный момент импульса точек?
Ответ. $L = 18$ **(кг·м^2)/с.**

5.4 Чему равен момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его середину?

5.5 Момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, равен 25 кг·м^2. Ось вращения параллельна оси, проходящей через центр масс, и расположена на расстоянии 1 м от нее. Чему равен момент инерции тела относительно оси вращения, если масса тела m = 10 кг.
Ответ. I = 35 **кг·м^2.**

5.6 Система состоит из материальной точки, которая движется по окружности радиуса R_1 = 2 м со скоростью v_1 = 5 м/с. Если система остается замкнутой, а радиус движения точки под действием поля центральных сил станет R_2 = 1 м, с какой скоростью будет двигаться точка?
Ответ. v_2 = 10 **м/с.**

5.7 Материальная точка движется относительно центра вращения O со скоростью v = 2 м/с. Чему равен момент импульса точки, если расстояние $|\vec{r}|$ между точкой и центром вращения равно 5 м, угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и скоростью $\vec{v}$ равен 30°, а масса точки 3 кг?
Ответ. L = 15 **(кг·м^2)/с.**

5.8 Чему равен момент инерции материальной точки массой m = 5 кг относительно оси вращения, находящейся на расстоянии 2 м от нее?
Ответ. I = 20 **кг·м^2.**

5.9 Момент импульса материальной точки 200 (кг·м^2)/с, угловая скорость ее вращения ω = 4 рад/с. Чему равен момент инерции точки относительно оси вращения?
Ответ. I = 50 **кг·м^2.**

5.10 Определить момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр, если радиус диска R = 5 м, а его масса m = 2 кг?
Ответ. I = 25 **кг·м^2.**

5–6 баллов

5.11 Материальная точка массой m = 200 г движется по окружности. Момент инерции материальной точки относительно оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно к плоскости, в которой движется точка $I = 4{,}05\cdot 10^{-2}$ кг·м^2, момент импульса относительно той же оси L = 0,324 кг·м^2/с. Найти радиус окружности, линейную и угловую скорости точки.
Ответ. r = 0,**45 м;** v = 3,6 **м/с; ω** = 8,0 **рад/с**.

5.12 Материальная точка массой m = 120 г движется по окружности со скоростью v = 1,82 м/с. Момент импульса материальной точки относительно оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно к плоскости, в которой движется точка, равен $L = 3{,}058\cdot 10^{-2}$ кг·м^2/с. Найти радиус окружности, угловую скорость движения точки, момент инерции точки относительно той же оси.
Ответ. r = 0,140 **м; ω** = 13,0 **рад/с;** $I = 2{,}350\cdot 10^{-3}$ **кг·м**^{2}.

5.13 Деревянный стержень массой M = 6 кг и длиной 1 м может вращаться в вертикальной плоскости относительно оси, проходящей через точку O (см. рис. 5.1). В нижний конец стержня попадает пуля массой m = 0,01 кг, летевшая со скоростью $v_0 = 1{,}0\cdot 10^3$ м/с, и застревает в нем. Скорость пули направлена перпендикулярно стрежню и оси. Определить кинетическую энергию стержня после удара. Моментом инерции пули пренебречь.
Ответ. $W_к$ = 25,0 **Дж**.

7–8 баллов

5.14 Вывести формулу для момента инерции тонкого кольца радиусом R и массой m относительно оси симметрии.
Ответ. $I = mR^2$.

5.15 Получить формулу для моментов инерции тонкого стержня массой m и длиной l относительно осей: 1) оси, проходящей через центр масс перпендикулярно его длине; 2) оси, проходящей через край стержня.

Ответ. 1) $I = \frac{1}{12} ml^2$; 2) $I = \frac{1}{3} ml^2$.

5.16 На краю платформы в виде диска, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой n_1 = 8 мин$^{-1}$, стоит человек массой m_1 = 70 кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой n_2 = 10 мин$^{-1}$. Определить массу m_2 платформы. Момент инерции человека рассчитывать, как для материальной точки.

Ответ. m_2 = **560 кг.**

5.17 Горизонтальная платформа массой m_1 = 150 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой n = 8 мин$^{-1}$. Человек массой m_2 = 70 кг стоит при этом на краю платформы. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу круглым однородным диском, а человека – материальной точкой.

Ответ. ω_2 = 1,62 **рад/с.**

5.18 Платформа в виде диска диаметром D = 3,0 м и массой m_1 = 180 кг может вращаться вокруг вертикальной оси. С какой угловой скоростью ω_1 будет вращаться платформа, если по ее краю пройдет человек массой m_2 = 70 кг со скоростью v = 1,8 м/с относительно платформы?

Ответ. ω_1 = 0,525 **рад/с.**

9–10 баллов

5.19 Получить формулу для момента инерции сплошного шара радиусом R и массой m относительно оси, проходящей через центр шара.

Ответ. $I = \frac{2}{5} mR^2$.

5.20 На скамье Жуковского сидит человек и держит на вытянутых руках гири массой $m = 5$ кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси скамьи $l = 70$ см. Скамья вращается с частотой $n_1 = 1$ с$^{-1}$. Какой станет частота вращения скамьи и какую работу A произведет человек, если он сожмет руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до $l_2 = 20$ см? Суммарный момент инерции человека и скамьи Жуковского относительно оси $I = 2{,}5$ кг·м^2.

Ответ. $n_2 = 2{,}55$ с$^{-1}$; A = **226,7 Дж.**

5.21 На скамье Жуковского сидит человек и держит в руках стержень вертикально и параллельно оси скамьи. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 4{,}0$ рад/с. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться скамья с человеком, если повернуть стержень так, чтобы он занял горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи $I = 5{,}0$ кг·м^2. Длина стержня $l = 1{,}8$ м; масса $m = 6{,}0$ кг. Считать, что центр масс стержня с человеком находится на оси платформы.

Ответ. ω_2 **= 3,0 рад/с.**

5.22 На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром $D = 0{,}8$ м и массой $m_1 = 6{,}0$ кг стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него мяч массой $m = 0{,}5$ кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии $r = 0{,}4$ м от оси скамьи. Скорость мяча $v = 5{,}0$ м/с.

Ответ. $\omega = 9{,}8 \cdot 10^{-2}$ **рад/с.**

6. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Краткие теоретические сведения

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Z:

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad \text{или} \quad W_{\text{к}} = \frac{L_z^2}{2I_z}.$$

При повороте тела относительно оси Z на угол $d\varphi$ совершается **элементарная работа**

$$\delta A = M_z d\varphi.$$

Момент силы F относительно центра вращения

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра вращения в точку приложения силы.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно оси вращения

$$I_z \vec{\varepsilon} = \sum_i \vec{M}_i; \quad I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_i M_{zi},$$

где $\sum\limits_i \vec{M}_i$ – вектор результирующего момента всех внешних сил, приложенных к телу;

$\vec{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения;

I_z – момент инерции относительно оси вращения Z;

$\sum_i M_{zi}$ – результирующий момент внешних сил, действующих на тело, относительно оси Z.

Примеры решения задач

Задача 1. Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу m = 80 г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1 = 100 г и m_2 = 200 г. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе. Трением и массой нити пренебречь.

Дано:
m = 80 г = 0,08 кг;
m_1 = 100 г = 0,1 кг;
m_2 = 200 г = 0,2 кг;
g = 9,8 м/с^2

Найти: a

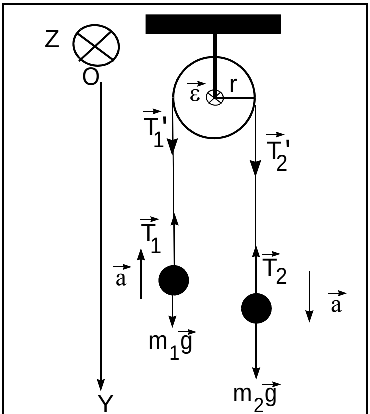

Рис. 6.1

Решение. Силы, действующие на каждый груз и на блок, изображены на рис. 6.1. Направим ось OY вертикально вниз и напишем для каждого груза уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на эту ось. Для первого груза

$$m_1 g - T_1 = -m_1 a; \quad T_1 = m_1 g + m_1 a; \tag{6.1}$$

для второго груза

$$m_2 g - T_2 = m_2 a; \quad T_2 = m_2 g - m_2 a. \tag{6.2}$$

Под действием моментов сил T_1' и T_2' относительно оси Z, перпендикулярной плоскости чертежа и направленной за чертеж, блок приобретает угловое ускорение ε. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения, имеем

$$T_2'r - T_1'r = I_z\varepsilon, \tag{6.3}$$

где $\varepsilon = \dfrac{a}{r}$; $I_z = \dfrac{1}{2}mr^2$ – момент инерции блока относительно оси Z.

Согласно третьему закону Ньютона, с учетом невесомости нити, имеем $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$; $\vec{T}_2' = -\vec{T}_2$. Воспользовавшись этим, подставим в уравнение (6.3) вместо T_1' и T_2' выражения для T_1 и T_2 из (6.1) и (6.2):

$$(m_2g - m_2a)\,r - (m_1g + m_1a)\,r = \frac{mr^2a}{2r}.$$

Откуда

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m/2}\,g. \tag{6.4}$$

После подстановки числовых значений в формулу (6.4) получим

$$a = \frac{(0{,}2 - 0{,}1)}{\left(0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}08/2\right)} \cdot 9{,}8 = 2{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Ответ. $a = 2{,}9$ **м/с**^{2}.

Задача 2. Сплошной цилиндр массой 0,5 кг и радиусом 0,02 м вращается под действием тормозящего момента M относительно оси, совпадающей с осью цилиндра, по закону

$\varphi = 12{,}0 + 8{,}0t - 0{,}5t^2$ (рад). Определить тормозящий момент *M* и величину силы, создающей момент *M*.

Дано:
m = 0,5 кг;
r = 0,02 м;
$\varphi = 12{,}0 + 8{,}0t - 0{,}5t^2$ рад

Найти: $F; M$

Решение. Угловое ускорение определяется как вторая производная от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

или

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt},$$

где $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ – угловая скорость.

Следовательно,

$$\omega = 8{,}0 - t.$$

Тогда $\varepsilon = -1$ рад/с^2.

Момент силы относительно оси вращения

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad \text{или} \quad M = Fr\sin\alpha.$$

Сила действует касательно к поверхности, поэтому $\sin\alpha = 1$. Тогда $M = Fr$, откуда

$$F = \frac{M}{r}.$$

Тормозящий момент можно определить из основного уравнения динамики вращательного движения

$$M = I\varepsilon,$$

где I – момент инерции цилиндра относительно оси вращения.

В данном случае ось вращения совпадает с осью цилиндра, поэтому

$$I = \frac{1}{2} mr^2 .$$

Тогда

$$M = \frac{1}{2} mr^2 \varepsilon ;$$

$$M = \frac{1}{2} 0{,}5 \cdot (0{,}02)^2 \cdot (-1) = -1{,}0 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} .$$

Знак минус у момента M означает, что он оказывает тормозящее действие.

Модуль силы F, действующей на цилиндр:

$$F = \frac{|M|}{r} ;$$

$$F = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-4}}{0{,}20} = 5{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ Н} .$$

Ответ. $F = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ **Н** ; $M = -1{,}0 \cdot 10^{-4}$ **Н · м**.

Задача 3. Диск массой 2,0 кг, радиусом 10 см вращается с частотой 600 мин $^{-1}$ вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр. Через 20 с под действием постоянного тормозящего момента диск остановился. Считая массу диска равномерно распределенной, найти тормозящий момент и число оборотов, которое сделает диск до полной остановки.

Дано:
m = 2,0 кг;
R = 10 см = 0,01 м;
Δt = 20 с;
n = 600 мин $^{-1}$ = 10 с $^{-1}$

Найти: M; N

Решение. Для определения тормозящего момента M сил, действующих на тело, нужно применить основное уравнение динамики вращательного движения. Запишем его в виде

$$I \Delta \omega = M \Delta t , \qquad (6.5)$$

где I – момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс;

$\Delta\omega$ – изменение угловой скорости за промежуток времени Δt.

По условию задачи

$$\Delta\omega = -\omega_0 ,$$

где ω_0 – начальная угловая скорость, так как конечная угловая скорость $\omega = 0$.

Выразим начальную угловую скорость через частоту вращения диска. Тогда

$$\omega_0 = 2\pi n \quad \text{и} \quad \Delta\omega = -2\pi n .$$

Момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр масс:

$$I = \frac{mR^2}{2},$$

где m – масса диска;

R – радиус диска.

Тогда формула (6.5) примет вид

$$M = \frac{-\pi nmR^2}{\Delta t}, \tag{6.6}$$

$$M = \frac{-3{,}14 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 0{,}01^2}{20} = -3{,}14 \cdot 10^{-4} \ \text{Н} \cdot \text{м} .$$

Знак минус в (6.6) указывает на то, что на диск действует тормозящая сила.

Угол поворота за время вращения диска до остановки может быть определен как

$$\varphi = \omega_0 \Delta t - \frac{\varepsilon \Delta t^2}{2}, \qquad (6.7)$$

где ε – угловое ускорение.

По условию задачи, $\omega = \omega_0 - \varepsilon\Delta t$; $\omega = 0$; $\varepsilon\Delta t = \omega_0$. Тогда из (6.7) следует, что

$$\varphi = \omega_0 \Delta t - \frac{\omega_0 \Delta t}{2} = \frac{\omega_0 \Delta t}{2}.$$

Так как

$$\varphi = 2\pi N; \qquad \omega_0 = 2\pi n,$$

то число полных оборотов

$$N = \frac{n\Delta t}{2};$$

$$N = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100.$$

Ответ. $M = -3{,}1 \cdot 10^{-4}$ **Н·м**; $N = 100$.

З а д а ч и

4 балла

6.1 На тело действует сила F = 10 Н. Найти момент M силы F, если угол между направлением силы и радиус-вектором $\vec{r}$, направленным от центра вращения к центру тяжести тела, равен 30°? Модуль $|\vec{r}|$ = 5 м.

Ответ. M = 25 **Н·м.**

6.2 Тело вращается под действием момента сил M = 30 Н·м. Если момент инерции тела I = 15 кг·м^2, с каким угловым ускорением движется тело?

Ответ. **ε** = 2 **рад/с**^{2}.

6.3 Сила $F = 3$ Н действует на диск по касательной к ободу диска. Радиус диска $R = 2$ м. Чему равен момент силы F? Куда он направлен?
Ответ. $M = 6$ **Н·м.**

6.4 Тело, имеющее момент инерции $I = 5$ кг·м^2 относительно оси, вращается вокруг нее с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Найти кинетическую энергию тела.
Ответ. $W_к = 250$ **Дж.**

6.5 Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть тело относительно оси на угол $\frac{\pi}{2}$, действуя постоянным моментом сил $M = 20{,}0$ Н·м. Моменты сил, противодействующих повороту, не учитывать.
Ответ. $A = 31{,}4$ **Дж.**

6.6 На тело действует два противоположно направленных момента сил, равных по модулю $M_1 = 10$ Н·м, $M_2 = 20$ Н·м. С каким угловым ускорением будет вращаться тело, если его момент инерции равен $I = 10$ кг·м^2?
Ответ. $\varepsilon = 1$ **рад/с**^{2}.

6.7 Тело вращается с угловой скоростью $\omega = 5 + 4t$ (рад/с). Момент инерции тела $I = 20$ кг·м^2. Найти приложенный к этому телу момент сил.
Ответ. $M = 80$ **Н·м.**

6.8 Через блок массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 0{,}5$ м перекинута нить, силы натяжения которой с обеих сторон блока равны $T_1 = 2$ Н, $T_2 = 3$ Н. С каким угловым ускорением вращается блок? Блок считать сплошным диском.
Ответ. $\varepsilon = 0{,}4$ **рад/с**^{2}.

6.9 Колесо радиуса $R = 1$ м и массой $m = 2$ кг катится без проскальзывания со скоростью 10 м/с. Определить кинетическую энергию колеса?
Ответ. $W_к = 150$ **Дж.**

6.10 Может ли кинетическая энергия быть больше, чем $\dfrac{mv^2}{2}$? Почему?

Ответ. Может.

5–6 баллов

6.11 Блок, имеющий форму диска массой $m = 0{,}4$ кг, вращается под действием силы натяжения нити, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 0{,}3$ кг и $m_2 = 0{,}7$ кг. Определить силы натяжения T_1 и T_2 нити по обе стороны блока. Трением и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

Ответ. $\boldsymbol{T_1} = 3{,}9$ **Н;** $\boldsymbol{T_2} = 4{,}6$ **Н.**

6.12 Нить с привязанными к ее концам грузами массами $m_1 = 50{,}0$ г и $m_2 = 60{,}0$ г перекинута через блок диаметром $D = 4{,}0$ см. Определить момент инерции I блока, если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение $\varepsilon = 1{,}5$ рад/с^2. Трением и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

Ответ. $I = 12{,}6 \cdot 10^{-4}$ **кг·м**^{2}.

6.13 Сплошной диск массой 0,2 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс под действием момента сил $M = 0{,}8 \cdot 10^{-2}$ Н·м. Закон вращения имеет вид $\varphi = 5{,}0 - 1{,}0t + 2{,}0t^2$ (рад). Определить радиус диска.

Ответ. $R = 0{,}14$ **м.**

6.14 Колесо, вращаясь равнозамедленно при торможении, уменьшило за 1 мин частоту вращения с 300 до 180 об/мин. Момент инерции колеса $I = 2$ кг·м^2. Найти: 1) угловое ускорение колеса; 2) тормозящий момент; 3) работу сил торможения; 4) число оборотов, сделанных колесом за данную 1 минуту.

Ответ. $\boldsymbol{\varepsilon} = -0{,}21$ **рад/с**^{2}; $\boldsymbol{M} = 0{,}42$ **Н·м;** $\boldsymbol{A} = 631$ **Дж;** $N = 240$.

6.15 Вентилятор вращается со скоростью, соответствующей частоте 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 об. Работа сил торможения A = 44,4 Дж. Найти: 1) момент инерции вентилятора; 2) момент сил торможения.

Ответ. I = **0,01 кг·м^2**; M = 9,4 ·10^{-2} **Н·м.**

6.16 Маховое колесо, имеющее момент инерции I = 245 кг·м^2, равномерно вращается, делая 20 об/с. После того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав 1000 об. Найти: 1) момент сил трения; 2) время, прошедшее от момента прекращения действия вращающегося момента до остановки колеса.

Ответ. $M_{тр}$ = **308 Н·м;** t = 100 с.

6.17 Маховое колесо начинает вращаться с постоянным угловым ускорением ε = 0,5 рад/с^2 и через t_1 = 15 с после начала движения приобретает момент импульса L = 73,5 кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию колеса через t_2 = 20 с после начала вращения.

Ответ. $W_к$ = **490 Дж.**

6.18 Маховик вращается с постоянной скоростью, соответствующей частоте n = 10 об/с; его кинетическая энергия $W_к$ = 7,85 Дж. За какое время вращающий момент M = 50 Н·м, приложенный к этому маховику, увеличит угловую скорость маховика в два раза?

Ответ. t = 5 **мс.**

6.19 Человек катит обруч без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью v = 2,0 м/с. По инерции обруч может вкатиться на горку с углом наклона 30° к горизонту. На какое расстояние S вкатится обруч?

Ответ. S = **0,8 м.**

6.20 На какую высоту вкатывается по наклонной плоскости обруч, если у основания линейная скорость точек на обруче 5 м/с.

Ответ. h = 2,5 **м.**

6.21 Шар и сплошной цилиндр одинаковой массы, изготовленные из одного и того же материала, катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Определить, во сколько раз кинетическая энергия шара меньше кинетической энергии сплошного цилиндра.

Ответ. В 1,07 раза.

6.22 Полная кинетическая энергия $W_к$ диска, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности, равна 24 Дж. Определить кинетическую энергию W_1 поступательного и W_2 вращательного движения диска.

Ответ. $W_1 = 16$ **Дж,** $W_2 = 8$ **Дж.**

6.23 К ободу однородного сплошного диска массой $m = 10{,}0$ кг, насаженного на ось, приложена постоянная касательная сила $F = 30{,}0$ Н. Определить кинетическую энергию диска через время $t = 4$ с после начала действия силы.

Ответ. $W_к = 1{,}4$ **кДж.**

6.24 Вентилятор вращается с частотой $n = 600$ об/мин. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и, сделав $N = 50$ оборотов, остановился. Работа сил торможения $A =$ $= 31{,}4$ Дж. Определить: 1) момент M сил торможения; 2) момент инерции I вентилятора.

Ответ. $\boldsymbol{M} = 0{,}1$ **Н·м;** $I = 0{,}016$ **кг·м**^{2}.

6.25 К ободу однородного сплошного диска радиусом $R = 0{,}5$ м приложена постоянная касательная сила $F = 100$ Н. При вращении диска на него действует момент сил трения $M_{тр} = 2$ Н·м. Определить массу m диска, если известно, что его угловое ускорение ε постоянно и равно 16 рад/с^2.

Ответ. $m = 24$ **кг.**

6.26 Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $I = 1{,}5$ кг·м^2, вращаясь при торможении равнозамедленно, за время $t = 1$ мин уменьшил частоту своего вращения с $n_0 = 240{,}0$ об/мин до $n_1 = 120{,}0$ об/мин. Определить: угловое ускорение ε маховика; момент M силы торможения; работу сил торможения A.

Ответ. $\boldsymbol{\varepsilon} = 0{,}21$ **рад/с**^{2}; $\boldsymbol{M} = 0{,}32$ **Н·м;** $\boldsymbol{A} = 355{,}0$ **Дж.**

7–8 баллов

6.27 По ободу шкива, надетого на общую ось с маховым колесом, намотана нить, к концу которой подвешен груз масс-сой m = = 1,0 кг (рис. 6.2). На какое расстояние должен опуститься груз, чтобы колесо со шкивом получило скорость, соответствующую частоте 60 об/мин? Момент инерции колеса со шкивом 0,42 кг·м^2, радиус шкива 10,0 см. Считать радиус махового колеса равным радиусу шкива.

Ответ. h **= 0,87 м.**

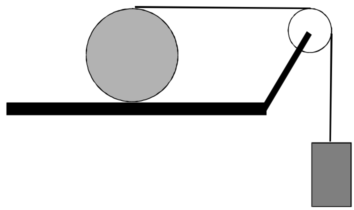

Рис. 6.2

6.28 К ободу диска массой m = 5,0 кг, закрепленного на горизонтальной оси, приложена постоянная касательная сила F = 19,6 Н. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через Δt = 5 с после начала действия силы?

Ответ. $W_к$ **= 1,9 кДж.**

6.29 На какой угол надо отклонить однородный стержень, подвешенный на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня, чтобы нижний конец стержня при прохождении им положения равновесия имел скорость 5 м/с? Длина стержня 1 м.

Ответ. $\cos\alpha = 0{,}15$; $\alpha = 81°20'$.

6.30 Диск массой m = 300 г и радиусом r = 10,0 см вращается относительно оси, проходящей через его центр масс, таким образом, что изменение угла поворота происходит по закону $\varphi = 5{,}0 - t^2 + 6{,}0t^3$ (рад). Найти, какую работу совершает над телом момент внешних сил за промежуток времени от t_1 = 1 с до t_2 = 1,4 с.

Ответ. A = 0,6 **Дж.**

6.31 Сплошной цилиндр массой m = 400 г и радиусом r = 5,0 см вращается относительно оси, проходящей через его центр

масс, таким образом, что изменение угла поворота происходит по закону $\varphi = -4{,}0t^2 + 15{,}0t + + 10{,}0$ (рад). Найти какую работу совершает над телом момент внешних сил за промежуток времени от $t_1 = 1{,}2$ с до $t_2 = 1{,}3$ с.
Ответ. $A = -2{,}0 \cdot 10^{-3}$ **Дж.**

6.32 Некоторое тело катится без скольжения со скоростью $v = 2{,}5$ м/с по горизонтальной плоскости. По инерции оно вкатывается на горку с углом наклона $\alpha = 10^\circ$ к горизонту и проходит расстояние $S = 2{,}57$ м. Определить вид тела (шар, обруч, диск или сплошной цилиндр).
Ответ. Шар.

6.33 Колесо радиусом $R = 30$ см и массой $m = 3{,}0$ кг скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости длиной $l = 5{,}0$ м и углом наклона $\alpha = 25°$. Определить момент инерции колеса, если его скорость v у основания плоскости составила 4,6 м/с.
Ответ. $I = 0{,}26$ **кг·м^2.**

6.34 Какую скорость должен иметь центр масс шара, катящегося без скольжения, чтобы подняться по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°, на высоту 2 м, если сила сопротивления равна 0,2 силы тяжести, действующей на шар?
Ответ. v **= 6,26 м/с.**

6.35 На однородный сплошной цилиндрический вал (рис. 6.3) радиусом $R = 50$ см намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 6{,}40$ кг. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением $a = 2{,}00$ м/с^2. Определить: момент инерции I вала; массу вала.
Ответ. $I = 6{,}24$ **кг·м^2**; $m = 50{,}0$ **кг.**

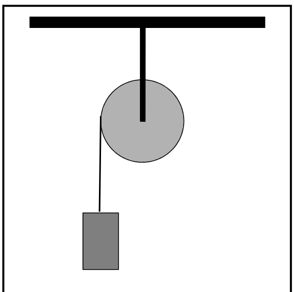
Рис. 6.3

6.36 На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 5$ см и массой $M = 10{,}0$ кг намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 1{,}0$ кг (рис. 6.3). Определить: 1) зависимость $S(t)$, согласно которой движется груз; 2) силу натяжения нити T; 3) зависимость $\varphi(t)$, согласно которой вращается вал; 4) угловую скорость ω вала через $t = 1$ с после начала движения; 5) тангенциальное (a_τ) и нормальное (a_n) ускорения точек, находящихся на поверхности вала.

Ответ. $S = 0{,}82t^2$ **м**; $\boldsymbol{T} = 8{,}2$ **Н;** $\varphi = 16{,}3t^2$ **рад**;

$\omega = 32{,}6$ **рад/с;** $\boldsymbol{a_\tau} = 1{,}64$ **м/с**^{2}, $\boldsymbol{a_n} = 53{,}1$ **м/с**^{2}.

9–10 баллов

6.37 На горизонтальном столе расположен цилиндр массой m, на который намотана нить. К свободному концу нити, переброшенному через легкий блок (см. рис. 6.2) , подвешен груз такой же массы m. Найти ускорение груза и силу трения между цилиндром и столом. Цилиндр считать сплошным телом, которое катится без скольжения.

Ответ. $a = (8/11)\,g$; $F = (1/11)\,mg$.

6.38 Стержень массой $m = 75{,}0$ кг и длиной $l = 18{,}0$ см вращается относительно оси, проходящей через его центр масс, таким образом, что изменение угла поворота происходит по закону $\varphi = 2{,}5 + 6{,}0t^3 - 2{,}0t$ (рад). Найти, какую работу совершает над телом момент внешних сил за промежуток времени от $t_1 = 1{,}2$ с до $t_2 = 1{,}4$ с.

Ответ. *A* = 54,2 Дж.

6.39 Однородный стержень длиной 85 см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую наименьшую скорость надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

Ответ. ***v* = 7,1 м/с.**

6.40 Сплошной однородный диск скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определить линейное ускорение a центра диска.

Ответ. $a = \dfrac{2}{3} g \sin\alpha$.

6.41 На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом R = 20 см, момент инерции которого I = 0,15 кг·м^2, намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой m = 0,50 кг. До начала вращения барабана высота h груза над полом составляла 2,3 м. Определить: 1) время опускания груза да пола; 2) силу натяжения нити; 3) кинетическую энергию груза в момент удара о пол.
Ответ. t = 2 **с;** T = 4,32 **Н;** $W_к$ = 1,35 **Дж.**

6.42 Маятник Максвелла представляет собой массивный диск радиусом R и массой m, жестко надетый на ось радиусом r. Ось подвешивается на двух нитях, намотанных на нее (рис. 6.4). В свободном состоянии маятник совершает возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости при одновременном вращении диска вокруг оси. Определить: 1) ускорение поступательного движения маятника; 2) силу натяжения нити. Силы сопротивления и момент инерции оси маятника не учитывать.

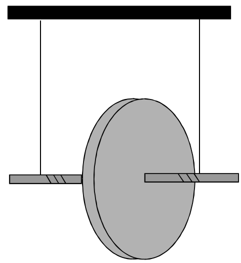
Рис. 6.4

Ответ. $a = \dfrac{g}{1 + R^2/(2r^2)}$; $T = \dfrac{mR^2}{2}\dfrac{g}{R^2 + 2r^2}$.

6.43 Однородный шар радиусом r = 20 см скатывается без скольжения с вершины сферы радиусом R = 50 см. Определить угловую скорость ω шара после отрыва от поверхности сферы. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ. $\omega = \sqrt{\dfrac{10}{17}\dfrac{g(R+r)}{r^2}} = 10$ **рад/с** .

7. ГИДРОДИНАМИКА

Краткие теоретические сведения

Уравнение неразрывности несжимаемой струи

$$Sv = \mathrm{const},$$

где S – площадь поперечного сечения трубки тока;

v – средняя скорость жидкости по сечению S.

Уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \mathrm{const},$$

где v – скорость жидкости;

$\frac{\rho v^2}{2}$ – **динамическое** давление жидкости;

h – высота, на которой расположено сечение трубки тока;

$\rho g h$ – **гидростатическое** давление;

p – **статическое** давление жидкости.

Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости определяется законом Ньютона для вязкости

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S,$$

где η – динамическая вязкость жидкости;

$\frac{\Delta v}{\Delta x}$ – градиент скорости;

S – площадь соприкасающихся слоев.

Кинематическая вязкость жидкости

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}.$$

Число Рейнольдса для потока жидкости в трубе

$$\mathrm{Re} = \rho v \frac{d}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости;

v – средняя по сечению трубы скорость жидкости;

d – характерный поперечный размер трубы (радиус или диаметр).

Формула Стокса, определяющая силу внутреннего трения, действующую на медленно движущийся в вязкой среде шарик

$$F = 6\pi\eta r v,$$

где r – радиус шарика;

v – скорость шарика.

Формула Пуазейля для определения объема жидкости, протекающей за время t через капиллярную трубку длиной l:

$$V = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8\eta l},$$

где R – радиус трубки;

Δp – разность давления на концах трубки.

Лобовое сопротивление

$$R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где C_x – безразмерный коэффициент сопротивления;

ρ – плотность среды;

v – скорость движения тела;

S – площадь наибольшего поперечного сечения тела.

Примеры решения задач

Задача 1. В горизонтальной трубе переменного сечения течет вода. В трубу впаяны две вертикальные манометрические трубки одинакового сечения (рис.7.1). Разность уровней в манометрических трубках $\Delta h = 8{,}0$ см. Сечения трубы у основания манометрических трубок $S_1 = 6{,}0$ см^2 и $S_2 = 12{,}0$ см^2. Пренебрегая вязкостью воды, определить ее массу, протекающую через сечение трубы за единицу времени. Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3.

Дано:
$\Delta h = 8{,}0$ см $= 0{,}08$ м;
$S_1 = 6{,}0$ см$^2 = 6{,}0\cdot10^{-4}$ м^2;
$S_2 = 12{,}0$ см$^2 = 12{,}0\cdot10^{-4}$ м^2;
$\rho = 1{,}0$ г/см$^3 = 1000$ кг/м^3

Найти: Q

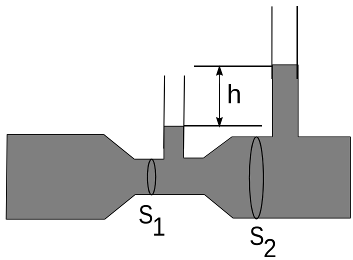

Рис. 7.1

Решение. Масса воды, протекающей через сечение за единицу времени, т.е. массовый расход, определяется по выражению

$$Q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho v_2 S_2 \Delta t}{\Delta t} = \rho v_2 S_2\,, \qquad (7.1)$$

где ρ – плотность воды;

v_2 – скорость течения воды в месте сечения S_2.

Так как воду можно считать несжимаемой, выполняется условие неразрывности струи

$$v_1 S_1 = v_2 S_2\,. \qquad (7.2)$$

Применим уравнение Бернулли для двух горизонтальных сечений трубы:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2},$$

где p_1 и p_2 – статические давления в сечениях манометрических трубок;

v_1 и v_2 – скорости течения воды в местах сечений S_1и S_2.

Разность статических давлений

$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta h. \tag{7.3}$$

Из (7.2), (7.3) получим

$$v_2 = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}. \tag{7.4}$$

Подставим (7.4) в (7.1) и найдем искомый массовый расход воды

$$Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}. \tag{7.5}$$

Подставляя данные задачи в (7.5), получим:

$$Q = 1000 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot 12{,}0 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-2}}{\left(6{,}0 \cdot 10^{-4}\right)^2 - \left(12{,}0 \cdot 10^{-4}\right)^2}} =$$

$= 0{,}87$ кг/с.

Ответ. Q = 0,87 **кг/с.**

Задача 2. В бочку льется вода. За единицу времени вливается объем воды равный V_t . Чему равен диаметр отверстия d в дне бочки, чтобы вода в ней держалась на постоянном уровне h?

Дано:
V_t;
h;
g

Найти: d

Решение. Вода в бочке будет держаться на постоянном уровне, если за равные промежутки времени количества втекающей и вытекающей воды равны. Объем воды, вытекающий в единицу времени из бочки, определяется следующим образом:

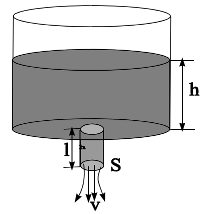

Рис. 7.2

$$V_t = \frac{V}{t}. \tag{7.6}$$

Объем вытекающей воды $V = lS$. Тогда

$$V_t = \frac{lS}{t} = vS, \tag{7.7}$$

где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь поперечного сечения отверстия;

v – скорость истечения воды из отверстия;

l – длина столбика воды, вытекающей из отверстия за время t (рис. 7.2).

Тогда скорость вытекания воды из отверстия определяется из (7.6)–(7.7):

$$v = \frac{4V_t}{\pi d^2}. \tag{7.8}$$

Уравнение Бернулли с учетом постоянства уровня воды в бочке на высоте h будет иметь вид

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho g h. \tag{7.9}$$

Из (7.9) получим

$$v = \sqrt{2gh}\,. \tag{7.10}$$

Из (7.8) и (7.10) следует, что диаметр отверстия должен определяться по формуле

$$d = \sqrt{\frac{4V_t}{\pi\sqrt{2gh}}}\,.$$

Ответ. $d = \sqrt{\dfrac{4V_t}{\pi\sqrt{2gh}}}$.

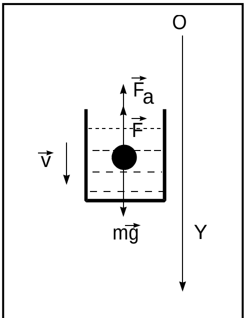

Рис. 7.3

Задача 3. Стальной шарик падает с постоянной скоростью в сосуде с глицерином. Считая, что при числе Рейнольдса $Re \le 0{,}5$ справедлива формула Стокса, определить предельный диаметр шарика. Плотность стали $\rho_1 = 9{,}00$ г/см^3, плотность глицерина $\rho_2 = 1{,}26$ г/см^3, динамическая вязкость глицерина $\eta = 1{,}48$ Па·с.

Дано:
$Re \le 0{,}5$;
$\rho_1 = 9{,}0$ г/см^3 = $9{,}0\cdot10^3$ кг/м^3;
$\rho_2 = 1{,}26$ г/см^3 = $1{,}26\cdot10^3$ кг/м^3;
$\eta = 1{,}48$ Па·с;
$g = 9{,}8$ м/с^2

Найти: d_{max}

Решение. При установившемся движении шарика в жидкости (v = const) сила тяжести mg шарика (рис. 7.3) уравновешивается суммой выталкивающей силы (F_A) и силы внутреннего трения (F), тогда

$$mg = F_A + F$$

или $$\rho_1 gV = \rho_2 gV + 6\pi\rho r v\,, \tag{7.11}$$

где $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ – объем шарика.

С учетом выражения для объема шарика V из (7.11) получим выражение для скорости v:

$$v = \frac{2(\rho_1 - \rho_2)gr^2}{9\eta} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)gd^2}{18\eta}.$$

Значение числа Рейнольдса для шарика можно рассчитать как

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_2 v d}{\eta}.$$

Предельный диаметр шарика d_{max} будет определяться максимальным значением числа $\mathrm{Re}_{max} = 0{,}5$. Поэтому

$$d_{max} = \frac{\eta \,\mathrm{Re}_{max}}{\rho_2 v} = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 \,\mathrm{Re}_{max}}{(\rho_1 - \rho_2)\rho_2 g}}.$$

В результате получим

$$d_{max} = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 1{,}48^2 \cdot 0{,}5}{(9{,}0 - 1{,}26)\cdot 10^3 \cdot 1{,}26 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8}} = 5{,}9 \cdot 10^{-3}\,\text{м}.$$

Ответ. $d_{max} = 5{,}9 \cdot 10^{-3}$ **м.**

З а д а ч и

4 балла

7.1 Сечение трубы $S_1 = 0{,}2$ м^2. Средняя скорость течения жидкости через сечение S_1 равна $v_1 = 10{,}0$ м/с. Если сечение трубы уменьшить в два раза, чему будет равна средняя скорость течения жидкости через него?
Ответ. $v_2 = 20{,}0$ **м/с**.

7.2 Чему равно давление на дне водоема глубиной 50 м?
Ответ. p = **600 кПа**.

7.3 Скорость течения струи воды v = 10 м/с. Чему равно динамическое давление воды?
Ответ. p = **50 кПа**.

7.4 Под каким статическим давлением должна находиться вода в трубе, чтобы ее поднять на высоту 10 м?
Ответ. $p = 1{,}0 \cdot 10^5$ **Па**.

7.5 Чему равен градиент скорости между слоями текущей жидкости, если на расстоянии между слоями Δx = 0,1 м скорость жидкости изменяется от v_1 = 0,2 м/с до v_2 = 0,8 м/с?

Ответ. $\left|\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right| = 6{,}0$ **с**$^{-1}$.

7.6 Число Рейнольдса для текущей по круглой трубе жидкости Re = 1000. Чему равна динамическая вязкость жидкости, если ее плотность ρ = 800,0 кг/м^3, средняя скорость течения $\langle v \rangle$ = 10,0 м/с, диаметр трубы d = 0,1 м?
Ответ. η = 0,8 **Па·с**.

7.7 Определить силу внутреннего трения между двумя соприкасающимися слоями жидкости площадью S = 0,01 м^2. Динамическая вязкость жидкости η = 1,2 Па·с, градиент скорости $|\Delta v / \Delta x| = 5{,}0$ с$^{-1}$.
Ответ. $F = 6{,}0 \cdot 10^{-2}$ **Н**.

7.8 Если капля воды массой 0,01 г падает с установившейся скоростью в воздухе, чему равна сила сопротивления движению капли?
Ответ. $F = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ **Н**.

7.9 Ручеек течет в лесу с холма. Перепад высот холма составляет 10,0 м. Средняя скорость воды ручейка на верху холма 1,0 м/с. Какова скорость ручейка у подножия холма?
Ответ. v_2 = 14,2 **м/с**.

7.10 Площадь соприкосновения слоев текущей жидкости $S = 10{,}0$ см^2, коэффициент динамической вязкости жидкости $\eta = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ Па·с, а возникающая сила трения между слоями $F = 0{,}1$ мН. Определить градиент скорости.

Ответ. $\frac{\Delta v}{\Delta x} = -100$ **с$^{-1}$.**

5–6 баллов

7.11 По трубе радиусом $r = 1{,}5$ см течет углекислый газ ($\rho = 7{,}5$ кг/м^3). Определить скорость его течения, если за время $t = 20$ мин через поперечное сечение трубы протекает масса газа $m = 950$ г.

Ответ. $v = 0{,}15$ **м/с.**

7.12 В емкость заливается вода со скоростью 200 см^3/с. На дне емкости имеется отверстие площадью поперечного сечения 0,80 см^2. Пренебрегая вязкостью воды, определить уровень воды в емкости.

Ответ. $h = 0{,}31$ **м.**

7.13 В сосуд заливается вода со скоростью 0,50 л/с. Пренебрегая вязкостью воды, определить диаметр отверстия в дне сосуда, при котором вода поддерживалась бы в нем на постоянном уровне $h = 0{,}20$ м.

Ответ. $d = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ **м.**

7.14 Пренебрегая вязкостью жидкости, определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в стенке сосуда, если высота h уровня жидкости над отверстием составляет 1,5 м.

Ответ. $v = 5{,}4$ **м/с.**

7.15 В боковой поверхности цилиндрического сосуда, стоящего на горизонтальной поверхности, имеется отверстие, поперечное сечение которого значительно меньше поперечного сечения самого сосуда. Отверстие расположено на расстоянии $h_1 = 49{,}0$ см от уровня воды в сосуде, который поддерживается постоянным, и на расстоянии $h_2 = 25$ см от дна сосуда. Пренебрегая вязкостью воды, определить расстояние по горизонтали от отверстия до места, куда попадет струя воды.

Ответ. $S = 0{,}70$ **м.**

7.16 Широкий сосуд с небольшим отверстием в дне наполнен водой плотностью $\rho_1 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3 и керосином плотностью $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Пренебрегая вязкостью, найти скорость вытекающей воды, если толщина слоя воды $h_1 = = 30$ см, а слоя керосина $h_2 = 20$ см.

Ответ. $v = \sqrt{2g\left(h_1 + h_2\rho_2/\rho_1\right)} = 3$ **м/с**.

7.17 Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в три раза больше плотности материала шарика. Определить отношение силы трения, действующей на всплывающий шарик, к силе тяжести.

Ответ. $\dfrac{F_{\text{тр}}}{mg} = 2.$

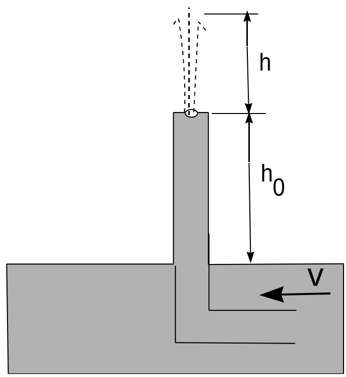

Рис. 7.4

7.18 Изогнутую трубку опустили в поток воды, как показано на рис. 7.4. Скорость потока относительно трубки $v = 2{,}5$ м/с. Закрытый верхний конец трубки имеет небольшое отверстие и находится на высоте $h_0 = 12{,}0$ см. На какую высоту h будет подниматься струя воды, вытекающая из отверстия?

Ответ. $h = v^2/2g - h_0 = 0{,}2$ **м.**

7–8 баллов

7.19 Бак цилиндрической формы с площадью основания $10{,}0$ м^2 и объемом $100{,}0$ м^3 заполнен водой. Пренебрегая вязкостью воды, определить время, необходимое для полного опорожнения бака, если на дне бака образовалось круглое отверстие площадью 8,0 см^2.

Ответ. $t = 1{,}8 \cdot 10^4$ **с.**

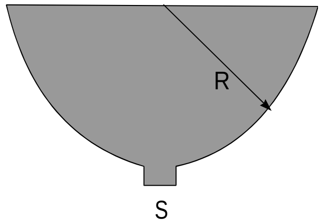

Рис. 7.5

7.20 Сосуд в виде полусферы радиусом $R = 10{,}0$ см до краев наполнен водой (рис. 7.5). На дне сосуда имеется отверстие с площадью поперечного сечения $S = 4{,}0$ мм^2. Определить время, за которое через отверстие выльется столько воды, чтобы ее уровень в сосуде понизился на 5,0 см.

Ответ. $t = 600$ с.

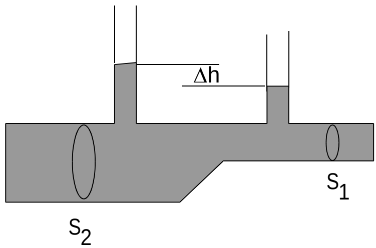

Рис. 7.6

7.21 По горизонтальной трубе переменного сечения (рис. 7.6) течет вода. Площади поперечных сечений трубы на разных ее участках равны $S_1 = 10$ см^2 и $S_2 = 20$ см^2. Разность уровней Δh воды в вертикальных трубках одинакового сечения составляет 20,0 см. Определить объем воды, проходящей за 1 с через сечение трубы.

Ответ. $V = 2{,}3{\cdot}10^{-3}$ **м^3**.

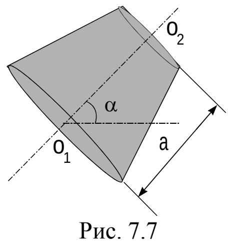

Рис. 7.7

7.22 Для измерения ускорения горизонтально движущегося тела используется U-образный манометр. С каким ускорением движется тело, если разность уровней жидкости в трубках манометра $h = 5{,}1$ см, а расстояние между осями трубок $b = 20{,}0$ см?

Ответ. a = **2,5 м/с^2**.

7.23 По суживающемуся трубопроводу (рис. 7.7) протекает вода в количестве $Q = 27{,}0$ м^3/ч. Определить давление в точке O_2, если в точке O_1 давление $p_1 = 2{,}50 \cdot 10^5$ Па. Диаметры трубопровода $d_1 = 80{,}0$ мм, $d_2 = 40{,}0$ мм, длина $a = 10{,}0$ м, угол наклона оси трубопровода к горизонту $\alpha = 30°$. Трением пренебречь.

Ответ. $p = 1{,}84 \cdot 10^5$ **Па.**

7.24 По трубопроводу, размеры которого указаны на рис. 7.8, протекает вода при температуре $t = 20$ °C в количестве $Q = 133{,}0$ м^3/ч. Давление в трубопроводе перед сужением $p_1 = 2{,}00 \cdot 10^5$ Па. Определите давление и режим течения воды в трубопроводе после сужения. Кинематическая вязкость воды $\nu = 1{,}05 \cdot 10^{-6}$ м^2/с при $t = 20$°С.

Ответ. $p = 1{,}97 \cdot 10^5$ **Па, режим турбулентный, так как** $\mathrm{Re} = 317 \cdot 10^3$.

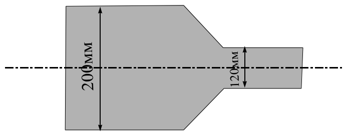

Рис. 7.8

7.25 На столе стоит широкий цилиндрический сосуд высотой 50 см, который наполнен водой. Пренебрегая вязкостью, найти, на какой высоте от дна сосуда следует сделать небольшое отверстие, чтобы струя из него била по поверхности стола на максимальное расстояние $l_{\text{макс}}$ от сосуда. Чему равно $l_{\text{макс}}$?

Ответ. $h = 0{,}25$ **м;** $l_{\text{макс}} = 0{,}50$ **м.**

7.26 Какой наибольшей скорости может достичь капля воды радиусом r, свободно падающая в воздухе? Динамическая вязкость воздуха η.

Ответ. $v = \dfrac{2}{9}\dfrac{\rho g r^2}{\eta}$.

7.27 Смесь свинцовых дробинок (плотность $\rho_c = 11{,}3$ г/см^3) диаметром 4 мм и 2 мм одновременно опускают в широкий сосуд глубиной $h = 1{,}5$ м с глицерином (плотность $\rho = 1{,}26$ г/см^3, динамическая вязкость $\eta = 1{,}48$ Па·с). Определить, на сколько больше времени потребуется дробинкам меньшего размера, чтобы достичь дна сосуда.

Ответ. На $\Delta t = 73$ **с.**

7.28 При движении шарика радиусом $r_1 = 1{,}2$ мм в глицерине (плотность $\rho_1 = 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3) ламинарное течение жидкости наблюдается при скорости шарика, не превышающей $\upsilon_1 = 23$ см/с. При какой минимальной скорости υ_2 шарика радиуса $r_2 = 5{,}5$ см в воде (плотность $\rho_2 = 10^3$ кг/м^3) обтекание станет турбулентным? Вязкости глицерина и воды $\eta_1 = 1{,}39$ Па·с, $\eta_2 = 1{,}1$ мПа·с.

Ответ. $\upsilon_2 = (\upsilon_1 r_1 \rho_1 \eta_2)/(r_2 \rho_2 \eta_1) = 5{,}0 \cdot 10^{-6}$ **м/с.**

7.29 Свинцовый шарик плотностью $\rho = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3 равномерно опускается в глицерине (плотность глицерина $\rho_0 = 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3), вязкость которого равна $\eta = 1{,}48$ Па·с. При каком наибольшем диаметре шарика его обтекание еще остается ламинарным? Известно, что переход к турбулентному обтеканию соответствует числу Рейнольдса $\mathrm{Re} = 0{,}5$. За характерный размер шарика принять его диаметр.

Ответ. $d = \left(\dfrac{18\,\mathrm{Re}\,\eta^2}{(\rho - \rho_0)\rho_0 g} \right)^{1/3}$ **= 5,0·10^{-3} м.**

7.30 В широком сосуде, наполненном глицерином (плотность $\rho = 1{,}26$ г/см^3, динамическая вязкость $\eta = 1{,}48$ Па·с), падает свинцовый шарик (плотность $\rho = 11{,}3$ г/см^3). Считая, что при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} \le 0{,}5$ выполняется формула Стокса (при вычислении Re в качестве характерного размера берется диаметр шарика), определить предельный диаметр шарика.

Ответ. $d = 5{,}4 \cdot 10^{-3}$ **м.**

7.31 Стальной шарик (плотность $\rho = 9$ г/см^3) диаметром $d = 0{,}8$ см падает с постоянной скоростью в касторовом масле (плотность $\rho_0 = 0{,}96$ г/см^3, динамическая вязкость $\eta = 0{,}99$ Па·с). Учитывая, что критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}5$, определить характер движения масла, обусловленный падением в нем шарика.

Ответ. $\mathrm{Re} = 2{,}2 > \mathrm{Re}_{кр}$ **, движение турбулентное.**

7.32 Пробковый шарик (плотность ρ = 0,20 г/см^3) диаметром d = 6,0 мм всплывает в сосуде, наполненном касторовым маслом (плотность ρ = 0,96 г/см^3) с постоянной скоростью v = 1,50 см/с. Определить для касторового масла: 1) динамическую вязкость η; 2) кинематическую вязкость ν.
Ответ. η **= 0,99 Па·с;** ν = 1,0·10^{-3}**м^2/с.**

7.33 Парашют массой 32 кг в раскрытом состоянии имеет форму полусферы диаметром 12,0 м. Если масса парашютиста 65 кг, какова будет максимальная скорость его движения на парашюте? Коэффициент лобового сопротивления C_x = 1,3; плотность воздуха 1,29 кг/м^3.
Ответ. v_{max} = 3,2 **м/с.**

7.34 Автомобиль с наибольшей площадью сечения в направлении, перпендикулярном скорости S = 2,2 м^2 (миделево сечение), коэффициентом лобового сопротивления C_x = 0,4 и максимальной мощностью P = 45,0 кВт может на горизонтальных участках дороги развивать скорость до 140 км/ч. При реконструкции автомобиля уменьшают миделево сечение до S_1 = 2 м^2, оставляя C_x прежним. Принимая силу сцепления колес автомобиля с поверхностью дороги постоянной, определить, какую максимальную мощность должен иметь автомобиль, чтобы он развил на горизонтальных участках дороги скорость до 160 км/ч. Плотность воздуха – 1,29 кг/м^3.
Ответ. P = 58,5 **кВт.**

7.35 Расход нефти по трубопроводу Q = 160 м^3/ч. Диаметр трубопровода d = 70 мм, кинематическая вязкость ν = 2,5·10^{-4} м^2/с. Установить режим течения, а также вычислить, при каком максимальном расходе нефти режим течения будет еще ламинарным (критическое число Re = 2300).
Ответ. Q_{max} = **114 м^3/ч.**

9–10 баллов

7.36 Открытый сосуд, имеющий неизменную по высоте площадь сечения, стоит на горизонтальной площадке (рис. 7.9). Вода вытекает из него через отверстие в боковой стенке, расположенное на высоте, равной половине высоты сосуда. Как изменяется дальнобойность вытекающей струи за время истечения, если высота уровня воды h, площадь

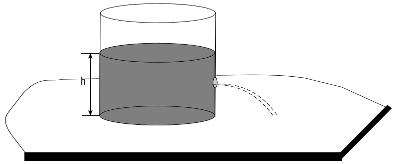

Рис.7.9

сечения сосуда – S, а площадь поперечного сечения отверстия S_1? В начальный момент времени сосуд был наполнен до краев.

Ответ.

$$S = h - \frac{S_1}{S}\sqrt{ght}.$$

Рис. 7.10

7.37 Какую работу необходимо совершить, чтобы, действуя постоянной силой на поршень (рис. 7.10), выдавить из горизонтально расположенного цилиндра всю воду за время t? Объем воды в цилиндре равен V_0, площадь сечения отверстия – S, причем S значительно меньше площади поршня, плотность воды ρ. Трение поршня о стенки и вязкость воды пренебрежимо малы.

Ответ.

$$A = \rho V_0^{\,3} \big/ 2S^2t^2.$$

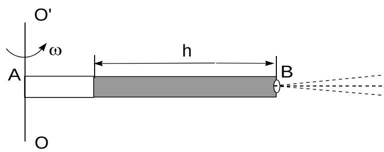

Рис. 7.11

7.38 Горизонтально расположенная трубка *AB* длины l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси *O*, проходящей через конец A (рис. 7.11). В трубке находится идеальная жидкость. Конец A трубки открыт, а в закрытом конце B имеется очень малое отверстие. С какой скоростью относительно трубки будет вытекать жидкость в зависимости от длины ее столба h?

Ответ. $v = \omega h\sqrt{\frac{2l}{h} - 1}$.

8. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Краткие теоретические сведения

Смещение x**, скорость** υ **и ускорение** a при гармоническом колебании определяются уравнениями

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$
$$\upsilon = \dot{x} = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0),$$
$$a = \dot{\upsilon} = \ddot{x} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x,$$

где A – амплитуда колебания;

ω – циклическая частота;

φ_0 – начальная фаза.

Циклическая частота ω**, период колебаний** T **и частота** n связаны соотношениями

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n.$$

При **сложении** двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода, амплитуда которого A и начальная фаза φ_0 определяются уравнениями

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$tg\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

где A_1 и A_2 – амплитуды слагаемых колебаний;

φ_1 и φ_2 – их начальные фазы.

Условие гармоничности колебаний: результирующая сила F, действующая на тело при свободном гармоническом колебании (квазиупругая сила), всегда пропорциональна смещению x и направлена в сторону, противоположную смещению:

$$F = ma = -m\omega_0^2 x = -kx,$$

где $k = m\omega_0^2$ – коэффициент квазиупругой силы, численно равный силе, вызывающей смещение x равное единице.

При отсутствии сопротивления среды циклическая частота ω_0 свободных гармонических колебаний (**собственная частота**) и период колебаний T_0 определяются соотношениями

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Период колебаний математического маятника длиной l

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Период колебаний физического маятника

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}},$$

где I – момент инерции маятника относительно оси качания;

d – расстояние от оси до его центра тяжести.

Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания, постоянна

$$W = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}.$$

Уравнение для смещения x **затухающих колебаний** при наличии силы сопротивления $F_{\text{сопр}}$, пропорциональной скорости ($F_{\text{сопр}} = -rv$, где r – коэффициент сопротивления), имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $A_0 e^{-\beta t}$ – убывающая по времени амплитуда смещения;

β – коэффициент затухания;

ω – циклическая частота затухающих колебаний;

A_0, φ_0 – начальные амплитуда и фаза (определяется из начальных условий).

Значения β, ω выражаются через параметры значения величин r, m, k формулами

$$\beta = \frac{r}{2m},$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}.$$

Логарифмический декремент затухания колебаний

$$\lambda = \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \beta T,$$

где A_1 и A_2 – амплитуды двух последовательных колебаний.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

где f_0 – отношение амплитуды вынуждающей силы к массе тела;

ω_0 – собственная циклическая частота;

ω – циклическая частота вынуждающей силы.

Резонансная циклическая частота при вынужденных колебаниях

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Частица массой $m = 0{,}01$ кг совершает гармонические колебания с периодом $T_0 = 2$ с. Полная энергия колеблющейся частицы $W = 0{,}1$ мДж. Определить амплитуду A колебаний и наибольшее значение силы F_{max}, действующей на частицу.

Дано:
$m = 0{,}01$ кг;
$T_0 = 2$ с;
$W = 0{,}1$ мДж $= 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ Дж

Найти: A; F_{max}

Решение. Для определения амплитуды колебаний воспользуемся выражением полной энергии частицы

$$W = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2,$$

где $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ – собственная частота колебаний частицы.

Отсюда амплитуда

$$A = \frac{T_0}{2\pi}\sqrt{\frac{2W}{m}}\,. \tag{8.1}$$

Так как частица совершает гармонические колебания, то сила, действующая на нее, является квазиупругой и, следовательно, может быть выражена соотношением

$$F = -kx,$$

где k – коэффициент квазиупругой силы;

x – смещение колеблющейся точки.

Максимальная сила будет при максимальном смещении x_{max}, равном амплитуде:

$$F_{max} = kA. \tag{8.2}$$

Коэффициент k выразим через период колебаний

$$k = m\omega_0 = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}. \tag{8.3}$$

Подставив выражения (8.1) и (8.3) в (8.2), получим

$$F_{max} = 2\pi \frac{\sqrt{2mW}}{T_0}.$$

$$A = \frac{2}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}} = 4{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

$$F_{max} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{2}\sqrt{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}} = 4{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

Ответ. $A = 4{,}5 \cdot 10^{-2}$ **м**; $F_{max} = 4{,}4$ **мН**. .

Задача 2. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень. Определить длину стержня, если частота его колебаний максимальна, когда точка подвеса находится от центра масс на расстоянии x.

Дано:
x
$\omega = \omega_{max}$ при x

Найти: l

Решение. Частота колебаний физического маятника определяется формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{I}} ,$$

где m – масса маятника;

I – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса.

Согласно теореме Штейнера, момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку подвеса:

$$I = \frac{ml^2}{12} + mx^2. \qquad (8.4)$$

Тогда частота колебаний маятника с учетом (8.4) будет

$$\omega = \sqrt{\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}} . \qquad (8.5)$$

Найдем максимум функции (8.5)

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{6g\left(l^2 - 12x^2\right)}{x^{1/2}\left(l^2 + 12x^2\right)^{3/2}} = 0. \qquad (8.6)$$

Из (8.6) находим

$$l^2 = 12x^2 = 0.$$

Тогда длина маятника

$$l = 2\sqrt{3}x.$$

Ответ. $l = 2\sqrt{3}x$.

Задача 3. Тело совершает затухающие колебания частотой 50 Гц. Логарифмический декремент затухания $\lambda = 0{,}01$. Определить время, за которое амплитуда колебаний тела уменьшится в 20 раз, а также число полных колебаний тела.

Дано:
$n = 50$ Гц;
$\dfrac{A_0}{A} = 20$;
$\lambda = 0{,}01$

Найти: $t;\ N$

Решение. Амплитуда затухающих колебаний тела

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \qquad (8.7)$$

где A_0 – амплитуда колебаний тела в начальный момент времени $t = 0$;
β – коэффициент затухания.

Логарифмический декримент затухания

$$\lambda = \beta T = \beta / n,$$

где n – частота колебаний;
T – период колебаний.

Тогда выражение (8.7) можно записать в виде

$$A = A_0 e^{-\lambda n t}. \qquad (8.8)$$

Из (8.8) найдем время

$$t = \frac{1}{\lambda n} \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = 6 \text{ с}.$$

Число полных колебаний

$$N = tn = 300.$$

Ответ. $t = 6$ с; $N = 300$.

З а д а ч и

4 балла

8.1 Смещение x точки, совершающей гармонические колебания, определяется уравнением $x = 5\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (м). Определить амплитуду, циклическую частоту и начальную фазу колебаний.

Ответ. $A = 5$ **м;** $\omega = 4\pi$ **рад/с**; $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ **рад**.

8.2 Амплитуда колебаний материальной точки $A = 0{,}2$ м, циклическая частота $\omega = 3{,}0$ рад/с. Чему равна максимальная скорость колебаний материальной точки?
Ответ. $v_{max} = 0{,}6$ **м/с.**

8.3 Смещение колеблющейся точки по синусоидальному закону $x = 0{,}1$ м, циклическая частота $\omega = 2{,}0$ рад/с. Найти ускорение материальной точки.
Ответ. $a = -0{,}4$ **м/с**^{2}.

8.4 Тело за 10 с совершает 20 полных колебаний. Найти частоту и период колебаний.
Ответ. $n = 2$ **Гц;** $T = 0{,}5$ **с.**

8.5 В некоторый момент времени смещение тела от положения равновесия составляло $x = 0{,}02$ м. Циклическая частота синусоидальных колебаний $\omega = 2$ рад/с. Если масса тела $m = 0{,}2$ кг, какова величина возвращающей силы, действующей на тело в данный момент времени?
Ответ. $F = -1{,}6 \cdot 10^{-2}$ **Н.**

8.6 Если длина математического маятника $l = 0{,}1$ м, чему равен период колебаний такого маятника.
Ответ. $T = 0{,}6$ **с.**

8.7 Расстояние от оси вращения до центра тяжести физического маятника $d = 0{,}4$ м. Момент инерции маятника $I = 100$ кг·м^2,

масса маятника $m = 1{,}0$ кг. Чему равен период колебаний маятника?
Ответ. $\boldsymbol{T} = 31{,}4$ **с.**

8.8 Полная энергия колебаний маятника $W = 10$ Дж. Если величина максимальной возвращающей силы $F_{max} = 2$ Н, какова величина амплитуды колебаний тела?
Ответ. $\boldsymbol{A} = 10$ **м.**

8.9 Амплитуда колебаний за время $t = 5$ с уменьшилась в e раз. Чему равен коэффициент затухания β?
Ответ. $\boldsymbol{\beta} = 0{,}2$ $\mathbf{с^{-1}}$.

8.10 Чему равен логарифмический декремент затухания λ, если коэффициент затухания $\beta = 0{,}1$ $с^{-1}$, а период колебаний $T = 4$ с?
Ответ. $\boldsymbol{\lambda} = 0{,}4$.

5–6 баллов

8.11 Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых $x = A\sin\omega t$, где $A = 5$ см, $\omega = 2$ рад/с. Найти момент времени t, когда точка обладала потенциальной энергией $W_п = 0{,}1$ мДж и на нее действовала возвращающая сила $F = 5$ мН.
Ответ. $t = 0{,}47$ с.

8.12 Груз подвешен на пружине. Если увеличить массу груза на 0,6 кг, период его колебаний увеличится в два раза. Определить первоначальную массу груза.
Ответ. $m_0 =$ **0,2 кг.**

8.13 Два математических маятника, длины которых отличаются на $\Delta l = 16$ см, совершают за одно и то же время первый 10 колебаний, второй – 6 колебаний. Определить длины маятников.
Ответ. $l_1 = 0{,}09$ **м;** $l_2 = 0{,}25$ **м.**

8.14 Период колебаний груза массой m, подвешенного на пружине жесткостью k, равен T_1. Определить период колебаний груза массой $2m$, подвешенного на половине пружины.
Ответ. $T_2 = T_1$.

8.15 После смещения вниз на 2 см от положения равновесия груз, подвешенный на пружине, совершает свободные колебания с периодом 2 с. Определить период колебаний того же груза после начального смещения на 4 см.
Ответ. T = **2 с.**

8.16 Висящий на пружине груз совершает вертикальные колебания с амплитудой 4 см. Определите полную энергию гармонических колебаний, если для упругого удлинения пружины на 1 см требуется сила 0,1 Н.
Ответ. W = **0,008 Дж.**

8.17 Определить период T колебаний математического маятника, если амплитуда его колебаний составляет A = 18 см и максимальная скорость v_{max} = 16 см/с.
Ответ. T = 7,1 **с.**

8.18 Написать уравнение гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение точки равно 49,30 см/с^2, период колебаний 2 с и смещение от положения равновесия в начальный момент времени 25 мм.
Ответ. $x = 0{,}05\sin(\pi t + \pi/6)$ **м.**

8.19 Шарик массой m = 60 г колеблется с периодом T = 2 с. В начальный момент времени смещение шарика x_0 = 4,0 см и он обладает энергией W = 0,02 Дж. Записать уравнение гармонического колебания шарика и закон изменения возвращающей силы с течением времени.

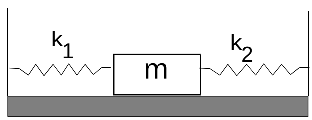

Рис. 8.1

Ответ. $x = 0{,}265\sin(\pi(t + 0{,}0492))$ **м**;

$F = -0{,}154\sin(\pi(t + 0{,}0492))$ Н.

8.20 Определить период малых продольных колебаний тела массы m в системе, показанной на рис. 8.1, если жесткости пружинок равны k_1 и k_2. В положении равновесия можно считать, что пружинки не деформированы.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)}$.

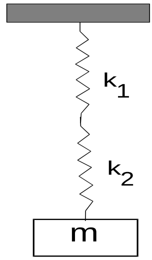

Рис. 8.2

8.21 Найти период малых вертикальных колебаний тела массы m в системе, показанной на рис. 8.2. Жесткости пружинок k_1 и k_2, а их массы пренебрежимо малы.

Ответ.

$T = 2\pi\sqrt{m/k}$, **где** $k = k_1 k_2/(k_1 + k_2)$.

7–8 баллов

8.22 Шарик массой $m = 1$ кг совершает гармонические колебания в горизонтальном направлении с амплитудой A на пружине жесткостью $k = 16$ Н/м (рис. 8.3). На расстоянии $A/2$ от положения равновесия установили массивную стальную плиту, от которой шарик абсолютно упруго отскакивает. Если временем соударений шарика о плиту и силой трения о горизонтальную поверхность пренебречь, чему равен период колебаний шарика?

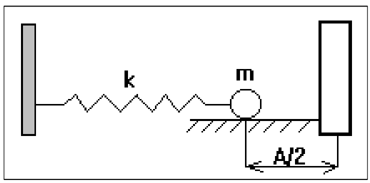

Рис. 8.3

Ответ. $T = \dfrac{\pi}{3}$ **с.**

8.23 Определить частоту n простых гармонических колебаний диска радиусом $R = 20$ см около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости.

Ответ. $n = 0{,}92$ **с**$^{-1}$.

8.24 Шар подвешен за петельку на гвозде, вбитом в стену. Шар совершает малые колебания в вертикальной плоскости. Если размерами петельки и трением пренебречь, каков период колебаний шара? Радиус шара $R = 7{,}0$ см.

Ответ. T **= 0,628 с.**

8.25 Частица совершает гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия $x = 0$. Циклическая частота колебаний равна ω. В некоторый момент времени координата частицы составляет x_0, а ее скорость v_{x0}. Найти координату x и скорость v_x частицы через время t после этого момента.

Ответ. $x = \sqrt{\dfrac{v_{0x}^2}{\omega^2} + x_0^2}\,\sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega x_0}{v_{0x}}\right)\right)$,

$$v_x = \sqrt{\frac{v_{0x}^2}{\omega^2} + x_0^2}\,\omega\cos\left(\omega t + \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega x_0}{v_{0x}}\right)\right).$$

8.26 Найти циклическую частоту и амплитуду гармонических колебаний частицы, если на расстояниях x_1 и x_2 от положения равновесия скорость частицы равна соответственно v_1 и v_2.

Ответ. $\omega = \sqrt{\left(v_1^2 - v_2^2\right)/\left(x_2^2 - x_1^2\right)}$; $a = \sqrt{\left(v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2\right)/\left(v_1^2 - v_2^2\right)}$.

8.27 Точка участвует одновременно в двух колебаниях одного направления, которые происходят по законам $x_1 = a\cos(\omega t)$ и $x_2 = a\cos(2\omega t)$. Найти максимальную скорость точки.

Ответ. $v_{\max} = 2{,}73 a\omega$.

8.28 Точка движется в плоскости XY по закону $x = A\sin(\omega t)$, $y = B\cos(\omega t)$, где A, B, ω – постоянные. Найти: а) уравнение траектории точки и направление ее движения по этой траектории; б) модуль ускорения a точки в зависимости от модуля радиус-вектора r относительно начала координат.

Ответ. $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$, **по часовой стрелке;** $a = -\omega^2 r$.

8.29 Тело массой m = 0,50 кг висит на резиновом шнуре с коэффициентом упругости k = 50 Н/м. Найти максимальное расстояние, на которое можно оттянуть вниз тело, чтобы его колебания еще носили гармонический характер. Какова при этом энергия колебания тела?

Ответ. $\Delta h_{max} = mg/k = 0{,}1$ **м**, $W = m^2g^2/2k = 0{,}25$ **Дж**.

8.30 Физический маятник совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси *O* с частотой ω_1 = 15,0 рад/с. Если в положении равновесия к нему прикрепить под осью *O* на расстоянии l = 20 см от нее небольшое тело массой m = 50 г, то частота колебаний ω_2 = 10,0 рад/с. Найти момент инерции первоначального маятника относительно оси *O*. Считать, что после прикрепления небольшого тела положение центра масс физического маятника не изменилось.

Ответ. $I = ml^2\left(\omega_2^2 - g/l\right)/\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)$ = **0,8·10^{-3} кг·м^2** .

8.31 Получить уравнение траектории, по которой движется материальная точка, участвующая в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, описываемых уравнениями $x = 2\cos(2{,}5\pi t + 3\pi/2)$ и $y = 2\cos(2{,}5\pi t + \pi)$.

Ответ. **Окружность** $x^2 + y^2 = 4$.

8.32 Получить уравнение траектории, по которой движется материальная точка, участвующая в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, описываемых уравнениями $x = \cos(5\pi t - \pi/4)$ и $y = 7\cos(5\pi t + 3\pi/4)$.

Ответ. **Прямая** $y = -7x$.

9–10 баллов

8.33 Математический маятник совершает колебания в среде с логарифмическим декрементом затухания λ_0 = 1,50. Каким будет значение λ, если сопротивление среды увеличить в n = 2 раза? Во сколько раз следует увеличить сопротивление среды, чтобы колебания стали невозможны?

Ответ. $\lambda = n\lambda_0 \Big/ \sqrt{1+\left(1-n^2\right)\left(\lambda_0/2\pi\right)^2} = 3{,}3$;

$n' = \sqrt{1+\left(2\pi/\lambda_0\right)^2} = 4{,}3$ **раза**.

8.34 К невесомой пружине подвесили груз, и она растянулась на Δx = 9,8 см. С каким периодом будет колебаться груз, если ему дать небольшой толчок в вертикальном направлении? Логарифмический декремент затухания λ = 3,1.

Ответ. $T = \sqrt{\left(4\pi^2+\lambda^2\right)\dfrac{\Delta x}{g}} = 0{,}70$ с.

8.35 Частицу сместили из положения равновесия на расстояние l = 1,0 см и предоставили самой себе. Какой путь пройдет эта частица до полной остановки, если логарифмический декремент затухания λ = 0,020?

Ответ. $S \approx l\left(1+e^{-\lambda/2}\right)/\left(1-e^{-\lambda/2}\right) = 2$ **м**.

8.36 Найти период малых поперечных колебаний шарика массой m = 40 г, укрепленного на середине натянутой струны длины l = 1,0 м. Силу натяжения струны считать постоянной и равной F = 10 Н. Массой струны пренебречь.

Ответ. $T = \pi\sqrt{ml/F} = 0{,}2$ с.

8.37 Определить период малых колебаний шарика, подвешенного на нерастяжимой нити длиной l = 20 см, если он находится в жидкости, плотность которой в η = 3,0 раза меньше плотности шарика. Сопротивление жидкости пренебрежимо мало.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\eta l/g(\eta-1)} = 1{,}1$ с.

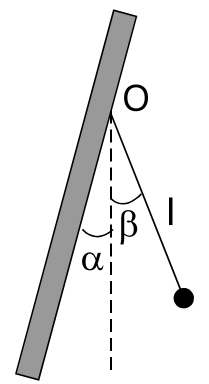

Рис. 8.4

8.38 Шарик подвесили на нити длиной l к точке O стенки, составляющей небольшой угол α с вертикалью (рис. 8.4). Затем нить с шариком отклонили на небольшой угол $\beta > \alpha$ и отпустили. Считая удар шарика о стенку абсолютно упругим, найти период колебаний такого маятника.

Ответ. $T = 2\sqrt{l/g}\left[\pi/2 + \arcsin(\alpha/\beta)\right]$.

8.39 Пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v, попадает в подвешенный на невесомой нити шар массой M и застревает в нем. Определить период колебаний шара, если максимальный угол отклонения нити от вертикали равен α. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ. $T = \dfrac{\pi m v}{(m+M)g\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

9. ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ. ЗВУК

Краткие теоретические сведения

Скорость v распространения волны, **длина волны** λ, **частота** n, **период** T связаны соотношением

$$v = \lambda n = \frac{\lambda}{T}.$$

Уравнение бегущей волны

$$S(x,t) = A\sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right),$$

$$S(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где $S(x,t)$ – смещение колеблющейся точки, находящейся на расстоянии x от источника колебаний;

ω – циклическая частота;

φ_0 – начальная фаза колебаний;

A – амплитуда колебаний частиц среды;

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек среды, расстояние между которыми $\Delta x = x_2 - x_1$,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda},$$

где x_1, x_2 – координаты двух точек среды.

Скорость распространения звуковых волн в упругой среде:

– продольных: $v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$;

– поперечных: $v = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$,

где E – модуль Юнга;
G – модуль сдвига;
ρ – плотность среды.

Скорость распространения звуковых волн в газах

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$ – отношение молярных теплоемкостей газов при постоянном давлении и при постоянном объеме;
R – универсальная газовая постоянная;
T – абсолютная температура;
M – молярная масса газа.

Частота основного тона струны

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho S}},$$

где l – длина струны;
ρ – плотность вещества струны;
S – площадь поперечного сечения струны;
F – сила натяжения струны.

Фазовая v и групповая u скорости, а также формула связи между ними

$$v = \frac{\omega}{k}; \quad u = \frac{d\omega}{dk}; \quad u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}.$$

Уравнение стоячей волны

$$S(x,t) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t = 2A\cos kx\cos\omega t.$$

Координаты пучностей и узлов при отражении от менее плотной среды

$$x_{\text{п}} = \pm m\frac{\lambda}{2}; \quad x_{\text{узл}} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2},$$

при отражении от более плотной среды

$$x_{\text{п}} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2};$$
$$x_{\text{узл}} = \pm m\frac{\lambda}{2},$$

где λ – длина бегущей волны; $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Примеры решения задач

Задача 1. Плоская синусоидальная волна распространяется со скоростью $v = 15$ м/с вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстоянии $x_1 = 5$ м и $x_2 = 5{,}5$ м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = \frac{\pi}{5}$. Амплитуда волны $A = 4$ см. Определить: 1) длину волны; 2) уравнение волны; 3) смещение S_1 первой точки в момент времени $t = 3$ с.

Дано:
v = 15 м/с;
x_1 = 5 м;
x_2 = 5,5 м;
$\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{5}$;
A = 4 см = 0,04 м;
t = 3 с

Найти: λ; $S(x,t)$; S_1

Решение. Разность фаз колебаний двух точек среды

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x,$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$ – расстояние между этими точками.
Тогда

$$\lambda = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}.$$

Циклическая частота $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, где $T = \dfrac{\lambda}{v}$. Следовательно,

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}.$$

Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x:

$$S(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x).$$

Чтобы найти смещение S_1, надо в это уравнение подставить значения t и x_1.

Вычисляя, получим

$$\lambda = \frac{2\cdot\pi(5{,}5 - 5)\cdot 5}{\pi} = 5\ \text{м};\ S(x,t) = 0{,}04\cdot\cos\left(6\pi t - \frac{2\pi}{5}x\right)\text{м};$$

$$S_1 = 0{,}04\cdot\cos\left(6\pi\cdot 3 - \frac{2\pi}{5}5\right) = 0{,}04\text{м}.$$

Ответ. λ = 5 **м**; $S(x,t) = 0{,}04\cdot\cos\left(6\pi t - \dfrac{2\pi}{5}x\right)$ **м;** S_1 = 0,04 **м.**

Задача 2. Средняя молярная кинетическая энергия поступательного движения молекул азота 3400 Дж/моль. Найти скорость распространения звука в азоте.

Дано:
W = 3400 Дж/моль;
γ = 1,4;
$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Найти: v

Решение. Скорость распространения звука в газе

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}\,, \tag{9.1}$$

где R – универсальная газовая постоянная;
γ = 1,4 – показатель адиабаты для азота;
T – абсолютная температура;
M – молярная масса газа.

Средняя молярная кинетическая энергия поступательного движения молекул азота

$$W = \frac{3}{2}RT\,. \tag{9.2}$$

Тогда из (9.2) можно определить абсолютную температуру T

$$T = \frac{2W}{3R}\,. \tag{9.3}$$

Подставляя (9.3) в (9.1), получим

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma W}{3M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}4 \cdot 3400}{3 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 337 \text{ м/с}\,.$$

Ответ. v **= 337 м/с.**

Задача 3. При наложении двух когерентных бегущих волн с длиной волны 12 см возникает стоячая волна. Найти положение узлов и пучностей стоячей волны, если отражение происходит от менее плотной среды.

Дано:
λ =12 см = 0,12 м;
m = 0, 1, 2…

Найти: $x_{узл}$; $x_{п}$

Решение. Если отражение бегущих волн происходит от менее плотной среды, положение узлов и пучностей будет определяться выражениями

$$x_{узл} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \tag{9.4}$$

$$x_{п} = \pm m\frac{\lambda}{2} \quad . \tag{9.5}$$

Подставляя в (9.4) и (9.5) значения для m и λ, получим положения узлов $x_{узл}$ = 3, 9, 15 см…; положения пучностей $x_{п}$ = 0, 6, 12 см…

Ответ. Положения узлов $x_{узл}$ = 0,03; 0,09; 0,15 м…; положения пучностей $x_{п}$ = 0; 0,06; 0,12 м…

З а д а ч и

4 балла

9.1 С какой скоростью распространяется волна длиной λ = 300 м и периодом T = 10 с в среде?
Ответ. v = 30 **м/с.**

9.2 Уравнение плоской бегущей волны имеет вид $S = 10\sin(4\pi t - 0{,}2x)$ м. Чему равна амплитуда колебаний A, циклическая частота, волновое число?
Ответ. A = 10 **м; ω = 4π рад/с**; k = 0,2 **м**$^{-1}$.

9.3 Найти скорость распространения звука в воздухе при температуре 300 К. Молярная масса воздуха $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, показатель адиабаты γ = 1,4.
Ответ. v = 357 **м/с.**

9.4 Длина волны $\lambda = 5$ м, частота колебаний $n = 2$ Гц. Чему равна скорость распространения волны?
Ответ. $v = 10$ **м/с.**

9.5 Струна натянута силой $F = 10$ Н. Плотность материала струны $\rho = 4 \cdot 10^3$ кг/м^3, площадь поперечного сечения струны $S = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ м^2, длина струны $l = 1$ м. Чему равна частота основного тона струны?
Ответ. $n = 2{,}5$ **Гц.**

9.6 Найти разность фаз колебаний двух точек среды, находящихся на расстоянии $\Delta x = 0{,}2$ м друг от друга. Длина волны $\lambda = 314$ м.
Ответ. $\Delta\varphi = 0{,}004$ **рад**.

9.7 Найти смещение точки стоячей волны в момент времени $t = T/6$, если амплитуда колебаний $A = 0{,}1$ м, расстояние от источника колебаний $x = 2$ м, волновое число $k = 5\pi$.
Ответ. $S(x,t) =$ **0,1 м**.

9.8 Записать уравнение плоской бегущей волны, если амплитуда колебаний точки $A = 0{,}05$ м, период $T = 2$ с, длина волны 6 м.
Ответ. $S = 0{,}05 \cos(\pi t - \pi/3\, x)$ **м**.

9.9 Чему равно волновое число k для волны с $\lambda = 2$м?
Ответ. $k = \pi$ **м$^{-1}$**.

9.10 Записать уравнение стоячей волны, если амплитуда колебаний $A = 0{,}1$ м, волновое число $k = 0{,}004$ м$^{-1}$, период колебаний $T = 2$ с.
Ответ. $S = 0{,}2\cos(0{,}004x)\cos(\pi t)$.

5–6 баллов

9.11 Определить длину волны λ, если значение волнового числа $k = 0{,}02512$ см$^{-1}$.
Ответ. $\lambda = 2{,}5$ **м.**

9.12 Определить скорость v распространения волн в упругой среде, если разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, отстоящих друг от друга на $\Delta x = 15$ см, равна $\pi/2$. Частота колебаний $n = 25$ Гц.
Ответ. $v = 15$ **м/с.**

9.13 Найти разность фаз колебаний двух точек среды, находящихся на расстоянии 10 м и 16 м от источника колебаний. Период колебаний 0,004 с, скорость распространения волны 300 м/с.
Ответ. $\boldsymbol{\Delta\varphi = 10\pi}$ **рад**.

9.14 Волны в упругой среде распространяются со скоростью равной 15 м/с. Чему равно смещение точки, находящейся на расстоянии 3 м от источника колебаний, через 4 с от начала колебаний? Период колебаний 1 с, амплитуда колебаний 2 см.
Ответ. $S = 0,62$ **см.**

9.15 Найти смещение из положения равновесия точки среды, находящейся на расстоянии от источника $\lambda/12$ в момент времени $t = T/6$. Амплитуда колебаний $A = 0,050$ м.
Ответ. S = **0,025 м.**

9.16 Определить скорость распространения волны в упругой среде, если разность фаз колебаний двух точек среды, отстоящих друг от друга на расстоянии 20 см, равна $\pi/3$. Частота колебаний 50 Гц.
Ответ. $v = 60$ **м/с.**

9.17 Скорость распространения звука в воздухе 340 м/с. Ухо человека имеет наибольшую чувствительность на длине волны 17 см. Чему равна частота этой волны?
Ответ. n = **2 кГц.**

9.18 Скорость звука в стержне из дюралюминия 5100 м/с. Определить модуль Юнга, если плотность дюралюминия $2,7\cdot10^3$ кг/м^3.
Ответ. $E = 7\cdot10^{10}$ **Па**.

9.19 Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $v = 10$ м/с. Амплитуда колебаний точек шнура $A = 5$ см, период колебаний $T = 1$ с. Записать уравнение волны и определить: 1) длину волны; 2) фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, расположенной на расстоянии $x = 9$ см от источника колебаний в момент времени $t = 2{,}5$ с.

Ответ. $S(x,t) = 0{,}05 \cdot \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{5}x\right)$ **м**; $\lambda = 10$ **м;**

$\varphi = 4{,}982\pi$ **рад**; $S = -0{,}049$ **м;** $\dot{S} = -0{,}02$ **м/с**; $\ddot{S} = -0{,}16$ **м/с**^{2}.

9.20 Уравнение незатухающих колебаний точек среды имеет вид $x = 4\sin(600\pi t)$ см. Найти смещение из положения равновесия на расстоянии 75 см от источника колебаний, через 0,01 с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний 300 м/с.
Ответ. $S = 0{,}04$ **м.**

9.21 Найти отношение скоростей звука в водороде и углекислом газе при одинаковой температуре.

Ответ. $\frac{v_1}{v_2} = 4{,}8$.

7–8 баллов

9.22 Волна распространяется вдоль прямой со скоростью 50 м/с. Период колебаний 0,05 с. Если расстояние между двумя точками колеблющейся среды 0,5 м, чему равна разность фаз колебаний этих точек?
Ответ. **$\Delta\varphi = 1{,}25$ рад.**

9.23 Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 10 м/с. Период колебаний точек шнура 1 с, амплитуда 1,5 см. Определить длину волны, скорость и ускорение точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии 20,0 см, в момент времени 5 с.
Ответ. **$\lambda = 0{,}10$ м;** $v = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ **м/с;** $\boldsymbol{a} = -8{,}7 \cdot 10^{-2}$ **м/с**^{2}.

9.24 Найти показатель преломления звуковых волн на границе раздела «воздух-стекло», если модуль Юнга для стекла $6{,}900 \cdot 10^{10}$ Па, плотность стекла $2{,}600 \cdot 10^{3}$ кг/м^3, температура воздуха 20 °C.
Ответ. $n_{\text{ср}} = 0{,}067$.

9.25 Определить длину волны λ, если расстояние Δl между первым и четвертым узлами стоячей волны 30 см.
Ответ. $\lambda = 0{,}20$ **м.**

9.26 Найти положение узлов и пучностей, начертить график стоячей волны, если известно, что расстояние между 2-й и 5-й пучностями 0,75 м, а отражение происходит в точке, расположенной на расстоянии 1,5 м от источника. Отражение происходит от более плотной среды.
Ответ. **Координаты пучностей 0,125; 0,375; 0,625; 0,875;** 1,125; 1,375 **(м); координаты узлов 0; 0,25; 0,50; 0,75; 1,0;** 1,25; 1,5 **(м).**

9.27 Скорость распространения звуковой волны в газе с молярной массой $M = 2{,}9 \cdot 10^{-2}$ кг/моль при температуре $t = 20$ °C составляет 343 м/с. Определить отношение молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении и объеме.
Ответ. $\gamma = 1{,}4$.

9.28 Средняя квадратичная скорость молекул двухатомного газа при некоторых условиях составляет 480 м/с. Определить скорость v распространения звука в газе при таких же условиях.
Ответ. v **= 328 м/с.**

9–10 баллов

9.29 Для определения скорости звука в воздухе использовали трубу с поршнем и звуковой мембраной, закрывающей один из ее торцов. Найти скорость звука, если расстояние между соседними положениями поршня, при которых наблюдался резонанс на частоте $\nu = 2{,}0$ кГц, составляет $l = 8{,}5$ см.
Ответ. $v = 340$ **м**/с.

9.30 Определить разность числовых значений фазовой и групповой скоростей для частоты n = 800 Гц, если фазовая скорость задается выражением $v = a_0 / \sqrt{n+b}$, где a_0 = 24 м/с, b = 100 Гц.
Ответ. v = 2,46 **м/с.**

9.31 Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой n = 400 Гц. Скорость распространения колебаний в среде v = 1,0 км/с. Определить, при какой наименьшей разности хода будут наблюдаться: 1) максимальное усиление колебаний; 2) максимальное ослабление колебаний.
Ответ. Δx_1 = 2,5 **м;** Δx_2 = 1,25 **м.**

9.32 Два когерентных источника посылают поперечные волны в одинаковых фазах. Периоды колебаний T = 0,2 с, скорость распространения волн в среде v = 800 м/с. Определить, при какой разности хода в случае наложения волн будут наблюдаться: 1) ослабление колебаний; 2) усиление колебаний.
Ответ. $\Delta x_1 = \pm 80(2m+1)$ **м, где** (m = **0, 1, 2, …);** $\Delta x_2 = \pm 160m$ **м, где** (m = **0, 1, 2, …).**

II. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

10. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Краткие теоретические сведения

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v}^2_{\text{кв}} = \frac{2}{3} n \overline{E}_{\text{к}} = nkT,$$

где n – число молекул в единице объема газа (концентрация);

m_0 – масса одной молекулы газа;

p – давление газа на стенку сосуда;

$\overline{v}^2_{кв}$ – квадрат средней квадратичной скорости молекул;

$\overline{E}_{\text{к}}$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы газа;

T – абсолютная температура газа;

k – постоянная Больцмана.

Зависимость средней кинетической энергии поступательного и вращательного движения молекул от температуры

$$\overline{E}_{\text{к}}^{\text{пост}} = \frac{i_{\text{пост}}}{2} kT,$$

$$\overline{E}_{\text{к}}^{\text{вр}} = \frac{i_{\text{вр}}}{2} kT,$$

где $i_{\text{пост}}$, $i_{\text{вр}}$ – число поступательных и вращательных степеней свободы молекул.

Скорости молекул:

средняя квадратичная $$\overline{v}_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

средняя арифметическая $$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

наиболее вероятная $$v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

где R – универсальная газовая постоянная.

Распределение молекул в поле сил тяжести (распределение Больцмана)

$$N = N_0\, e^{-\frac{m_0 g}{kT}(h-h_0)} = N_0\, e^{-\frac{\Delta E_п}{kT}}.$$

Распределение молекул по скоростям (распределение Максвелла)

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{v}{v_в}\right)^2 e^{-\left(\frac{v}{v_в}\right)^2} \frac{dv}{v_в},$$

где dN – число молекул из общего числа N, имеющих при температуре T скорости в интервале $(v, v+dv)$.

Распределение молекул по составляющим скоростей

$$\frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{N} = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_0(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z,$$

где $dN(v_x, v_y, v_z)$ – число молекул из общего числа N, имеющих скорости с составляющими вдоль координатных осей v_x, v_y, v_z, лежащих в интервалах $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$, $(v_z, v_z + dv_z)$.

Функция распределения молекул идеального газа по относительным скоростям

$$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2},$$

где $u = \dfrac{v}{v_в}$ – относительная скорость.

Функция распределения молекул идеального газа по энергиям теплового движения

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}.$$

Число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключенную в интервале от ε до ε+*d*ε

$$dN = N\ f(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Барометрическая формула, выражающая убывание давления газов с высотой h над поверхностью Земли:

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}} = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

Примеры решения задач

Задача 1. В сосуде находятся $1{,}0\cdot10^{-7}$ молей кислорода и $1{,}0\cdot10^{-6}$ г азота. Температура смеси 100 °С. При этом давление в сосуде $1{,}0\cdot10^{-3}$ мм. рт. ст. Найти: 1) объем сосуда, 2) парциальные давления кислорода и азота, 3) число молекул в 1 см^3 этого сосуда.

Дано:
$\nu_{O_2} = 1{,}0\cdot10^{-7}$ моль;
$P = 133\cdot10^{-3}$ Па;
$m_{N_2} = 1{,}0\cdot10^{-9}$ кг;
$V = 1{,}0\cdot10^{-6}$ м^3;
$T = 373$ K

Найти: V, P_{O_2}, P_{N_2}, n

Решение. 1. Объем сосуда определим по уравнению Менделеева − Клапейрона, записанного для смеси газов (азота и кислорода):

$$pV = \left(\nu_{O_2} + \nu_{N_2}\right)RT\,. \qquad (10.1)$$

Чтобы найти количество вещества азота ν_{N_2}, определим молярную массу азота M_{N_2}:

$$M_{N_2} = 2\cdot14\cdot10^{-3} = 28\cdot10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Тогда $\nu_{N_2} = \dfrac{m_{N_2}}{M_{N_2}} = \dfrac{10^{-9}}{28\cdot10^{-3}} \approx 3{,}57\cdot10^{-8}$ моль. Подставив эти значения в (10.1) получим объем сосуда

$$V = \frac{\left(\nu_{O_2} + \nu_{N_2}\right)RT}{p} = \frac{\left(10^{-7} + 3{,}57\cdot10^{-8}\right)}{133\cdot10^{-3}}8{,}31\cdot373 \approx 3{,}0\cdot10^{-3}\ \text{м}^3.$$

2. Парциальные давления для кислорода и азота соответственно равны

$$p_{O_2} = \frac{\nu_{O_2}RT}{V} = \frac{\nu_{O_2}p}{\left(\nu_{O_2} + \nu_{N_2}\right)} = \frac{10^{-7}\cdot133\cdot10^{-3}}{\left(10^{-7} + 3{,}57\cdot10^{-8}\right)} \approx 98\cdot10^{-3}\ \text{Па},$$

$$p_{N_2} = \frac{\nu_{N_2} RT}{V} = \frac{\nu_{N_2} p}{\left(\nu_{O_2} + \nu_{N_2}\right)} = \frac{3{,}57 \cdot 10^{-8} \cdot 133 \cdot 10^{-3}}{\left(10^{-7} + 3{,}57 \cdot 10^{-8}\right)} \approx 35 \cdot 10^{-3} \text{ Па}.$$

3. Концентрацию молекул n найдем из основного уравнения молекулярно-кинетической теории

$$p = nkT, \tag{10.2}$$

где k – постоянная Больцмана.

Из (10.2) n будет

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{133 \cdot 10^{-3}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 373} = 2{,}6 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

Ответ. $V = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$ **м**^{3}; $\boldsymbol{p}_{O_2} = 98 \cdot 10^{-3}$ **Па**; $\boldsymbol{p}_{N_2} = 35 \cdot 10^{-3}$ **Па**; $n = 2{,}6 \cdot 10^{19}$ **м**$^{-3}$.

Задача 2. Каким должно быть давление воздуха на дне скважины глубиной 8 км, если считать, что масса одного киломоля воздуха 29 кг, температура по всей высоте постоянна и равна 27 °С, а давление воздуха у поверхности Земли равно 1 атм.

Дано:
m = 29 кг;
$\nu = 10^3$ молей;
T = 300 K;
$p_0 \approx 1 \cdot 10^5$ Па;
$h = 8 \cdot 10^3$ м

Найти: p

Решение. Определим потенциальную энергию молекулы воздуха, находящегося на дне скважины, относительно поверхности Земли

$$E_{п} = -m_0 gh,$$

где m_0 – масса одной молекулы.

$$m_0 = \frac{m}{N} = \frac{M}{N_A} = \frac{m}{\nu N_A}.$$

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории

$$p = nkT\,,$$

следует, что давление газа при постоянной температуре прямо пропорционально концентрации его молекул. Распределение молекул в поле сил тяжести (распределение Больцмана) имеет вид

$$N = N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{E_п}{kT}} = N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{m_0gh}{kT}}\,, \qquad (10.3)$$

где k – постоянная Больцмана.

С учетом (10.3), из (10.2) получаем, что давление газа на глубине h определяется как

$$p = p_0\,\mathrm{e}^{\frac{m_0gh}{kT}} = p_0\,\mathrm{e}^{\frac{mgh}{\nu RT}}\,1\,\text{атм}\cdot\mathrm{e}^{\frac{29\cdot 9{,}8\cdot 8\cdot 10^3}{8{,}31\cdot 10^3\cdot 3\cdot 10^2}} = 1\,\text{атм}\cdot\mathrm{e}^{0{,}91} \approx 2{,}48\,\text{атм} \approx$$
$$\approx 3{,}0\cdot 10^5\ \text{Па}$$

$$1\,\text{атм} \approx 1{,}013\cdot 10^5\ \text{Па}.$$

Ответ. $p = 3{,}0\cdot 10^5$ **Па.**

Задача 3. Используя функцию распределения молекул идеального газа по относительным скоростям $f(u) = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}u^2\,\mathrm{e}^{-u^2}$, где $u = \dfrac{v}{v_в}$, определить число молекул, скорости которых v меньше $0{,}002 v_в$, если в объеме газа содержится $N = 1{,}67\cdot 10^{24}$ молекул.

Дано:
$N = 1{,}670\cdot 10^{24}$;
$v < 0{,}002\,v_в$

Найти: $\Delta N(u)$

Решение. Число молекул $dN(u)$, относительные скорости которых заключены в интервале от u и до $u + du$, можно определить, используя распределение Максвелла

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} Nu^2 e^{-u^2} du\ , \qquad (10.4)$$

где N – число молекул в объеме газа.

По условию задачи максимальная скорость молекул газа

$$v_{max} = 0{,}002 v_в.$$

Поэтому

$$u_{max} = \frac{v_{max}}{v_в} = 0{,}002. \qquad (10.5)$$

Из (10.5) следует, что относительная скорость u << 1. Следовательно, экспоненту e^{-u^2} можно разложить в ряд и пренебречь членом u^2 в этом разложении

$$e^{-u^2} \approx 1 - u^2 \approx 1. \qquad (10.6)$$

С учетом (10.6) выражение (10.4) будет иметь вид

$$dN(u) \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} Nu^2 du. \qquad (10.7)$$

Проинтегрировав (10.7) по u от 0 до u_{max}, найдем искомое число молекул газа

$$\Delta N(u_{max}) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \int_0^{u_{max}} u^2 du = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \frac{u_{max}^3}{3},$$

$$\Delta N(u_{max}) = \frac{4 \cdot 1{,}670 \cdot 10^{24} \cdot 0{,}002^3}{\sqrt{3{,}14} \cdot 3} = 1{,}0 \cdot 10^{16}.$$

Ответ. $\Delta N = 1{,}0 \cdot 10^{16}$ **молекул газа.**

З а д а ч и

4 балла

10.1 Чему равна масса водорода в сосуде, если число его молекул $1{,}4 \cdot 10^{22}$.
Ответ. $m = 4{,}7 \cdot 10^{-5}$ **кг**.

10.2 В сосуде объемом 480 см^3 при температуре 20 °С и давлении 250 кПа находится идеальный газ. Сколько молекул газа находится в сосуде?
Ответ. $N = 3 \cdot 10^{22}$.

10.3 При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода равна 500 м/с?
Ответ. $T = 321$ **К**.

10.4 Идеальный газ находится при температуре 300 К. Чему равно давление газа, если концентрация молекул $n = 1{,}0 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$?
Ответ. p **= 414 Па**.

10.5 Найти среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул двухатомного идеального газа при температуре 500 К.
Ответ. $\overline{E}_к = 1{,}7 \cdot 10^{-20}$ **Дж**.

10.6 Чему равна наиболее вероятная скорость молекул водорода при температуре 900 К?
Ответ. $v_в$ **= 2735 м/с**.

10.7 Во сколько раз отличаются концентрации молекул воздуха, находящихся при температуре 200 К на высотах, разность которых $\Delta h = h - h_0 = 1000$ м?
Ответ. $n = 0{,}84$ **раза**.

10.8 Чему равно давление воздуха на высоте 500 м над поверхностью Земли? Температура воздуха $T = 300$ К, давление на поверхности земли $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па. Молекулярную массу воздуха считать равной $28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.
Ответ. $p = 94 \cdot 10^3$ **Па.**

10.9 Средняя квадратичная скорость движения молекул кислорода 460 м/с. Чему равна средняя квадратичная скорость молекул азота при той же температуре?

Ответ. $\overline{v}_{кв}$ = 492 **м/с**.

10.10 Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул двухатомного газа при температуре 500 К.

Ответ. $\overline{E}_к = 7 \cdot 10^{-21}$ **Дж.**

5–6 баллов

10.11 Найти число молекул водорода в единице объема сосуда при давлении 266,6 Па, если среднеквадратичная скорость его молекул равна 2,4 км/с.

Ответ. $n = 4{,}2 \cdot 10^{22}$ **м**$^{-3}$.

10.12 Какое число атомов и молекул содержится в 2 кг парообразного йода (I_2), степень диссоциации которого равна 0,5? Молярная масса молекулярного йода равна 254 г/моль.

Ответ. $N = 7{,}0 \cdot 10^{24}$.

10.13 Какое число молекул содержится в комнате объемом 80 м^3 при температуре 17 °С и давлении 100 кПа? Чему равна их концентрация?

Ответ. $N = 2{,}0 \cdot 10^{27}$; $n = 2{,}5 \cdot 10^{25}$ **м**$^{-3}$.

10.14 В баллоне объемом 3 л находится кислород массой 4 г. Определить массу молекулы кислорода, количество вещества газа и концентрацию его молекул.

Ответ. $m = 5{,}320 \cdot 10^{-26}$ **кг;** $\nu = 0{,}125$ **моль;** $n = 2{,}510 \cdot 10^{25}$ **м**$^{-3}$.

10.15 Найти импульс молекулы водорода при температуре 20 °С, считая скорость молекулы равной ее среднеквадратичной скорости.

Ответ. $p = 6{,}35 \cdot 10^{-24}$ **кг·м/с.**

10.16 Колба объемом 4 л содержит некоторый газ массой 0,6 г под давлением 200 кПа. Определить среднеквадратичную скорость молекул газа.
Ответ. $\overline{v}_{кв} = 2{,}0 \cdot 10^3$ **м/с.**

10.17 При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной скорости на 100 м/с?
Ответ. $T = 381$ K.

10.18 Плотность газа при давлении 0,2 МПа и температуре 7 °С 2,41 кг/м^3. Какова молярная масса этого газа? Вычислить также концентрацию молекул газа и массу одной его молекулы.
Ответ. $M = 28 \cdot 10^{-3}$ **кг/моль;** $n = 5{,}17 \cdot 10^{25}$ **м**$^{-3}$; $m_0 = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ **кг.**

10.19 В сосуде объемом 2,24 л находится кислород при нормальных условиях. Определить количество вещества, массу газа и концентрацию его молекул в сосуде.
Ответ. $\nu = 0{,}10$ **моль;** $m = 3{,}20 \cdot 10^{-3}$ **кг;** $n = 2{,}69 \cdot \cdot 10^{25}$ **м**$^{-3}$.

10.20 Среднеквадратичная скорость молекул некоторого газа 450 м/с. Давление газа 50 кПа. Найти плотность газа при этих условиях.
Ответ. $\rho = 0{,}741$ **кг/м**^{3}.

10.21 Плотность некоторого газа $8{,}2 \cdot 10^{-5}$ г/см^3 при давлении 100 кПа и температуре 17 °С. Найти молярную массу газа и среднеквадратичную скорость его молекул.
Ответ. $M = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ **кг/моль;** $\overline{v}_{кв} = 1{,}9 \cdot 10^3$ **м/с.**

10.22 Среднеквадратичная скорость молекул некоторого газа при температуре 27 °С $\overline{v}_{кв} = 500$ м/с. Сколько молекул содержится в 10 г газа и чему равна кинетическая энергия их поступательного движения?
Ответ. $N = 2{,}01 \cdot 10^{23}$; $W_к = 1{,}25$ **кДж.**

10.23 Определить плотность газа в колбе электрической лампы накаливания, если молекулы газа производят на стенку

колбы давление 80 кПа и квадрат средней скорости поступательного движения молекул составляет $2{,}5\cdot10^5$ м^2/с^2.
Ответ. $\rho = 0{,}96$ **кг/м^3.**

7−8 баллов

10.24 В сосуде вместимостью $V = 0{,}3$ л при температуре $T = 290$ К находится некоторый газ. На сколько понизится давление газа в сосуде, если из-за утечки из сосуда выйдет $N = 1{,}0\cdot10^{19}$ молекул?
Ответ. $\Delta p = 133{,}4$ **Па.**

10.25 Сколько молекул углекислого газа (CO_2) содержится в баллоне объемом 30 л при температуре 27 °С и давлении 5 МПа? Чему равна их среднеквадратичная скорость и кинетическая энергия поступательного движения?
Ответ. $N = 3{,}62\cdot10^{25}$; $\overline{v}_{кв} = 412$ **м/с;** $W_к = 225$ **кДж.**

10.26 Сколько молекул водорода находится в сосуде объемом $1{,}0\cdot10^{-3}$ м^3, если среднеквадратичная скорость движения его молекул 500 м/с, а давление на стенки сосуда 1,0 кПа? Чему равна температура газа и концентрация его молекул?
Ответ. $N = 3{,}6\cdot10^{21}$; $T = 20$ **К**; $n = 3{,}6\cdot10^{24}$ **м$^{-3}$**.

10.27 Найти молярную массу воздуха, считая его смесью, состоящей из 76 % азота, 23 % кислорода и 1 % аргона. Сколько молекул содержится в 1,0 м^3 этой смеси при нормальных условиях ($T = 273$ К, $p = 101325$ Па).
Ответ. $M \approx 0{,}029$ **кг/моль;** $N = 2{,}7\cdot10^{25}$.

10.28 В баллоне объемом 10 л находится гелий под давлением 1 МПа и температуре 27 °С. После того, как из баллона было взято 10 г гелия, температура в баллоне понизилась до 17 °С. Определить давление гелия, оставшегося в баллоне.
Ответ. $p = 363$ **кПа.**

10.29 В баллоне находилось 10 кг газа при давлении 10 МПа при постоянной температуре. Какую массу газа выпустили из баллона, если давление стало 2,5 МПа, а температура газа не изменилась?

Ответ. m **= 7,5 кг.**

10.30 Смесь гелия (M_{He_2} = $4{,}0\cdot10^{-3}$ кг/моль) и аргона (M_{Ar} = $40{,}0\cdot10^{-3}$ кг/моль) находится при температуре 1200 К. Определить среднеквадратичную скорость и среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы этих газов.

Ответ. $\overline{v}_{кв\ He_2}$ = 2735 **м/с**; $\overline{v}_{кв\ Ar}$ = 865 **м/с**; $\overline{E}_к$ = $2{,}5\cdot10^{-20}$ **Дж**.

10.31 Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы кислорода $7{,}25\cdot10^{-21}$ Дж, а кинетическая энергия поступательного и вращательного движений всех молекул этого газа в сосуде составляет 364 Дж. Вычислить температуру и массу газа в сосуде.

Ответ. T **= 350 К;** $m = 1{,}6\cdot10^{-3}$ **кг**.

10.32 Найти среднеквадратичную скорость молекул азота при температуре 27 °С, а также среднюю кинетическую энергию поступательного и вращательного движения молекулы азота при той же температуре. Вычислить полную кинетическую энергию одной молекулы и полную кинетическую энергию 0,1 кг этого газа при тех же условиях.

Ответ. $\overline{v}_{кв}$ = 517 **м/с;** $\overline{E}_к^{\,пост}$ = $6{,}21\cdot10^{-21}$ **Дж;** $\overline{E}_к^{\,вращ}$ = $4{,}14\cdot10^{-21}$ **Дж;** $\overline{E}_к$ = $1{,}04\cdot10^{-20}$ **Дж;** $W_к$ = 22,36 **кДж.**

10.33 Закрытый сосуд объемом 2 л наполнен воздухом при нормальных условиях (T = 273 К, p = 101325 Па). В сосуд вводится диэтиловый эфир ($C_2H_5OC_2H_5$) при той же температуре. После того, как весь эфир испарился, давление в сосуде стало равным 0,14 МПа. Какая масса эфира введена в сосуд?

Ответ. $m = 2{,}52\cdot10^{-3}$ **кг.**

10.34 В сосуде находится смесь кислорода и водорода. Масса смеси 3,6 г. Массовая доля кислорода составляет 0,6. Найти молярную массу смеси. Определить полное количество вещества смеси, а также количество вещества каждого газа в отдельности.

Ответ. $M = 4{,}6\cdot10^{-3}$ **кг/моль;** $\nu = 787{,}5\cdot10^{-3}$ **моль;** $\nu_1 = 67{,}5\cdot10^{-3}$ **моль;** $\nu_2 = 0{,}72$ **моль.**

10.35 Определите отношение давления воздуха ($M = 0{,}029$ кг/моль) на высоте 1 км к давлению на дне скважины глубиной 1 км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях ($T = 273$ К, $p = 101325$ Па), а его температура не зависит от высоты.

Ответ. $\dfrac{p_1}{p_2} = 0{,}778$.

10.36 В баллоне емкостью 2 м^3 содержится смесь азота (N_2) и оксида азота (NO). Определить массу оксида азота при температуре 300 К и давлении $0{,}6\cdot10^6$ Па, если масса смеси 14 кг.

Ответ. $m_2 = 7{,}83$ **кг.**

10.37 В баллоне объемом 1 л находится азот при нормальных условиях ($T = 273$ К, $p = 101325$ Па). Когда азот нагрели до температуры 1800 К, то часть молекул азота оказались диссоциированными (распавшимися) на атомы. Степень диссоциации $\alpha = 0{,}3$. Определить: 1) количество вещества ν_1 и концентрацию n_1 молекул азота до нагревания; 2) количество вещества ν_2 и концентрацию n_2 молекул молекулярного азота после нагревания; 3) количество вещества ν_3 и концентрацию n_3 атомов атомарного азота после нагревания; 4) полное количество вещества ν_4 и концентрацию n_4 частиц в сосуде после нагревания. Диссоциацией молекул азота при нормальных условиях пренебречь.

Ответ. $\nu_1 = 44{,}6\cdot10^{-3}$ **моль;** $\nu_2 = 31{,}2\cdot10^{-3}$ **моль;** $\nu_3 = 26{,}8\cdot10^{-3}$ **моль;** $\nu_4 = 58{,}0\cdot10^{-3}$ **моль;** $n_1 = 2{,}7\cdot10^{25}$ **м**$^{-3}$; $n_2 = 1{,}9\cdot10^{25}$ **м**$^{-3}$; $n_3 = 1{,}6\cdot10^{25}$ **м**$^{-3}$; $n_4 = 3{,}5\cdot10^{25}$ **м**$^{-3}$.

10.38 Используя функцию распределения молекул идеального газа по скоростям, найдите формулу наиболее вероятной скорости.

Ответ. $v_в = (2kT/m_0)^{1/2}$.

10.39 Какая часть молекул сернистого ангидрида (SO_2) при температуре 200 °С обладает скоростями в пределах 210–220 м/с, 420–430 м/с? Молярная масса серы 0,032 кг/моль.

Ответ. $\Delta N/N = 1{,}6$ %; $\Delta N/N = 2{,}8$ %.

10.40 Вакуум в рентгеновской трубке составляет $1{,}0 \cdot 10^{-6}$ мм. рт. ст. при температуре 15 °С. Во сколько раз длина свободного пробега электрона в этих условиях больше расстояния между катодом и анодом в трубке, равного 50 мм? Принять, что средняя длина свободного пробега электронов в газе в 5,7 раза больше, чем средняя длина свободного пробега молекул самого газа. Значение эффективного диаметра молекулы воздуха принять равным $3{,}0 \cdot 10^{-10}$ м.

Ответ. $n = 8550$.

10.41 Вычислить массу столба воздуха высотой 1000 м и сечением 1,0 м^2, если плотность воздуха у поверхности Земли $\rho_0 = 1{,}2$ кг/м^3, а давление $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па. Температуру воздуха считать всюду одинаковой.

Ответ. $m = 1{,}13 \cdot 10^3$ **кг.**

10.42 Найти вероятность того, что при $T = 300$ К молекулы азота имеют компоненты скорости вдоль осей x, y, z в интервале $(300 \pm 0{,}30)$ м/с; $(400 \pm 0{,}40)$ м/с; $(500 \pm 0{,}50)$ м/с.

Ответ. $\Delta N/N = 1{,}70 \cdot 10^{-11}$.

10.43 Какая часть одноатомных молекул газа, находящегося в тепловом равновесии, имеет кинетическую энергию, отличающуюся от ее среднего значения не более, чем на 1,0 %?

Ответ. $\Delta N/N = 0{,}9$ %.

9–10 баллов

10.44 Представьте себе высокий цилиндр, наполненный газом или жидкостью, плотность которых изменяется с высотой $\rho = \rho(h)$. Покажите, что зависимость давления от высоты в этом случае описывается дифференциальным уравнением $dp/dh = -\rho(h)g$.

10.45 Сосуд объемом 50 л соединен с сосудом объемом 15 л с помощью короткой трубки, в которой имеется клапан давления, позволяющий газу просачиваться из большого сосуда в малый, если давление в большом превышает давление в меньшем на 880 мм. рт. ст. При $t = 17$ °C больший сосуд содержит газ при атмосферном давлении, а меньший – полностью откачан. Каково будет давление в последнем, если оба сосуда нагреть до 162 °C.
Ответ. $p = 26{,}7\cdot10^3$ **Па**.

10.46 Найти для газообразного азота при $T = 300$ K отношение числа молекул с компонентами скорости вдоль оси x (300 ± 0,31) м/с к числу молекул с компонентами скорости вдоль той же оси (500 ± 0,51) м/с.
Ответ. $N_1/\Delta N_2 = 1{,}50$.

10.47 Найти относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не более, чем на 1,00 % от значения: а) наиболее вероятной скорости; б) средней квадратичной скорости.
Ответ. $\Delta N/N = 1{,}66$ %; $\Delta N/N = 1{,}85$ %.

10.48 Прямоугольная пластинка размером 4 см на 10 см помещена в газ с температурой 300 К при давлении 1 атм. Одна поверхность пластинки имеет такую же температуру, а половинки другой имеют температуру на 1 °C выше и ниже температуры газа соответственно. Определить вращающий момент, действующий на пластинку со стороны газа, и среднее дополнительное давление.
Ответ. $M = 1{,}68\cdot10^{-2}$ **Н·м;** $p = 169$ **Па**.

10.49 Какая доля молекул газа (газ находится в тепловом равновесии), достигающих в единицу времени поверхности сосуда, обладает кинетической энергией: а) большей, чем средняя тепловая; б) в 3 раза большей, чем средняя тепловая?
Ответ. $(\Delta N/N)_1 = 0{,}55$; $(\Delta N/N)_2 = 0{,}061$.

10.50 Пользуясь уравнением Клапейрона−Менделеева и имея в виду, что атмосферное давление изменяется с высотой по закону $dp = -\rho g dH$, вывести формулу изменения давления с выстой с учетом понижения температуры (температурный градиент $dT/dH = -a$, молярная масса воздуха равна μ).

Ответ. $\ln\dfrac{p}{p_0} = \mu g/aR \cdot \ln(1 - aH/T_0)$.

11. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Краткие теоретические сведения

Первое начало термодинамики в интегральной и дифференциальной формах соответственно

$$Q = \Delta U + A, \ \ \delta Q = dU + \delta A,$$

где Q – количество теплоты, переданное системе;

δQ – элементарное количество теплоты, переданное системе;

ΔU – изменение внутренней энергии системы;

dU – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы;

A – работа, совершаемая системой против внешних сил;

δA – элементарная работа, совершаемая системой против внешних сил.

Работа, совершаемая газом при изменении его объема

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV ,$$

где p – давление газа;

V_1, V_2 – начальный и конечный объемы газа.

Внутренняя энергия и изменение внутренней энергии идеального газа

$$U = \nu \frac{i}{2} RT = \frac{m}{M}\frac{i}{2} RT , \quad \Delta U = \nu \frac{i}{2} R\Delta T = \frac{m}{M}\frac{i}{2} R\Delta T ,$$

где ν – количество вещества;

m – масса газа;

M – молярная масса газа;

i – число степеней свободы молекулы.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну поступательную степень свободы молекулы:

$$\overline{E} = \frac{1}{2}kT,$$

где k – постоянная Больцмана.

Средняя энергия молекулы

$$\overline{E} = \frac{i}{2}kT,$$

где $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{колеб}}$ – число степеней свободы молекулы газа, включающее поступательные $i_{\text{пост}}$, вращательные $i_{\text{вр}}$ и колебательные $i_{\text{колеб}}$ степени свободы.

Теплоемкость газа

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Удельная теплоемкость газа

$$c = \frac{1}{m}\frac{\delta Q}{dT}.$$

Молярная теплоемкость газа

$$C_M = \frac{1}{\nu}\frac{\delta Q}{dT}.$$

Связь молярной *C* и удельной *c* теплоемкостей газа

$$C_M = c \cdot M.$$

Молярные теплоемкости идеального газа при постоянном объеме и постоянном давлении

$$C_v = \frac{i}{2}R, \qquad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

Уравнение Майера

$$C_p = C_v + R.$$

Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона) имеет вид

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad T^{\gamma}p^{1-\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} = \dfrac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты.

Уравнение изотермического процесса

$$pV = \text{const}.$$

Уравнение политропного процесса

$$pV^{n} = \text{const},$$

где $n = \dfrac{C_p - C_n}{C_v - C_n}$ – показатель политропы;

C_n – теплоемкость при данном процессе.

Работа газа

а) **при изобарном процессе**

$$A = p(V_2 - V_1) \text{ или } A = \nu R(T_2 - T_1);$$

б) **при изотермическом процессе**

$$A = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1} \text{ или } A = \nu RT \ln\frac{p_1}{p_2};$$

в) **в случае адиабатного процесса** $A = \nu C_v(T_1 - T_2)$ или

$$A=\frac{RT_1 m}{(\gamma-1)M}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]=\frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где T_1, T_2, V_1, V_2 – соответственно начальные и конечные температуры и объемы газа;

г) **при политропном процессе**

$$A=\frac{RT}{(n-1)}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right].$$

Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины

$$\eta=\frac{A}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1},$$

где A – работа, совершенная рабочим веществом в течение цикла;

Q_1 – количество теплоты, полученной от нагревателя;

Q_2 – количество теплоты, отданное им холодильнику.

Коэффициент полезного действия (КПД) **идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно**

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}=1-\frac{T_2}{T_1},$$

где T_1 и T_2 – температуры нагревателя и холодильника, соответственно.

Изменение энтропии тела в любом обратимом процессе, переводящем его из состояния *A* в состояние *B*:

$$S_B-S_A=\int_A^B\frac{\delta Q}{T},$$

где δQ – элементарное количество теплоты, полученное веществом при температуре T.

Связь между энтропией и термодинамической вероятностью Ω (статистическим весом Ω)

$$S = k \ln\Omega,$$

где k – постоянная Больцмана.

Примеры решения задач

Задача 1. В закрытом сосуде объемом 10 л находится воздух при давлении 0,1 МПа. Какое количество теплоты надо сообщить воздуху, чтобы повысить давление в сосуде в 5 раз?

Дано:
$V = 10\cdot10^{-3}$ м^3;
$p_1 = 0{,}1\cdot10^6$ Па;
$p_2 = 5p_1$

Найти: Q

Решение. Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты

$$Q = \Delta U + A.$$

Внутренняя энергия идеального газа пропорциональна температуре:

$$U = C_V T,$$

где C_V – теплоемкость при постоянном объеме: $C_V = \frac{i}{2}\nu R$;

i – число степеней свободы молекулы вещества.

Для воздуха $i = 5$.

Выразим начальную температуру T_1 из уравнения состояния идеального газа

$$T_1 = \frac{p_1 V}{\nu R}.$$

Температуру T_2 выразим из закона Гей-Люссака

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} = \eta, \quad T_2 = \eta T_1.$$

Тогда

$$Q = C_v(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}(\eta - 1)p_1 V = \frac{5}{2} 4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2} = 10000 \text{ Дж} =$$
$$= 10{,}0 \text{ кДж}.$$

Ответ. $Q = 10{,}0$ **кДж.**

Задача 2. Азот (N_2), адиабатически расширяясь, совершает работу, равную 480 кДж. Определить конечную температуру газа, если до расширения он имел температуру $T_1 = 362$ К. Масса азота $m = 12$ кг. Теплоемкость газа считать постоянной.

Дано:
N_2;
$Q = 0$;
$A = 480 \cdot 10^3$ Дж;
$T_1 = 362$ К;
$m = 12$ кг

Найти: T_2

Решение. Вычислим работу газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV.$$

Учитывая, что адиабатический процесс описывается уравнением вида

$$pV^\gamma = C, \qquad (11.1)$$

где $C = \text{const}$,
из равенства (11.1) получим

$$p = \frac{C}{V^\gamma},$$

Тогда работа

$$A=\int_{V_1}^{V_2}\frac{C}{V^{\gamma}}dV=C\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^{\gamma}}=\left.\frac{CV^{1-\gamma}}{\gamma-1}\right|_{V_1}^{V_2}=\frac{CV_1^{1-\gamma}-CV_2^{1-\gamma}}{\gamma-1}. \quad (11.2)$$

С учетом (11.1) получаем

$$\begin{aligned}V_1^{1-\gamma}\cdot p_1V_1^{\gamma}&=V_1\cdot p_1\\ V_2^{1-\gamma}\cdot p_2V_2^{\gamma}&=V_2\cdot p_2\end{aligned}. \quad (11.3)$$

Подставляем в (11.2) выражение (11.3)

$$A=\frac{1}{\gamma-1}\left(p_1V_1-p_2V_2\right).$$

Используя уравнение Менделеева − Клапейрона

$$p_1V_1=\frac{m}{M}RT_1,$$

$$p_2V_2=\frac{m}{M}RT_2,$$

а также

$$\frac{C_p}{C_v}=\gamma=\frac{i+2}{2}=\frac{7}{2},$$

получаем выражение для работы

$$A=\frac{m}{M}R\frac{1}{\gamma-1}(T_1-T_2).$$

Следовательно, конечная температура газа

$$T_2=T_1-A\cdot\frac{M}{m}\cdot\frac{\gamma-1}{R}.$$

$$T_2 = 362 - \frac{48 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot \left(\frac{7}{2} - 1 \right)}{12 \cdot 8{,}31} = 25 \text{ К}.$$

Ответ. $T_2 = 25$ **К**.

Задача 3. Воздух массой 1 кг совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Минимальные (начальные) значения объема и давления газа равны 0,08 м^3 и 1,2 МПа. Максимальное давление газа в цикле 1,4 МПа, причем $T_3 = 423$ К. Определить: 1) координаты пересечения изохор и изобар; 2) работу A, совершенную газом за один цикл; 3) количество теплоты Q_1, полученное газом от нагревателя за цикл; 4) КПД цикла. Считать воздух двухатомным газом, имеющим молярную массу $M = 0{,}029$ кг/моль. Построить график процесса.

Дано:
$V_1 = 0{,}08$ м^3;
$p_1 = 1{,}2 \cdot 10^6$ Па;
$p_2 = 1{,}4 \cdot 10^6$ Па;
$T_3 = 423$ К;
$m = 1$ кг;
$M = 0{,}029$ кг/моль

Найти: T_1; T_2; V_2; T_4; A; Q_1; η

Решение. 1. Для двухатомных газов число степеней свободы $i = 5$, количество вещества газа $\nu = m/M$.

В нашем случае

$$\nu = 1/0{,}029 \text{ моль} = 34{,}5 \text{ моль}.$$

Согласно условию $p_4 = p_1$ и $p_3 = p_2$.

Запишем уравнение Менделеева − Клапейрона для состояния 1:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1,$$

откуда

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R}.$$

В результате

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R} = \frac{1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}08}{34{,}5 \cdot 8{,}31} = 335 \text{ К}.$$

Для изохорного процесса 1→2 справедлив закон Шарля

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2},$$

откуда

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2 V_1}{\nu R} = \frac{1{,}4 \cdot 10^6 \cdot 0{,}08}{34{,}5 \cdot 8{,}31} = 391 \text{К}.$$

Для состояния 3, уравнение Менделеева − Клапейрона имеет вид

$$p_2 V_2 = \nu R T_3,$$

из которого следует, что

$$V_2 = \frac{\nu R T_3}{p_2}.$$

После вычислений получаем

$$V_2 = \frac{34{,}5 \cdot 8{,}31 \cdot 423}{1{,}4 \cdot 10^6} = 0{,}087 \text{ м}^3.$$

Для изохорного процесса 3→ 4 закон Шарля имеет вид

$$\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4},$$

откуда следует, что

$$T_4 = T_3 \frac{p_4}{p_3} = T_3 \frac{p_1}{p_2} = \frac{1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 423}{1{,}4 \cdot 10^6} = 363 \text{К}.$$

2. Для изохорных процессов 1→ 2 и 3→ 4 работа газа равна нулю, т.е. $A_{12} = A_{34} = 0$, поскольку для них $V = \text{const}$. Для изобарных процессов 2→ 3 и 4→ 1 работа газа соответственно будет

$$A_{23} = p_2(V_2 - V_1) > 0,$$
$$A_{14} = p_1(V_1 - V_2) < 0.$$

В итоге работа газа за цикл численно равна площади прямоугольника 1–2–3–4 (рис. 11.1), т.е.

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$

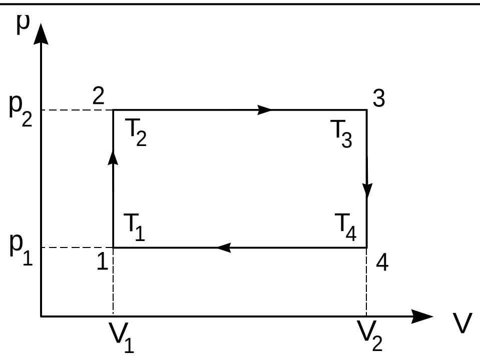

Рис.11.1

В результате вычислений получаем

$$A = 0{,}2 \cdot 10^6 (0{,}0866 - 0{,}08) \text{ Дж} = 1320 \text{ Дж}.$$

3. Количество теплоты Q_{12}, полученное газом при изохорном процессе $1 \to 2$:

$$Q_{12} = \nu C_V (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} R\nu (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} V_1 \nu (p_1 - p_2) .$$

Вычисления приводят к результату

$$Q_{12} = \frac{5}{2} \cdot 0{,}08 \cdot (1{,}4 \cdot 10^6 - 1{,}2 \cdot 10^6) \text{ Дж} = 40000 \text{ Дж}.$$

Количество теплоты Q_{23}, полученное газом при изобарическом процессе 2→3:

$$Q_{23} = \nu C_p(T_3 - T_2) = \frac{i+2}{2} R\nu(T_3 - T_2) = \frac{i+2}{2}(\nu R T_3 - p_2 V_1).$$

При расчете получаем

$$Q_{23} = \frac{7}{2}\cdot(34{,}5\cdot 8{,}31\cdot 423 - 1{,}4\cdot 10^6\cdot 0{,}08)\ \text{Дж} = 32500\ \text{Дж}.$$

Учитывая, что $T_3 > T_2 > T_4 > T_1$, то для изохорного процесса 3→4 и изобарного процесса 4→1 соответственно имеем

$$Q_{34} = \nu C_v(T_4 - T_3) < 0 \ \text{ и } \ Q_{41} = \nu C_p(T_1 - T_4) < 0. \quad (11.22)$$

Очевидно, что

$$Q_{34} + Q_{41} = -Q_2, \qquad (11.23)$$

где Q_2 – количество теплоты, отданное холодильнику за цикл ($Q_2 > 0$).

В результате за цикл газ получает от нагревателя количество теплоты

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = (40+32{,}5)\ \text{кДж} = 72500\ \text{Дж}.$$

4. Термический КПД цикла по определению

$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

В результате вычислений получаем

$$\eta = \frac{1320}{72500} = 0{,}018 \text{ или } \eta = 1{,}8\ \%.$$

График процесса имеет вид, показанный на рис. 11.1.

Ответ. $T_1 = 385$ К; $T_2 = 391$ К; $V_2 = 0{,}087$ **м**^{3}; $T_4 = 363$ К; $A =$ $= 1320$ **Дж**; $Q_1 = 72500$ **Дж**; $\boldsymbol{\eta} = 1{,}8$ %.

З а д а ч и

4 балла

11.1 Получить выражения первого начала термодинамики для следующих процессов: а) изохорного; б) изобарного; в) изотермического; г) адиабатного.

11.2 Давление идеального газа в зависимости от объема изменяется по закону $p = aV^2$, где a – постоянная величина. Найти работу, совершенную газом, если его объем изменился от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 2$ м^3.
Ответ. $A = \frac{7}{3}a$ **Дж.**

11.3 Чему равны молекулярные теплоемкости двухатомного газа при постоянном объеме и давлении?
Ответ. C_v **= 20,8 Дж/(моль·К);** C_p **= 29,1 Дж/(моль·К).**

11.4 Найти показатель адиабатного одноатомного газа.
Ответ. $\gamma = 1{,}7$.

11.5 Температура плавления алюминия 660 °С. Найти изменение энтропии при плавлении 0,2 кг алюминия. Удельная теплота плавления алюминия $\lambda = 322 \cdot 10^3$ Дж/кг.
Ответ. $\Delta S = 69{,}0$ **Дж/К.**

11.6 Чему равно изменение внутренней энергии 1 моль идеального двухатомного газа, если его температура повысилась на 10 К.
Ответ. $\Delta U = 208$ **Дж.**

11.7 Определить коэффициент полезного действия идеального теплового двигателя, если температура нагревателя T_1 = 500 К, температура холодильника T_2 = 300 К.
Ответ. η = 40 %.

11.8 Чему равно число степеней свободы трехатомной молекулы с жесткими связями между ее атомами?
Ответ. i = 6.

11.9 При изотермическом процессе объем газа увеличивается. Отдает или получает газ теплоту от внешнего источника? Почему?
Ответ. Газ теплоту получает.

5–6 баллов

11.10 При изобарическом расширении двухатомного газа была совершена работа 156,8 Дж. Какое количество теплоты было сообщено газу?
Ответ. Q **= 548,8 Дж.**

11.11 Найти полную кинетическую энергию всех молекул двухатомного газа, находящегося в сосуде объемом 2 л под давлением 150 кПа.
Ответ. $W_к$ **= 750 Дж.**

11.12 Баллон емкостью 50 л содержит аргон под давлением 200 кПа. Найти давление аргона, если газу сообщили 3 кДж теплоты.
Ответ. p = 240 **кПа.**

11.13 Определить количество теплоты, которое надо сообщить кислороду объемом 50 л при его изохорном нагревании, чтобы давление газа повысилось на 0,5 МПа.
Ответ. Q **= 62,5 кДж.**

11.14 Трехатомный газ под давлением 240 кПа и температуре 20 °С занимает объем 10 л. Определить теплоемкость этого газа при постоянных давлении и объеме.
Ответ. C_p **= 32,8 Дж/К;** C_V **= 24,6 Дж/К.**

11.15 В баллоне находится 10 г азота. Одна треть его молекул распалась на атомы. Определить полное число молекул, находившихся в баллоне, число атомов и молекул после распада, вычислить молярные теплоемкости C_p и C_v этих частиц.

Ответ. $N = 2{,}15 \cdot 10^{23}$; $N_1 = 1{,}43 \cdot 10^{23}$; $N_2 = 1{,}43 \cdot 10^{23}$; $C_v^{N} = 12{,}47$ **Дж/К·моль;** $C_p^{N} = 20{,}78$ **Дж/К·моль**; $C_v^{N_2} = 20{,}78$ **Дж/К·моль;** $C_p^{N_2} = 29{,}09$ **Дж/К·моль.**

11.16 При изотермическом расширении 2 кг азота при температуре 7 °С его объем увеличился в 2 раза. Определить работу расширения газа, изменение внутренней энергии и количество теплоты, полученных газом в этом процессе.

Ответ. $A = 115$ **кДж;** $\Delta U = 0$ **Дж;** $Q = 115$ **кДж.**

11.17 Двухатомный идеальный газ расширяется изотермически от объема 100 л до объема 300 л. Конечное давление газа равно 200 кПа. Определить изменение внутренней энергии газа, совершенную газом работу и количество полученного газом тепла.

Ответ. $\Delta U = 0$ **Дж;** $A = 65{,}9$ **кДж;** $Q = 65{,}9$ **кДж.**

11.18 Объем аргона, находящегося при давлении 80 кПа, увеличивается от 1 л до 2 л. Найти изменение внутренней энергии газа в двух случаях: при изобарном и адиабатическом расширении газа.

Ответ. $\Delta U_P = 120$ **Дж**; $\Delta U_Q = -44{,}4$ **Дж**.

11.19 Определить молярную массу двухатомного газа и его удельные теплоемкости c_p и c_v, если известно, что разность последних 260,0 Дж/(кг·К). Вычислить также молярные теплоемкости этого газа C_p и C_v.

Ответ. $M = 32 \cdot 10^{-3}$ **кг/моль;** $c_p = 909{,}4$ **Дж/(кг·К);** $c_v = 649{,}4$ **(Дж/кг·К);** $C_p = 29{,}1$ **Дж/(моль·К);** $C_v = 20{,}8$ **Дж/(моль·К)** .

11.20 Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находится под давлением $p_1 = 250$ кПа и занимает объем $V_1 = 10$ л. Сначала газ изохорически нагревают до температуры $T_2 = 400$ *К*. Далее, изотермически расширяя, доводят его до первоначального давления p_1. После этого путем изобарического сжатия возвращают газ в начальное состояние. Определить температуру характерных точек цикла. Построить график процесса.

Ответ. T_1 **= 301 К**; $T_2 = T_3 = 400$ *К*.

7−8 баллов

11.21 Двухатомному газу сообщено 2,093 кДж теплоты. Газ расширяется изобарически. Найти работу расширения газа и изменение его внутренней энергии.

Ответ. A **= 598 Дж;** ΔU **= 1495 Дж.**

11.22 Идеальный двухатомный газ совершает цикл Карно. Объем газа в конце изотермического расширения $V_2 = 12$ л, а в конце адиабатического расширения этот объем $V_3 = 16$ л. Найти отношение температуры нагревателя к температуре холодильника и КПД цикла. Нарисовать график процесса.

Ответ. $T_1/T_2 = 1{,}122$; $\eta = 11$ %.

11.23 Определить показатель адиабаты идеального газа при температуре 77 °С и давлении 0,4 МПа, если газ занимает объем 300 л и имеет теплоемкость при постоянном объеме 857 Дж/*К*. Найти также число степеней свободы молекул данного газа.

Ответ. $\gamma = 1{,}4$; $i = 5$.

11.24 Плотность некоторого двухатомного газа при нормальных условиях 1,43 кг/м^3. Найти его удельные теплоемкости c_p и c_V. Определить среднеквадратичную скорость молекул газа при тех же условиях.

Ответ. c_p = 909 **Дж/(кг·К);** c_V = 649 **Дж/(кг·К);** $\overline{v}_{кв}$ = = 461 **м/с.**

11.25 Двухатомный газ, находящийся под давлением 2 МПа и температуре 27 °С, адиабатически сжимается так, что объем уменьшается в 2 раза. Найти температуру и давление газа после сжатия.

Ответ. T **= 396 К;** p **= 5,28 МПа.**

11.26 Кислород массой 2 кг занимает объем 1 м^3 и находится под давлением 0,2 МПа. Газ был нагрет сначала изобарно до объема 3 м^3, затем изохорно до давления 0,5 МПа. Найти изменение внутренней энергии газа, совершенную им работу, и количество теплоты, переданное газу.

Ответ. ΔU **= 3,25 МДж;** A **= 0,4 МДж;** Q **= 3,65 МДж.**

11.27 Работа изотермического расширения 10 г некоторого газа, в результате которой его объем удвоился, оказалась равной 575 Дж. Найти среднеквадратичную скорость молекул газа. Вычислить кинетическую энергию поступательного движения всех молекул газа после расширения.

Ответ. $\overline{v}_{кв}$ **= 500 м/с;** $W_к$ **= 1,25 кДж.**

11.28 Идеальный двухатомный газ, находящийся при температуре 0 °С, подвергают двум независимым процедурам адиабатического сжатия. В результате первого сжатия объем газа уменьшается в 10 раз. В результате второго сжатия (при прежних начальных условиях) давление газа увеличивается в 10 раз. Определить температуру газа в результате каждого из этих двух процессов.

Ответ. T_1 = 686 **К;** T_2 **= 527 К.**

11.29 В закрытом сосуде объемом 2 л при нормальных условиях содержатся одинаковые массы азота и аргона. Какое количество теплоты надо сообщить этой газовой смеси, чтобы нагреть ее до 100 °С?

Ответ. Q **= 155 Дж.**

11.30 Определить удельную теплоемкость c_V смеси газов, содержащей 5 л водорода и 3 л гелия. Газы находятся при одинаковых условиях.

Ответ. c_V **= 6,42 кДж/(кг·К).**

11.31 Определить показатель адиабаты частично диссоциировавшего на атомы азота, степень диссоциации которого α = 0,4.

Ответ. γ = 1,52.

11.32 Вычислить число степеней свободы молекул газа, его удельные теплоемкости c_p и c_V, зная, что молярная масса газа

4 г/моль, а показатель адиабаты для него 1,67. Определить также молярные теплоемкости C_p и C_v данного газа.

Ответ. $i = 3$; $c_p = 20{,}78$ **Дж/(кг·К);** $c_v = 12{,}47$ **Дж/(моль·К);** $C_p = 5{,}20$ **кДж/(моль·К)**; $C_v = 3{,}13$ **кДж/кг·К.**

11.33 Идеальный трехатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление газа в 2 раза больше наименьшего, а наибольший объем в 4 раза больше наименьшего. Определить КПД цикла. Построить график цикла.

Ответ. $\eta = 11$ %.

11.34 Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль и находящийся под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа при температуре 27 °С, нагревают изохорно до давления $p_2 = 0{,}2$ МПа. После этого газ изотермически расширился до начального давления p_1 и затем изобарически был сжат до начального объема V_1. Построить график цикла. Определить температуру, давление и объем для характерных точек цикла. Найти: 1) количество теплоты, полученное газом от нагревателя за цикл; 2) количество теплоты, отданное газом холодильнику за цикл; 3) работу газа за цикл; 4) термический КПД цикла.

Ответ. Точка 1: ($p_1 = 0{,}10 \cdot 10^6$ **Па,** $T_1 = 300$ **К,** $V_1 = 24{,}93 \cdot 10^{-3}$ **м**^{3})**; точка 2:** ($p_2 = 0{,}20 \cdot 10^6$ **Па,** $T_2 = 600$ **К,** $V_1 = 24{,}93 \cdot 10^{-3}$ **м**^{3}); **точка 3:** ($p_1 = 0{,}10 \cdot 10^6$ **Па,** $T_3 = 600$ **К,** $V_3 = 49{,}86 \cdot 10^{-3}$ **м**^{3}); $Q_1 = 9{,}69$ **кДж;** $Q_2 = -8{,}73$ **кДж;** $A = 0{,}96$ **кДж;** $\eta = 9{,}9$ %.

11.35 Идеальный двухатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление в 3 раза больше наименьшего, а наибольший объем в 5 раз больше наименьшего. Определить КПД цикла. Построить график цикла.

Ответ. $\eta = 17$ %.

11.36 Идеальный трехатомный газ, состоящий из жестких молекул, нагревают изохорно так, что его давление возрастает в 2 раза. После этого газ изотермически расширяется до началь-

ного давления, а затем изобарно сжимается до начального объема. Определить КПД цикла. Нарисовать график термодинамического процесса.
Ответ. η = 8,8 %.

11.37 Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Воздух (считать его двухатомным газом) при давлении p_1 = 708 кПа и температуре t_1 = 127 °С занимает объем V_1 = 2 л. После изотермического расширения воздух занял объем V_2 = 5 л; после адиабатического расширения его объем стал V_3 = 8 л. Найти: 1) координаты пересечения изотерм и адиабат; 2) работу, совершаемую газом на каждом участке цикла; 3) КПД цикла; 4) полную работу, совершаемую газом за цикл; 5) количество теплоты Q_1, полученное от нагревателя за один цикл; 6) количество теплоты Q_2, отданное холодильнику за цикл. Построить график цикла.
Ответ. ($2\cdot10^{-3}$ м^3, 708 кПа,); ($5\cdot10^{-3}$ м^3, 283 кПа); ($8\cdot10^{-3}$ м^3, 147 кПа); ($3{,}21\cdot10^{-3}$ м^3, 365 кПа); A_1 = 1300 Дж; A_2 = 611 Дж; A_3 = –1070 Дж; A_4 = –611 Дж; η = 0,17; $A_{цикла}$ = 228 Дж; Q_1 = 1338 Дж; Q_2 = 1110 Дж.

11.38 Наименьший объем двухатомного газа, совершающего цикл Карно, V_1 = 153 л. Определить наибольший объем V_3, если объемы в конце изотермического расширения и в конце изотермического сжатия V_2 = 600 л и V_4 = 189 л. Определить, во сколько раз максимальная за цикл температура больше минимальной температуры, а также КПД цикла. Вычислить, во сколько раз максимальное давление за цикл больше, чем давление в трех остальных характерных точках цикла. Построить график процесса.
Ответ. V_3 = 0,741 м^3; T_{max}/T_{min} = 1,088; η = 8,1%; p_{max}/p_{min} = = 5,27.

11.39 Применяя первое начало термодинамики и уравнение состояния идеального газа, покажите, что разность удельных теплоемкостей $c_p - c_V = R/M$, где M – молярная масса.

11.40 Одноатомный газ, содержащий количество рабочего вещества ν = 0,1 кмоль, под давлением p_1 = 100 кПа занимал объем $V_1 = 5$ м^3. Газ сжимался изобарически до объема $V_2 = 1$ м^3, затем сжимался адиабатически и потом расширялся изотермически до начального объема V_1 и давления p_1. Построить график процесса. Найти: 1) температуры T_1 и T_2, объем V_3 и давление p_3, соответствующие характерным точкам цикла; 2) количество теплоты Q_1, полученное от нагревателя за цикл; 3) количество теплоты Q_2, переданное газом холодильнику за цикл; 4) работу, совершенную газом за весь цикл; 5) термический КПД цикла.

Ответ. $T_1 = 601{,}7$ K; $T_2 = 120{,}3$ K; $V_3 = 0{,}089$ **м^3**; $p_3 = 5{,}62$ **МПа;** $Q_1 = 2{,}01$ **МДж;** $Q_2 = 1$ **МДж**; $A = 1{,}0$ **МДж;** $\eta = 49{,}8$ %.

9 –10 баллов

11.41 Какую максимальную работу может произвести тепловая машина, если в качестве нагревателя используется кусок железа массой $m = 100$ кг с начальной температурой $T_0 = 1500$ К, а в качестве холодильника – вода океана температурой $T_2 = 285$ К? Удельная теплоемкость железа 460 Дж/(кг·К).

Ответ. A = **34 МДж**.

11.42 Некоторый газ совершает процесс, в ходе которого давление p изменяется с объемом V по закону

$$p = p_0 \exp\left[-\alpha\left(V - V_0\right)\right] \text{ Па},$$

где $p_0 = 600$ кПа, $\alpha = 0{,}2$ м$^{-3}$, $V_0 = 2$ м^3. Найти работу, совершаемую газом при расширении от $V_1 = 3$ м^3 до $V_2 = 4$ м^3.

Ответ. A = **445,0 кДж.**

11.43 Идеальный двухатомный газ, содержащий $\nu = 1$ моль вещества, совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Наименьший объем газа $V_{min} = 10$ л, наибольший $V_{max} = 20$ л; наименьшее давление газа $p_{min} = 246$ кПа, наибольшее $p_{max} = 410$ кПа. Построить график цикла. Определить: 1) температуру четырех характерных точек цикла; 2) количество теплоты, полученное газом от нагревателя за цикл; 3) работу газа за цикл; 4) количество теплоты, отданное холодильнику за цикл; 5) КПД цикла.

Ответ. T_1 **= 493 К;** T_2 **= 296 К;** T_3 **= 592 К;** T_4 = 987 **К;** Q_1 = 18,47 **кДж;** A = 1,64 **кДж;** Q_2 = 16,83 **кДж;** η = = 8,88 %.

11.44 Энтропия системы изменяется с температурой по законам: 1) $S = a + bT$ и 2) $S = aT + \frac{3}{2}bT^2$, где a и b – константы. Какое количество тепла получает система в каждом случае при обратном нагревании от T_1 до T_2.

Ответ. $Q_1 = b\frac{T_2^2 - T_1^2}{2}$; $Q_2 = a\frac{T_2^2 - T_1^2}{2} + b\left(T_2^3 - T_1^3\right)$.

11.45 В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массы M, находится газ. Газ нагревают так, что поршень двигается равноускоренно и приобретает скорость v. Найти количество теплоты, сообщенное газу. Внутренняя энергия моля газа $U = cT$, где $c =$ = const. Теплоемкостью сосуда и поршня, а также внешним давлением пренебречь.

Ответ. $Q = Mv^2/2(1+c/R)$.

12. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ. УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Краткие теоретические сведения

Уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля реального газа

$$\left(p+\frac{a}{V_m^2}\right)\left(V_m-b\right)=RT\ ,$$

где $V_m = V/\nu$ – молярный объем;

V – объём всего газа;

ν – количество вещества;

a – поправка на давление газа;

$b = 4V_0N$ – поправка на объем молекул;

$V_0 = 1/6\pi d^3$ – объем одной молекулы;

d – эффективный диаметр молекулы;

N – число молекул.

Уравнение Ван-дер-Ваальса произвольной массы газа

$$\left(p+\frac{a\nu^2}{V^2}\right)\left(V-\nu b\right)=\nu RT\ .$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса произвольной массы газа в вириальной форме имеет вид полинома

$$pV=\nu\left(RT+Bp+B_1p^2+B_2p^3+...\right)\ ,$$

где B, B_1, B_2,… − коэффициенты, зависящие от температуры.

При небольших давлениях можно ограничиться двумя членами полинома

$$pV=\nu\left(RT+Bp\right)\ ,$$

где $B = b - \dfrac{a}{RT}$.

Внутреннее давление, обусловленное силами межмолекулярного взаимодействия

$$p' = \frac{a}{V_m^2}.$$

Состояние, при котором газ и жидкость имеют одинаковые свойства, называется **критическим**.

Критические параметры объема, давления и температуры определяются через постоянные a и b для одного моля газа следующим образом:

$$V_{\text{кр}} = 3b; \;\; p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}; \;\; T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27R^* b},$$

где R^* – газовая постоянная, определяемая для каждого реального газа отдельно. Для состояний газа, далеких от критического, газовая постоянная может быть принята равной универсальной газовой постоянной R.

Связь между постоянными a и b и параметрами $T_{\text{кр}}$ и $p_{\text{кр}}$ критического состояния реального газа

$$a = \frac{27 T_{\text{кр}}^2 R^{*2}}{64 p_{\text{кр}}}; \;\; b = \frac{T_{\text{кр}} R^*}{8 p_{\text{кр}}}.$$

Внутренняя энергия одного моля реального газа

$$U = C_v T - \frac{a}{V_m},$$

где C_v – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме;

$V_m = V/\nu$ – молярный объем;

T – абсолютная температура газа.

Примеры решения задач

Задача 1. 20 кг азота адиабатически расширяются в вакууме от $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 2$ м^3. Найти понижение температуры при этом расширении, считая, известной для азота постоянную *a*, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Дано:
$m = 20$ кг;
$V_1 = 1$ м^3;
$V_2 = 2$ м^3

Найти: ΔT

Решение. При адиабатическом расширении газа в пустоту работа не совершается. Поэтому $\Delta U = 0$, следовательно, внутренняя энергия газа остается постоянной. Внутренняя энергия реального газа для ν молей определяется как

$$U = C_v T\nu - \frac{a\nu}{V_m} \ .$$

Учитывая, что $C_v = \frac{i}{2}R$, получаем

$$U = \frac{i}{2}\nu RT - \frac{a\nu^2}{V} \quad .$$

Тогда изменение ΔU будет определяться как

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{i}{2}\nu R(T_1 - T_2) + \frac{a\nu^2}{V_2} - \frac{a\nu^2}{V_1} = 0 . \qquad (12.1)$$

Выразим из (12.1) ΔT:

$$\Delta T = \frac{2\nu a}{iR}\frac{(V_1 - V_2)}{V_1 \cdot V_2}.$$

Найдем количество вещества азота $\nu = \frac{m}{M}$. Молярная масса азота

$$M = 2 \cdot 14 \cdot 10^{-3} = 28 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Число степеней свободы i молекул азота N_2 $i = 5$ (двухатомный газ). Тогда изменение температуры

$$\Delta T = \frac{2ma}{5RM}\frac{(V_1 - V_2)}{V_1 \cdot V_2} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 0{,}136}{5 \cdot 8{,}31 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{(1-2)}{2} \approx -2{,}340\ \text{К}.$$

Ответ. $\Delta T \approx -2{,}34$ **К.**

Задача 2. Углекислый газ массой 6,6 кг при давлении 0,1 МПа занимает объем 3,75 м^3. Определите температуру газа, если 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Параметры a и b принять соответственно 0,361 (Н·м)/моль^2, $4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. Газовую постоянную принять равной универсальной газовой постоянной.

Дано:
$m = 6{,}6$ кг;
$V = 3{,}75$ м^3;
$p = 100$ Па;
$a = 0{,}361$ (Н·м^4)/моль^2;
$b = 4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль

Найти: T_1; T_2

Решение. Температура реального газа определяется из уравнения Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu R T_1, \quad (12.2)$$

где $\nu = m/M$; M – молярная масса газа.

Из (12.2) получим выражение для температуры реального газа

$$T_1 = \frac{M\left(P + \frac{m^2 a}{M^2 V^2}\right)\left(V - \frac{mb}{M}\right)}{mR} = \frac{\left(pM^2V^2 + m^2 a\right)\left(VM - mb\right)}{mRM^2V^2} =$$

$$= \frac{\left(100 \cdot 44^2 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}75^2 + 6{,}6^2 \cdot 0{,}361\right)\left(3{,}75 \cdot 44 \cdot 10^{-3} - 6{,}6 \cdot 4{,}28 \cdot 10^{-5}\right)}{6{,}6 \cdot 8{,}31 \cdot 44^2 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}75^2} =$$

= 302 К.

В случае идеального газа воспользуемся уравнением Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT_2 . \qquad (12.3)$$

Из (12.3) получим температуру идеального газа

$$T_2 = \frac{MpV}{Rm} = \frac{44 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}75 \cdot 100}{8{,}31 \cdot 6{,}6} = 301\text{К}.$$

Ответ. $\boldsymbol{T_1}$ **= 302 К;** $\boldsymbol{T_2}$ **= 301 К.**

Задача 3. Найти эффективный диаметр молекул азота. Критические параметры для азота $p_{кр} = 33{,}9 \cdot 10^5$ Па; $T_{кр} = 126{,}1$ К.

Дано:
$p_{кр} = 33{,}9 \cdot 10^5$ Па;
$T_{кр} = 126{,}1$ К

Найти: d

Решение. Определим параметр b из соотношения

$$b = \frac{T_{кр} R}{8 p_{кр}} . \qquad (12.4)$$

Величина b связана с объемом одной молекулы V следующим образом:

$$b = 4V_0 N_A, \qquad (12.5)$$

где N_A – постоянная Авогадро.

Объем одной молекулы V_0 будет

$$V_0 = \frac{1}{6} \pi d^3 ,$$

где d – эффективный диаметр молекулы.

Тогда с учетом выражений (12.4) и (12.5) получим

$$d = \sqrt[3]{\frac{6V_0}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3b}{2\pi N_A}} = \sqrt[3]{\frac{3T_{кр}R}{16\pi p_{кр}N_A}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{3\cdot 126{,}1\cdot 8{,}31}{16\cdot 3{,}14\cdot 33{,}9\cdot 10^{-5}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}} = 3{,}5\cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

Ответ. $d = 3{,}5\cdot 10^{-10}$ **м.**

З а д а ч и

4 балла

12.1 В баллоне находится 10^{20} молекул газа. Объем одной молекулы $V_0 = 4\cdot 10^{-30}$ м^3. Найти поправку b на объем, занимаемый газом в баллоне, в уравнении Ван-дер-Ваальса.
Ответ. $b = 1{,}6\cdot 10^{-9}$ **м^3/моль**.

12.2 Чему равно внутреннее давление, обусловленное силами межмолекулярного притяжения, если объем газа $V = 2$ м^3, поправка $a = 0{,}426$ Н·м^4/моль^2, количество газа 1 моль?
Ответ. p **= 0,107 Па**.

12.3 Анализируя уравнение состояния реальных газов, определите величины поправок a и b для азота. Критические давления и температура азота соответственно 3,39 МПа и 126 К.
Ответ. $a = 0{,}14$ **Н·м^4/моль^2**; $b = 3{,}86\cdot 10^{-5}$ **м^3/моль.**

12.4 Два моля реального газа находятся под давлением 10 Па. Объем газа $V = 5$ м^3, поправки в уравнении Ван-дер-Ваальса $a = 0{,}325$ Н·м^4/моль^2, $b = 5{,}26\cdot 10^{-5}$ м^3/моль. Найти температуру газа?
Ответ. T **= 3 К**.

12.5 Поправка на объем молекул газа $b = 4{,}28\cdot 10^{-5}$ м^3/моль. Чему равен критический объем одного моля газа?
Ответ. $V_{кр} = 1{,}28\cdot 10^{-4}$ **м^3**.

12.6 Найти критическое давление двух молей газа, если $b = 5{,}26\cdot10^{-5}$ м^3/моль, $a = 0{,}307$ Н·м^4/моль^2.
Ответ. $p_{кр} = 8{,}22\cdot10^6$ **Па**.

5–6 баллов

12.7 Критические параметры для газа равны $p_{кр} = 44{,}5\cdot10^5$ Па, $T_{кр} = 130$ К. Если состояние газа далеко от критического, чему равна поправка на объем в уравнении Ван-дер-Ваальса?
Ответ. $b = 30{,}3\cdot10^{-6}$ **м^3/моль**.

12.8 Критические параметры реального газа $p_{кр} = 52{,}04\cdot10^5$ Па, $T_{кр} = 150$ К. Определить поправку на объем, если состояние газа можно считать далеким от критического.
Ответ. $b = 2{,}99\cdot 10^{-5}$ **м^3/моль**.

12.9 Какое количество реального газа создает внутреннее давление, равное 2 Па, если объем газа $V = 0{,}5$ м^3, поправка на давление $a = 0{,}426$ Н·м^4/моль^2.
Ответ. $\nu = 1{,}083$ **моль**.

12.10 Чему равна внутренняя энергия одного моля одноатомного реального газа при температуре $T = 300$ К? Объем газа $V = 0{,}2$ м^3, поправка $a = 0{,}346$ Н·м^4/моль^2.
Ответ. $U = 3738$ **Дж**.

12.11 Определить критическую температуру газа в состоянии далеком от критического. Поправки в уравнении Ван-дер-Ваальса $a = 671\cdot10^{-3}$ Н·м^4/моль^2, $b = 378\cdot10^{-7}$ м^3/моль.
Ответ. $T_{кр} = 633$ ***К***.

12.12 Один моль некоторого газа находится в сосуде объемом $V = 0{,}25$ л. При температуре 300 К давление газа 90 атм., при температуре 350 К – 110 атм. Найти постоянные Ван-дер-Ваальса для этого газа.
Ответ. $a = 1{,}899\cdot10^5$ **Н·м^4 /кмоль^2**; $b = 0{,}045$ **м^3/кмоль.**

12.13 Найти критическое давление и критическую температуру неона. Поправки $a = 2{,}13\cdot10^4$ Н·м^4/кмоль^2, $b = 0{,}017$ м^3/кмоль.
Ответ. $p_{кр} = 27{,}30\cdot10^5$ **Па;** $T_{кр} = 44{,}67$ **К.**

12.14 При каком давлении должен находиться кислород в количестве 0,1 кмоль, чтобы при $T = 320$ К он занимал объём 0,1 м^3? Задачу решить, рассматривая кислород как: а) идеальный газ; в) реальный газ, подчиняющийся уравнению Ван-дер-Ваальса. Поправки a и b для кислорода $a = 1{,}37 \cdot 10^5$ Н·м^4/кмоль^2, $b = 31{,}70 \cdot 10^{-3}$ м^3/кмоль.
Ответ. $p_1 = 2{,}66 \cdot 10^6$ **Па;** $p_2 = 2{,}61 \cdot 10^5$ **Па.**

12.15 Определить давление, при котором должен находиться 1 кмоль азота, чтобы при $T = 310$ К он занимал объём 2,5 м^3. Критические величины для азота $p_{кр} = 33{,}9 \cdot 10^5$ Па, $T_{кр} = 126{,}1$ К.
Ответ. $p = 10{,}44 \cdot 10^5$ **Па.**

12.16 Трехатомный газ в количестве 0,5 кмоль адиабатически расширяется в вакуум от объема 0,5 м^3 до объема 3 м^3. Температура газа при этом понижается на $\Delta T = 12{,}2$ К. Найти постоянную a Ван-дер-Ваальса.
Ответ. $a = 0{,}3640$ **Н·м^4/моль^2.**

7–8 баллов

12.17 Кислород ($\nu = 10$ моль) находится в сосуде объемом 5 л. Определите: 1) внутреннее давление газа; 2) собственный объем молекул. Поправки a и b принять соответственно $136 \cdot 10^{-3}$ Н·м^4/моль^2, $31{,}7 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль.
Ответ. $p' = 544{,}0$ **кПа;** $V = 79{,}25 \cdot 10^{-6}$ **м^3.**

12.18 Углекислый газ (CO_2) массой 2,2 кг находится при температуре $T = 290$ К в сосуде вместимостью 3 л. Определите давление газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки a и b соответственно принять 0,361 Н·м^4/моль^2 и $4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.
Ответ. $p_1 = 39{,}832$ **МПа**; $p_2 = 40{,}165$ **МПа.**

12.19 Кислород массой 100 г расширяется от объема 5 л до объема 10 л. Определите работу межмолекулярных сил притяжения при этом расширении. Поправка $a = 136 \cdot 10^{-3}$ Н·м^4/моль^2.
Ответ. $A = 133$ **Дж.**

12.20 Найти поправку b и удельный объём бензола (C_8H_8) в критическом состоянии, если его критическая температура $T_{кр}$ = 562,0 К и критическое давление $p_{кр}$ = 47,0 атм.
Ответ. $b = 12{,}26\cdot10^{-5}$ **м³/моль;** $V/m = 3{,}5\cdot10^{-3}$ **м³/кг.**

12.21 Азот в количестве $\nu = 3$ моль расширяется в вакуум, в результате чего объем газа увеличивается от 1 л до 5 л. Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы его температура осталось неизменной? Поправку a принять равной 0,135 $Н\cdot м^4/моль^2$.
Ответ. Q = 0,979 **кДж.**

12.22 Углекислый газ массой 88 г занимает при температуре 290 К объем 1000 $см^3$. Определите внутреннюю энергию газа, если: 1) газ идеальный; 2) газ реальный. Поправку a принять равной $361\cdot10^{-3}$ $Н\cdot м^4/моль^2$.
Ответ. U_1 = 14,46 **кДж;** U_2 = 13,02 **кДж.**

12.23 Кислород в количестве ν = 2 моль занимает объем 1 л. Определите изменение температуры кислорода, если он адиабатно расширяется в вакуум до объема 10 л. Поправку а принять равной $136\cdot10^{-3}$ $Н\cdot м^4/моль^2$.
Ответ. ΔT = –11, 78 **К.**

9–10 баллов

12.24 Некоторый газ (ν = 0,25 кмоль) занимает объем $V_1 = 1$ $м^3$. При расширении газа до объема $V_2 = 1{,}2$ $м^3$ была совершена работа против сил межмолекулярного притяжения, равная 1,420 кДж. Определить поправку a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.
Ответ. a **= 0,136 Н·м⁴/моль².**

12.25 Автомобильная шина накачана воздухом до давления $6{,}5\cdot10^5$ Па при температуре 5 °С. Какое количество воздуха необходимо выпустить из камеры, объем которой $V = 0{,}05$ $м^3$, чтобы оставить давление прежним, если температура его поднялась до 40 °С. Поправки для воздуха $a = 13{,}6\cdot10^4$ $Н\cdot м^4/кмоль^2$, $b = 0{,}0366$ $м^3/кмоль$. Использовать уравнение Ван-дер-Ваальса в вириальном виде. Молярная масса воздуха 0,029 кг/моль.

Ответ. $\Delta m = 0{,}0467$ **кг.**

12.26 В сосуде объемом $V = 10$ л находится масса 0,25 кг азота при температуре 27 °С. Какую часть давления газа составляет давление, обусловленное силами взаимодействия молекул? Какую часть объема сосуда составляет собственный объем молекул? Поправки $a = 0{,}141$ Н·м^4/моль^2, $b = 0{,}0393$ м^3/кмоль.

Ответ. $p'/p = 5{,}13$ %; $V'/V = 0{,}88$ %.

12.27 Кислород ($\nu = 1$ моль) (реальный газ), занимающий при $T_1 = 400$ К объем $V_1 = 1$ л, расширяется изотермически до $V_2 = 2V_1$. Определите: 1) работу при расширении; 2) изменение внутренней энергии газа. Поправки a и b принять соответственно $136 \cdot 10^{-3}$ (Н·м^4)/моль^2; $3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

Ответ. $A = 2{,}22$ **кДж;** $\Delta U = 68$ **Дж.**

12.28 При давлении $1{,}2 \cdot 10^5$ Па 8,8 кг углекислого газа занимают объем $V_1 = 4{,}2$ м^3. Определите температуру газа, пользуясь уравнениями Ван-дер-Ваальса и Менделеева-Клапейрона. Сравнить полученные результаты. Поправки a и b принять соответственно $36{,}4 \cdot 10^4$ Н·м^4/кмоль^2 и 0,043 м^3/кмоль.

Ответ. $T_1 = 305$ **К;** $T_2 = 303$ **К.**

12.29 Получить выражение для работы A, совершаемой молем ван-дер-ваальсовского газа при изотермическом расширении от объема V_1 до объема V_2. Температура газа T, постоянные Ван-дер-Ваальса a и b. Сравнить с работой идеального газа.

Ответ. $A = RT\ln\dfrac{V_2 - b}{V_1 - b} + a\left(\dfrac{1}{V_2} - \dfrac{1}{V_1}\right)$.

12.30 Воспользовавшись уравнением Ван-дер-Ваальса в вириальной форме определить разность теплоёмкостей $C_p - C_V$ для ксенона при давлении $1 \cdot 10^5$ Па и температуре 25 °С. Критическое давление ксенона $p_{кр} = 59 \cdot 10^5$ Па, критическая температура $T_{кр} = 290$ К.

Ответ. $C_p - C_V = 8366$ **Дж/(кмоль·К).**

13. СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

Краткие теоретические сведения

Относительное изменение объема жидкости при нагревании на Δt

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta t ,$$

где β – температурный коэффициент объемного расширения;

V_0 – объем жидкости при начальной температуре t_0;

$\Delta t = (t - t_0)$ – интервал изменения температуры.

Относительное изменение объема жидкости при изменении давления на Δp

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -k \Delta p ,$$

где k – коэффициент сжимаемости;

$\Delta p = (p - p_0)$ – интервал изменения давления;

V_0 – объем жидкости при начальном давлении p_0.

Коэффициент поверхностного натяжения α

$$\alpha = \frac{F}{l} ,$$

где F – сила, приложенная к единице длины l края поверхности пленки жидкости.

Добавочное давление, вызванное кривизной мениска, поверхности жидкости (формула Лапласа):

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1, R_2 – радиусы кривизны, проведенные в двух взаимно перпендикулярных плоскостях;

$R > 0$, если мениск выпуклый;

$R < 0$, если мениск вогнутый.

При выпуклом мениске добавочное давление направлено внутрь жидкости. Если мениск вогнут, то жидкость находится под меньшим давлением, чем та же жидкость под плоской поверхностью. В случае **сферической поверхности** радиуса R **добавочное давление** определяется по формуле

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R}.$$

Приращение свободной энергии поверхностного слоя жидкости при изменении его площади на dS

$$dF = \alpha dS.$$

Высота поднятия жидкости в капиллярной трубке с радиусом r

$$h = \frac{2\alpha\cos\theta}{r\rho g},$$

где θ – краевой угол;

r – радиус капилляра;

ρ – плотность жидкости.

При полном смачивании $\theta = 0$; при полном несмачивании $\theta = \pi$.

Энергия, выделяемая при слиянии нескольких малых капель в одну большую

$$\Delta W = \alpha \Delta S,$$

где ΔS – изменение площади поверхности жидкости;

α – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Примеры решения задач

Задача 1. Давление воздуха внутри мыльного пузыря на Δp = 133,3 Па больше атмосферного. Найти диаметр d пузыря. Поверхностное натяжение мыльного раствора α = 0,043 Н/м.

Дано:
Δp = 133,3 Па;
α = 0,043 Н/м

Найти: d

Решение. Добавочное давление внутри мыльного пузыря, вызванное кривизной его поверхности:

$$\Delta p = 2\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Так как пузырек сферический, то радиусы кривизны взаимно перпендикулярных поверхностей

$$R_1 = R_2 = \frac{d}{2},$$

тогда

$$\Delta p = \frac{8\alpha}{d},$$

откуда

$$d = \frac{8\alpha}{\Delta p} \approx 0{,}0026 \text{ м}.$$

Ответ. d = 0,0026 **м.**

Задача 2. На дне стеклянного сосуда площадью S = 30 см^2 имеется круглое отверстие диаметром d = 0,5 мм. В сосуд налита ртуть. Какая масса ртути останется в сосуде?

Дано:
$S = 30{,}0 \cdot 10^{-4}$ м^2;
$d = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м;
$\alpha = 487 \cdot 10^{-3}$ Н/м^2

Найти: m

Решение. Давление ртути на дно сосуда

$$p = \frac{mg}{S}.$$

Добавочное давление, вызванное кривизной поверхности жидкости

$$\Delta p = \frac{4\alpha}{d}.$$

Чтобы ртуть осталась в сосуде, необходимо соблюдать условие $p = \Delta p$ или

$$\frac{mg}{S} = \frac{4\alpha}{d},$$

тогда

$$m = \frac{4\alpha S}{gd} \approx \frac{4 \cdot 487 \cdot 10^{-3} \cdot 30 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}1688 \approx 1{,}2 \text{ кг}.$$

Ответ. $m = 1{,}2$ **кг.**

Задача 3. Лабораторный ртутный термометр погружен в гильзу паропровода до отметки $t_1 = 120$ °С и показывает $t_2 = = 360$ °С, причем температура выступающего столба ртути, найденная с помощью вспомогательного термометра, 59 °С. Определить действительную температуру пара, принимая во внимание, что термометр градуирован при погружении до отсчитываемого деления.

Дано:
$t_1 = 120$ °С;
$t_2 = 360$ °С;
$h = 59$ °С

Найти: t'

Решение. Определим уменьшение объема ртути по сравнению с условиями, при которых производилось градуировка термометра

$$\Delta V = V\beta\Delta t = V\beta(t_2 - t_1), \tag{13.1}$$

где t_2 – температура, показываемая термометром;

t_1 – температура отметки погружения столбика термометра в гильзу;

V – объем выступающего столбика ртути.

Разделим обе части выражения (13.1) на площадь поперечного сечения капилляра, полагая, что она не меняется с изменением температуры

$$\frac{\Delta V}{S}=\frac{V}{S}\beta\left(t_2-t_1\right)=h\beta\left(t_2-t_1\right). \qquad (13.2)$$

Выразив высоту столбика ртути в делениях шкалы термометра, (13.2) можно записать как

$$\Delta t=h\beta\left(t_2-t_1\right),$$

где h – высота выступающего столбика, выраженная в градусах шкалы термометра,

Δt – поправка на выступающий столбик.

Действительная температура пара

$$t'=t_2+\Delta t=t_2+h\beta\left(t_2-t_1\right)=360+59\cdot 1{,}8\cdot 10^{-4}(360-120)\approx 373^{\circ}\text{C}.$$

Ответ. $t'=373$ **°С.**

Задача 4. Невесомое кольцо с внутренним диаметром 25 мм и внешним диаметром 26 мм подвешено на пружине (рис. 13.1) с коэффициентом упругости 0,01 Н/м и соприкасается с поверхностью жидкости. При опускании поверхности жидкости кольцо оторвалось от нее при растяжении пружины на 5,3 мм. Найти коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Рис. 13.1

Дано:
$d_1=25\cdot 10^{-3}$ м;
$k=0{,}01$ Н/м;
$d_2=26\cdot 10^{-3}$ м;
$\Delta x=5{,}3\cdot 10^{-3}$ м

Найти: α

Решение. В момент отрыва кольца сила поверхностного натяжения

$$F_{\text{н}}=\alpha\pi(d_1+d_2)$$

равна силе упругости

$$F_y=k\Delta x.$$

Тогда

$$\alpha\pi(d_1+d_2)=k\Delta x.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{k\Delta x}{\pi(d_1 + d_2)} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}053}{\pi(0{,}025 + 0{,}026)} \approx 33{,}2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Ответ. $\alpha \approx 33{,}2 \cdot 10^{-3}$ **Н/м.**

З а д а ч и

4 балла

13.1 Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки $\alpha = 0{,}043$ Н/м. Найти силу поверхностного натяжения, если длина края пленки $l = 4$ мм.
Ответ. $F = 1{,}72 \cdot 10^{-4}$ **Н.**

13.2 Определить добавочное давление, возникающее под сферической поверхностью мениска жидкости радиуса $R = 2$ мм. Коэффициент поверхностного натяжения $\alpha = 60 \cdot 10^{-3}$ Н/м.
Ответ. $\Delta p = 60$ **Па.**

13.3 Какую работу необходимо совершить, чтобы надуть мыльный пузырь радиусом 4 см. Для мыльного раствора $\alpha = 0{,}04$ Н/м.
Ответ. $A = 1{,}60$ **мДж.**

13.4 В капиллярной трубке радиусом 0,5 мм жидкость поднялась на 11 мм. Найти плотность жидкости, если ее коэффициент поверхностного натяжения $\alpha = 22 \cdot 10^{-3}$ Н/м.
Ответ. $\rho = 816$ **кг/м**^{3}.

13.5 Найти массу воды, поднявшейся по капиллярной трубке диаметром 0,5 мм на высоту 0,00195 м. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\alpha = 73$ мН/м.
Ответ. $m = 0{,}012$ **кг**.

5–6 баллов

13.6 Вертикальный стеклянный капилляр погружен в воду. Определите радиус кривизны мениска, если высота столба воды в

трубке h = 20 мм. Плотность воды ρ = 1 г/см^3, поверхностное натяжение α = 73 мН/м.
Ответ. R = 744 **мкм.**

13.7 В стеклянном капилляре диаметром d = 100 мкм вода поднимается на высоту h = 30 см. Определите поверхностное натяжение воды, если ее плотность ρ = 1,0 г/см^3.
Ответ. α = **73,6 мН/м**.

13.8 Какую работу нужно совершить, чтобы изменить площадь поверхностного слоя жидкости на $\Delta S = 2\cdot10^{-5}$ м^2. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости α = 0,05 Н/м.
Ответ. $A = 1\cdot10^{-6}$ **Дж.**

13.9 Капиллярная трубка с очень тонкими стенками была прикреплена к коромыслу весов, после чего весы были уравновешены грузом. После того, как к нижнему концу капилляра прикоснулись поверхностью воды для уравновешивания капилляра потребовался груз бóльший на 0,135 г. Найти радиус капилляра r. Считать радиусы кривизны жидкости снаружи и внутри капилляра одинаковыми. Коэффициент поверхностного натяжения воды α = 72,75 мН/м.
Ответ. r = 0,0014 **м.**

13.10 В двух капиллярных трубках разного диаметра, опущенных в воду, установилась разность уровней 0,026 м. При опускании этих же трубок в этиловый спирт разность уровней оказалась равной 1 см. Зная коэффициент поверхностного натяжения воды, найти коэффициент поверхностного натяжения спирта.
Ответ. α = 0,022 **Н/**м.

13.11 Две капли воды радиусом 1 мм каждая слились в одну большую каплю. Считая процесс изотермическим, определите уменьшение поверхностной энергии при этом слиянии, если поверхностное натяжение воды α = 73 мН/м.
Ответ. ΔW = **378 нДж**.

13.12 При слиянии нескольких мелких водяных капель одинакового размера в одну большую каплю диаметром 0,004 м выделяется энергия 0,014 Дж. Чему равен радиус одной малой капли, если поверхностное натяжение воды α = 73 мН/м.?

Ответ. $r = 0{,}5$ **мкм.**

13.13 Найти диаметр капилляра термометра с длиной шкалы равной 70 мм от 0 до 50 °С. Объем этилового спирта в резервуаре при 0 °С составляет 70 мм^3, температурный коэффициент объемного расширения этилового спирта $11 \cdot 10^{-4}$ 1/K. Изменением размеров капилляра пренебречь.

Ответ. $d = 265 \cdot 10^{-6}$ **м.**

13.14 Найти плотность масла в гидравлической системе пресса при давлении $500 \cdot 10^5$ Па, если плотность его при 20 °С и давлении $1 \cdot 10^5$ Па – 910 кг/м^3, а коэффициент сжатия – $6 \cdot 10^{-10}$ м^2/Н.

Ответ. $\rho = 937$ **кг/м**^{3}.

13.15 Какую долю от полного давления составляет дополнительное давление, вызванное поверхностным натяжением в капле расплавленного алюминия, находящегося на раскаленной стальной пластине? Коэффициент поверхностного натяжения капли α = 0,83 Н/м, а ее диаметр 1 мм.

Ответ. $\Delta p/p = 0{,}032$.

13.16 Давление воздуха внутри мыльного пузыря на Δp = 200 Па больше атмосферного. Определите диаметр d мыльного пузыря. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 40$ мН/м.

Ответ. $d = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ **м.**

13.17 Вычислить приращение свободной энергии поверхностного слоя при изотермическом слиянии двух одинаковых капель ртути, каждая из которых имеет диаметр 1,5 мм. Коэффициент поверхностного натяжения ртути 487 мН/м.

Ответ. $\Delta W = 1{,}4$ **мкДж.**

13.18 Вычислить коэффициент поверхностного натяжения и его относительную погрешность для раствора, если для отрыва от поверхности жидкости кольца прямоугольного сечения (с внешним и внутренним диаметрами D_1 = 60 мм и

D_2 = 56 мм) была приложена сила F = 0,035 Н. Сила поверхностного натяжения определялась с помощью рычажных весов с точностью до $2{\cdot}10^{-3}$ Н, а диаметр – с помощью штангенциркуля с точностью до 0,1 мм.

Ответ. α = 0,096 Н/м; ε = 0,059.

7–8 баллов

13.19 По середине откачанного, запаянного с обоих концов и расположенного горизонтально капилляра, находится столбик ртути длиной l = 20 см. Если капилляр поставить вертикально, то столбик ртути переместится на Δl = 10 см. До какого давления p_0 был откачан капилляр, если его длина L = 1 м. Плотность ртути 13,6 г/см^3 .

Ответ. $p_0 = 5{,}0{\cdot}10^3$ **Па.**

13.20 Для точных измерений применяется термометр со шкалой на 5 °С и ценой деления 0,01 °С. Определить расстояние между двумя соседними рисками шкалы, если диаметр капилляра d = 0,122 мм, а объем ртути при нулевом положении столбика 2550 мм^3. Расширением стекла пренебречь. Температурный коэффициент объемного расширения ртути $1{,}8{\cdot}10^{-4}$ 1/К.

Ответ. $r = 393{\cdot}10^{-6}$ **м.**

13.21 Для измерения температуры воздуха в трубопроводе используется толуоловый термометр. Термометр погружен в измерительную гильзу до отметки 19 °С, столбик жидкости в нем находится на делении 99 °С, а температура выступающего столбика 20 °С. Коэффициент объемного расширения толуола $\beta = 1{,}26{\cdot}10^{-3}$ 1/°С. Определить действительную температуру потока воздуха, учитывая, что градуировку термометра производили при его погружении до отсчитываемого деления.

Ответ. t = 101 °С.

13.22 Определить приращение массы воды в питательном трубопроводе парового котла, объем которого V = 0,5 м^3, при увеличении давления на $\Delta p = 3\cdot10^7$ Па. Коэффициент сжатия воды $\kappa = 4{,}80\cdot10^{-10}$ м^2/Н, начальная плотность воды $\rho_1 =$ $= 998$кг/м^3.

Ответ. $\Delta m = 7{,}29$ **кг.**

13.23 Капля ртути массой 2 г введена между параллельными стеклянными пластинками. Какую силу следует приложить, чтобы расплющить каплю до толщины в 0,1 мм? Следует считать, что ртуть не смачивает стекло. Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\alpha = 487$ мН/м.

Ответ. $F = 14{,}357$ Н.

13.24 Две одинаковые плоскопараллельные стальные пластины спаяны между собой по боковым граням так, что между ними имеется зазор 0,3 мм. На какую высоту поднимется жидкость в зазоре, если опустить пластины нижними гранями в сосуд с глицерином (рис. 13.2)? Смачивание считать полным. Коэффициент поверхностного натяжения глицерина $\alpha = 63{,}4$ мН/м.

Ответ. $h = 34{,}2\cdot10^{-3}$ **м.**

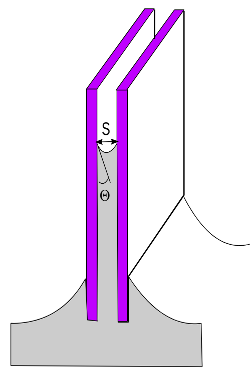

Рис. 13.2

13.25 Широкое колено U-образного манометра имеет диаметр $d_1 = 2$ мм, узкое $d_2 = 1$ мм. Определите разность Δh уровней ртути в обоих коленах, если поверхностное натяжение ртути $\alpha = 0{,}5$ Н/м, плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, а краевой угол $\theta = 138°$.

Ответ. $\Delta h = 5{,}6\cdot10^{-3}$ **м.**

13.26 Определите радиус R капли спирта, вытекающей из узкой вертикальной трубки радиусом $r = 1$ мм. Считайте, что в момент отрыва капля имеет сферическую форму. Поверхностное натяжение спирта $\alpha =$ $= 22$ мН/м, а его плотность $\rho = 0{,}8$ г/см^3.

Ответ. $R = 1{,}61\cdot10^{-3}$ **м.**

9–10 баллов

13.27 Для большого интервала изменения давления коэффициент сжатия некоторой жидкости изменяется по закону $k = k_0(1 - ap)$, где a – величина постоянная. Найти конечный объем жидкости при изменении давления от p_0 до p_1.
Ответ. $V = V_0\exp(-b)$, **где** $b = k_0(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0)(1 - a(\boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}_1)/2)$.

13.28 В городе площадью 400 км^2 за 10 мин во время ливневого дождя выпало 0,02 м воды. Подсчитать энергию и мощность тепловыделения от слияния капель во время дождя, если капли, достигшие поверхности Земли, имели диаметр 3 мм, а образовались из мелких капель диаметром $3\cdot10^{-3}$ мм. Поверхностное натяжение воды $\alpha = 72{,}75$ мН/м.
Ответ. $W = 11{,}63\cdot10^{11}$ **Дж**; $\boldsymbol{P} = 1{,}94\cdot10^{9}$ **Вт.**

13.29 Капля воды равномерно падает в воздухе. Найти разность между радиусом кривизны поверхности капли в ее верхней точке и радиусом кривизны поверхности в нижней точке, расстояние между которыми $h = 2{,}3$ мм.
Ответ. $R_2 - R_1 = 0{,}2\cdot10^{-3}$ **м.**

13.30 Найти силу притяжения двух параллельных стеклянных пластинок, отстоящих друг от друга на расстоянии 0,1 мм после того, как между ними ввели каплю воды массой 70 мг. Поверхностное натяжение воды $\alpha = 72{,}75$ мН/м. Смачивание считать полным.
Ответ. $F = 1{,}0$ **Н.**

13.31 Найти время исчезновения мыльного пузыря радиусом R, соединенного с атмосферой капилляром длиной l и радиусом сечения канала r. Поверхностное натяжение α, коэффициент вязкости газа η.
Ответ. $t = \dfrac{2l\eta R^4}{\alpha r^4}$.

13.32 Две одинаковые плоскопараллельные стеклянные пластины погружены частично в воду. Зазор между пластинами $d = 0{,}5$ мм, размер пластин по горизонтали $l = 10$ см. Считая смачивание пластин полным, определить: а) высоту h, на которую вода поднимется в зазоре; б) силу F, с которой пластины притягиваются друг к другу.

Ответ. $h = 3{,}0 \cdot 10^{-2}$ **м;** F **= 0,4 Н**.

14. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Краткие теоретические сведения

Средняя длина свободного пробега $\bar{\lambda}$ молекул газа

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где d – эффективный диаметр молекулы;

n – концентрация молекул.

Среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой за секунду

$$\bar{z} = \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v},$$

где $\bar{v}$ **–** средняя арифметическая скорость молекул газа.

Относительное число молекул газа, пролетающих путь S **без столкновений**:

$$\frac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{-\frac{S}{\bar{\lambda}}}.$$

Общее число столкновений всех молекул друг с другом в единице объема за единицу времени

$$Z = \frac{1}{2}\bar{z}n.$$

Коэффициенты диффузии D**, динамической вязкости** η **и теплопроводности *K***

$$D = \frac{1}{3}\bar{v}\,\bar{\lambda}; \quad \eta = \frac{1}{3}\bar{v}\,\bar{\lambda}\rho; \quad K = \frac{1}{3}\bar{v}\,\bar{\lambda}\rho c_v,$$

где ρ – плотность газа;

c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Уравнение диффузии (закон Фика)

$$dm = -D\frac{d\rho}{dx}dSdt,$$

где dm – масса вещества, переносимого при диффузии за время dt через малую площадку dS, перпендикулярную к оси OX, вдоль которой осуществляется перенос;

$\frac{d\rho}{dx}$ – градиент плотности.

Уравнение теплопроводности (закон Фурье)

$$dQ = -K\frac{dT}{dx}dSdt,$$

где dQ – количество теплоты, передаваемое за время dt через малую площадку dS, перпендикулярную к оси OX, вдоль которой осуществляется перенос тепла;

$\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры.

Закон Ньютона для внутреннего трения

$$dF = -\eta\frac{dv}{dx}dS,$$

где dF – сила внутреннего трения между движущимися слоями жидкости или газа площадью dS;

η – динамический коэффициент вязкости,

$\frac{dv}{dx}$ – градиент скорости.

Кинематический коэффициент вязкости ν

$$\nu = \frac{\eta}{\rho},$$

где ρ – плотность жидкости или газа.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти теплопроводность K воздуха при давлении p = 100 кПа и температуре T = 283 К. Эффективный диаметр молекулы воздуха d = 0,3 нм. Считать воздух двухатомным газом, молекулярная масса которого M = 0,029 кг/моль.

Дано:
P = 100 000 Па;
T = 283 К;
$d = 0{,}3\cdot 10^{-9}$ м;
M = 0,029 кг/моль

Найти: K

Решение. Для вычисления коэффициента теплопроводности K воздуха согласно соотношению (14.1)

$$K = \frac{1}{3}\bar{v}\cdot\bar{\lambda}\cdot\rho\cdot c_v, \qquad (14.1)$$

необходимо определить среднюю длину свободного пробега $\bar{\lambda}$, плотность воздуха ρ и его удельную теплоемкость при постоянном объеме c_V, среднюю арифметическую скорость движения молекул воздуха $\bar{v}$.

Для определения средней длины свободного пробега $\bar{\lambda}$ необходимо вычислить концентрацию молекул воздуха. Для этого используем основное уравнение молекулярно-кинетической теории

$$p = nkT,$$

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Тогда средняя длины свободного пробега молекулы

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}, \qquad (14.2)$$

где d – эффективный диаметр молекулы воздуха.

Используя уравнение Менделеева–Клапейрона, определим плотность воздуха

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \tag{14.3}$$

Удельная теплоемкость газа определяется соотношением

$$c_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M}, \tag{14.4}$$

где число степеней свободы молекул воздуха, для двухатомных молекул с жесткой связью $i = 5$.

Средняя арифметическая скорость молекул воздуха вычисляется как

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \tag{14.5}$$

С учетом (14.2) – (14.5), формула (14.1) для определения коэффициента теплопроводности примет окончательный вид

$$K = \frac{ik}{3\pi d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}}.$$

Подставляя в последнее выражение числовые значения, получаем

$$K = \frac{5 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}}{3 \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 10^{-20}} \sqrt{\frac{8{,}31 \cdot 283}{3{,}14 \cdot 0{,}029}} = 0{,}013 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Ответ. $K = 0{,}013 \dfrac{\textbf{Вт}}{\textbf{м} \cdot \textbf{К}}$.

Задача 2. Вычислить массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку 50 см^2 за 20 с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке, равен 1 кг/м^4. Температура азота 290 К, а средняя длина свободного пробега его молекул равна 1 мкм.

Дано:
t = 20 с;
T = 290 К;
$\overline{\lambda}$ = 1,0·10^{-6} м;
$\frac{d\rho}{dx}$ = 1,0 кг/м^4;
S = 50 ·10^{-4} м^2

Найти: m

Решение. Массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку можно определить из закона Фика

$$m = D\frac{d\rho}{dx}St. \tag{14.6}$$

Как следует из выражения (14.6), для вычисления массы азота необходимо определить коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}, \tag{14.7}$$

где

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \tag{14.8}$$

С учетом выражений (14.7) и (14.8), массу азота можно определить как

$$m = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\cdot\frac{d\rho}{dx}\cdot\overline{\lambda}\cdot S\cdot t =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{8\cdot 8{,}31\cdot 290}{3{,}14\cdot 28\cdot 10^{-3}}}\cdot 1\cdot 10^{-6}\cdot 50\cdot 10^{-4}\cdot 20 = 15{,}6 \text{ мг}.$$

Ответ. m = 1,56·**10**$^{-5}$ **кг**.

Задача 3. Вычислить диаметр молекулы кислорода, если при температуре 0 °С коэффициент вязкости кислорода η = = 18,8 мкПа·с.

Дано:
T = 273 К;
$\eta = 18{,}8\cdot10^{-6}$ Па·с

Найти: d

Решение. Из формулы для эффективного диаметра d молекулы

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

получим

$$d = \left(\frac{kT}{\sqrt{2}\pi p\bar{\lambda}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Значение длины свободного пробега $\bar{\lambda}$ можно определить из выражения для коэффициента вязкости кислорода

$$\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\,\bar{\lambda}\rho, \text{ или } \bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\rho\bar{v}}.$$

Учтем, что средняя арифметическая скорость молекул газа

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона получим выражение для плотности молекул кислорода:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Тогда

$$d = \left(\frac{2k}{3\pi\eta}\sqrt{\frac{MT}{\pi R}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставляя числовые значения, определяем значение эффективного диаметра молекулы кислорода

$$d = \left(\frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}}{3 \cdot 3{,}14 \cdot 18{,}8 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\frac{0{,}032 \cdot 273}{3{,}14 \cdot 8{,}31}} \right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}3 \text{ нм.}$$

Ответ. d **= 0,3 нм.**

Задачи

4 балла

14.1 В объеме 2,0 м^3 находится $1{,}0 \cdot 10^{23}$ молекул газа. Эффективный диаметр молекулы $d = 2{,}0 \cdot 10^{-10}$ м. Найти длину свободного пробега молекул газа.
Ответ. $\overline{\lambda} = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ **м.**

14.2 Найти среднее число столкновений молекул газа, если концентрация $2{,}0 \cdot 10^{19}$, эффективный диаметр $3{,}0 \cdot 10^{-10}$ м, средняя арифметическая скорость движения молекул 100 м/с.
Ответ. $\overline{z} = 797$.

14.3 Найти массу вещества, переносимого через единичную площадку в единицу времени, если градиент плотности равен 5,0 кг/м^4, коэффициент диффузии $D = 4{,}0 \cdot 10^{-3}$ м^2/с.
Ответ. $m = 0{,}020$ **кг**.

14.4 Найти тепловой поток, если известно, что через площадку 0,5 м^2 за время 10 с проходит количество теплоты 400 Дж.
Ответ. $q = 80{,}0$ **Дж/м^2·с**.

14.5 Скорость течения жидкости в зависимости от координаты x изменяется по закону $v = ax + bx^2$. Чему равен градиент скорости в точке $x = 0$?
Ответ. $\frac{dv}{dx} = \boldsymbol{a}$.

14.6 Чему равна сила внутреннего трения, действующая на площадку $S = 0{,}1$ м^2, если коэффициент вязкости $2\cdot10^{-3}$ Па·с, градиент скорости равен 4 с$^{-1}$?
Ответ. $F = 8{,}0\cdot10^{-4}$ **Н**.

14.7 Чему равна кинематическая вязкость жидкости, если ее динамическая вязкость $5\cdot10^{-3}$ Па·с, а плотность 100 кг/м^3?
Ответ. $\nu = 5\cdot10^{-5}$ **м^2/с.**

5–6 баллов

14.8 Определить коэффициенты диффузии и вязкости газа, если плотность газа $\rho = 1\cdot10$ кг/м^3, средняя арифметическая скорость 100 м/с, длина свободного пробега $1\cdot10^{-4}$ м.
Ответ. $D = 3\cdot10^{-3}$ **м^2/с; $\eta = 33\cdot10^{-3}$ Па·с**.

14.9 Температура газа в зависимости от координаты x имеет вид $T = 100 + 3x$. Найти градиент температуры.
Ответ. dT/dx = **3 К/м**.

14.10 Определить коэффициенты диффузии и динамической вязкости гелия, находящегося при температуре –73 °С и давлении 10 кПа. Эффективный диаметр молекулы гелия 0,19 нм.
Ответ. $D = 5{,}92\cdot10^{-4}$ **м^2**/с; $\eta = 1{,}42\cdot 10^{-5}$ **Па·с.**

14.11 Найти массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку 100 см^2 за время 10 с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном к площадке, равен 1,26 кг/м^4. Температура азота 27 °С, давление 1,036 кПа. Диаметр молекулы азота считать равным 0,3 нм.
Ответ. $m = 0{,}20\cdot10^{-3}$ **кг**.

14.12 Коэффициент теплопроводности гелия в 8,7 раза больше, чем у аргона (при нормальных условиях). Найти отношение квадратов эффективных диаметров атомов аргона и гелия.
Ответ. $\dfrac{d^2_{\mathrm{Ar}}}{d^2_{\mathrm{He}_2}} = 1{,}7$.

14.13 При каком давлении отношение коэффициента динамической вязкости некоторого газа к его коэффициенту диффузии равно 0,3 кг/м^3, а среднеквадратичная скорость молекул газа составляет 632 м/с?
Ответ. p **= 39,9 кПа.**

14.14 В результате термодинамического процесса коэффициент вязкости идеального газа увеличился в два раза, а коэффициент диффузии – в четыре раза. Во сколько раз изменилось давление газа.
Ответ. n **= 2 раза**.

14.15 Определите, во сколько раз отличаются коэффициенты динамической вязкости углекислого газа и азота, если оба газа находятся при одинаковой температуре, одном и том же давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов считать одинаковыми.
Ответ. $\eta_1/\eta_2 = 1{,}25$.

14.16 Коэффициент вязкости гелия при нормальных условиях равен $194 \cdot 10^{-7}$ Па·с. Найти эффективный диаметр атома гелия.
Ответ. $d = 0{,}174$ **нм.**

14.17 Кислород находится при нормальных условиях. Определить коэффициенты диффузии и теплопроводности, если эффективный диаметр молекул кислорода 0,36 нм.
Ответ. $D = 9{,}15 \cdot 10^{-6}$ **м^2**/с; K **= 8,49 мВт/(м·К).**

14.18 Для расчета отопительной системы необходимо найти потерю теплоты 1 м^2 стены здания в течение суток. Толщина стены $d = 50$ см, температура стены внутри и наружи здания соответственно $t_1 = 18$ °С и $t_2 = -30$ °С, коэффициент теплопроводности стены $K = 0{,}2$ Вт/(м·К).
Ответ. Q **= 1,66 МДж**.

7−8 баллов

14.19 Найдите коэффициент динамической вязкости воздуха η при температуре $t = 100$ $^{\circ}$С и нормальном давлении

($p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па). Динамическая вязкость воздуха при нормальных условиях составляет 17,2 мкПа·с.

Ответ. η = 20,1 **мкПа·с.**

14.20 Какой толщины следовало бы сделать деревянную стену здания, чтобы она давала такую же потерю теплоты, как кирпичная стена толщиной d = 40 см при одинаковой температуре внутри и снаружи здания. Коэффициенты теплопроводности кирпича и дерева соответственно 0,7 Вт/(м·К) и 0,175 Вт/(м·К).

Ответ. b = **0,1 м**.

14.21 Потолочное перекрытие парового котла состоит из двух слоев тепловой изоляции. Определить температуру t_3 на границе между слоями, если температура наружных поверхностей перекрытия t_1 = 800 °С и t_2 = 60 °С, а толщина и теплопроводность каждого слоя соответственно: d_1 = 500 мм, K_1 = 1,3 Вт/(м·К); d_2 = 200 мм, K_2 = 0,16 Вт/(м·К).

Ответ. T_3 = 899 **К**.

14.22 Анод рентгеновской трубки выполнен в виде медного стержня длиной 250 мм и диаметром 15 мм. Определить разность температур между горячим и холодным концом стержня, если считать, что через боковую поверхность стержня тепло не проходит, а холодный конец омывается проточной водой. Вода нагревается на 3° при расходе воды 1 кг/мин. Коэффициенты теплопроводности меди 395 Вт/(м·К). Удельная теплоемкость воды $4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

Ответ. Δt = 751 **°С.**

14.23 При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул кислорода равна 125 см, если температура газа 47 °С? Эффективный диаметр молекулы кислорода 0,27 нм. Чему равна теплопроводность кислорода при таких условиях?

Ответ. p = 10,95 **мПа;** K = 16,35 **мВт/(м·К).**

14.24 Давление разреженного газа в рентгеновской трубке при температуре 17 °С 130 мкПа. Можно ли считать вакуум в трубке высоким, если расстояние между катодом и анодом трубки составляет 50 мм. Эффективный диаметр молекул воздуха равен 0,27 нм.

Ответ. $\bar{\lambda} = 95{,}38$ **м; вакуум высокий.**

14.25 Азот находится под давлением 100 кПа при температуре 290 К. Вычислить коэффициенты диффузии и внутреннего трения, если эффективный диаметр молекул азота равен 0,38 нм.

Ответ. $D = 9{,}74 \cdot 10^{-6}$ **м**^{2}/с; $\eta = 1{,}13 \cdot 10^{-5}$ **кг/(м·с).**

9–10 баллов

14.26 В воздушном пространстве между пластинами, находящимися на расстоянии 1 мм друг от друга, поддерживается разность температур $\Delta T = 1$ К. Площадь каждой пластины 100 см^2. Какое количество теплоты передается за счет теплопроводности от одной пластины к другой за 10 мин? Диаметр молекулы воздуха 0,3 нм. Считать воздух двухатомным газом с молярной массой 29 г/моль.

Ответ. Q = **76,8 Дж.**

14.27 Какое количество теплоты теряет помещение за 1 час через окно за счет теплопроводности воздуха, заключенного между двумя рамами? Площадь каждой рамы 4 м^2, расстояние между ними 30 см. Температура помещения 18 °С, температура наружного воздуха –20 °С. Диаметр молекул воздуха 0,3 нм. Температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому температур помещения и наружного воздуха. Давление 101,3 кПа. Считать воздух двухатомным газом, имеющим молярную массу 29 г/моль.

Ответ. $Q = 22{,}3$ **кДж.**

14.28 Пространство между двумя параллельными пластинами площадью 150 см^2 каждая, находящимися на расстоянии 5 мм друг от друга, заполнено кислородом. Одна пластина поддерживается при температуре 17 °С, а другая – при температуре 27 °С. Определите количество теплоты, прошедшее за 5 мин посредством теплопроводности от одной пластины к другой. Кислород находится при нормальных условиях.

Эффективный диаметр молекул кислорода считать равным 0,36 нм.

Ответ. Q = 76,43 **Дж.**

14.29 Акватория Азовского моря составляет $38 \cdot 10^3$ км^2. Найти, во сколько раз мощность теплового потока, передаваемого водой в атмосферу, превышает мощность электростанции в 10^6 кВт, если море покрыто слоем льда толщиной 200 мм, а температура на нижней и верхней поверхностях льда соответственно 0 °С и –15 °С. Коэффициенты теплопроводности льда 2,5 Вт/(м·К).

Ответ. n **= 7125 раз.**

14.30 Цилиндрический термос с внутренним радиусом r_1 = 9 см и внешним r_2 = 10 см наполнен льдом. Высота термоса h = = 20 см. Температура льда t_1 = 0 °С, температура наружного воздуха t_2 = 20 °С. При каком предельном давлении p воздуха между стенками термоса теплопроводность K еще будет зависеть от давления? Диаметр молекул воздуха 0,3 нм, а температуру воздуха между стенками термоса считать равной средней арифметической температур льда и наружного воздуха. Найти теплопроводность K воздуха, заключенного между стенками термоса, при давлениях p_1 = 101,3 кПа и p_2 = 13,3 МПа, если молекулярная масса воздуха 0,029 кг/моль. Какое количество теплоты проходит за 1 мин. через боковую поверхность термоса средним радиусом 9,5 см при давлениях p_1 = 101,3 кПа и p_2 = 13,3 МПа?

Ответ. $\boldsymbol{p}$ = 980 **мПа;** K_1 = 13,1 **мВт/(м·К);**
$\boldsymbol{K_2}$ = 178 **мВт/(м·К);** Q_1 = **188 Дж;** Q_2 = **2,55 Дж.**

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И.В. Курс общей физики: в 3 т. / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1977–1989. – Т. 1–3.
2. Детлаф, А.А. Курс физики: в 3 т. / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высшая школа, 1973–1979. – Т. 1–3.
3. Наркевич, И.И. Физика для втузов: в 3 т. / И.И. Наркевич, Э.И. Волмянский, С.И. Лобко. – Минск.: Вышэйшая школа, 1992–1994. – Т. 1–2.
4. Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1985–1990.
5. Зисман, Г.А. Курс общей физики: в 3 т. / Г.А. Зисман, О.М. Тодес. – М.: Наука, 1972–1974. – Т. 1–3; Киев: Днiпро, 1994. – Т. 1–3.
6. Чертов, А.Г. Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М.: Высшая школа, 1981–1988.
7. Волькенштейн, В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – М.: Наука, 1973–1990; СПб: Спец. лит., Лань, 1999.
8. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1994–1996.
9. Берклеевский курс физики: в 5 т. / Ч. Китель [и др.] – М.: Наука, 1971–1974. – Т. 1–5.
10. Сивухин, Д.В. Общий курс физики: в 5 т. / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1977–1990. – Т. 1–5.
11. Матвеев, А.Н. Курс общей физики / А.Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1976–1989.
12. Астахов, А.В. Курс физики: в 3 т. / А.В. Астахов, Ю.М. Широков. – М.: Наука, 1977–1981. – Т. 1–3.
13. Орир, Д. Физика / Д. Орир. – М.: Мир, 1981. – Т. 1–2.
14. Геворкян, Р.Г. Курс физики / Р.Г. Геворкян. – М.: Высшая школа, 1979.
15. Лаврентьев, М.А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1977.
16. Киттель, Ч. Статистическая термодинамика / Ч. Киттель. – М.: Наука, 1977.

17. Суханов, А.Д. Фундаментальный курс физики: в 2 т. / А.Д. Суханов. – М.: Агар, 1996–1998. – Т. 1–2.
18. Фундаментальная структура материи / пер. с англ.; под. ред. А.Д. Суханова. – М.: Мир, 1984.
19. Сена, Л.А. Единицы физических величин и их размерности / Л.А. Сена. – М.: Наука, 1977.
20. Зайдель, А.Н. Погрешности измерений физических величин / А.Н. Зайдель. – М.: Наука, 1985.
21. Чертов, А.А. Физические величины / А.А. Чертов. – М.: Высшая школа, 1990.
22. Савельев, И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1982.
23. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – М.: Наука, 1987.
24. Козел, С.М. Сборник задач по физике / С.М. Козел, Э.И. Рашба, С.А. Славатинский. – М.: Наука, 1987.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1

Десятичные приставки к названиям единиц

Множитель	Приставка		
	Наименование	Обозначение	
		русское	международное
10^{18}	экса	Э	E
10^{15}	пета	П	P
10^{12}	тера	Т	T
10^{9}	гига	Г	G
10^{6}	мега	М	M
10^{3}	кило	к	k
10^{2}	(гекто)	г	h
10^{1}	(дека)	да	da
10^{-1}	(деци)	д	d
10^{-2}	(санти)	с	c
10^{-3}	милли	м	m
10^{-6}	микро	мк	μ
10^{-9}	нано	н	n
10^{-12}	пико	п	p
10^{-15}	фемто	ф	f
10^{-18}	атто	а	A

Таблица П2

Основные единицы СИ и их определения

Величина		Единица СИ		
			Обозначение	
Наименование	Размерность	Наименование	русское	международное
Длина	L	метр	м	m
Масса	M	килограмм	кг	kg
Время	T	секунда	с	s
Сила электрического тока	I	ампер	А	A
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	К	K
Количество вещества	N	моль	моль	mol
Сила света	J	кандела	кд	cd

Метр – единица длины, равная расстоянию, проходимому в вакууме плоской электромагнитной волной за 1/299792458 долей секунды.

Килограмм – единица массы, равная массе международного прототипа килограмма.

Секунда – единица времени, равная 9192631770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

Ампер – сила тока, проходящего по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, который вызывает между этими проводниками взаимодействие силой $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Кельвин – единица термодинамической температуры, равная 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды.

Моль – единица количества вещества, равная количеству вещества системы, в которой содержится столько же структурных элементов (атомов, молекул, ионов, электронов и других. частиц или специфицированных групп частиц), сколько содержится атомов в углероде массой 0,012 кг.

Кандела – единица силы света, равная силе света в данном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частоты $540 \cdot 10^{12}$ Гц (540 ТГц), сила излучения которого в этом направлении составляет 1/638 Вт/ср.

Таблица П3

Величины физических постоянных

Величина	Обозначение	Значение
Атомная единица массы	1 а.е.м.	$1{,}6605655(86)\cdot 10^{-27}$ кг
Объем моля идеального газа при нормальных условиях (T_0 = 273,15 К, p_0 = 101325 Па)	$V_0 = \dfrac{RT_0}{p_0}$	$0{,}02241383(70)\ \dfrac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}022045(31)\cdot 10^{23}\ \dfrac{1}{\text{моль}}$
Постоянная Больцмана	$k = R/N_A$	$1{,}380662(44)\cdot 10^{-23}\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$
Постоянная газовая универсальная	R	$8{,}31441(26)\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$
Постоянная гравитационная	G	$6{,}6720(41)\cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$
Ускорение свободного падения	g	$9{,}80665\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Таблица П4

Физические свойства элементов

Элемент	Плотность ρ, 10^3 кг/м^3	Молярная теплоемкость C_p, Дж/(мольК)	Коэффициент линейного расширения, α, 10^{-6} К$^{-1}$	Теплопроводность K, Вт/(м·К)
Алюминий	2,70	24,35	22,58	207
Висмут	9,75	25,52	16,6	8
Германий	5,46	28,8	5,8	60,3
Железо	7,87	25,0–26,7	12,1	75
Золото	19,3	25,23	14,0	310
Калий	0,87	29,96	84	100
Кальций	1,55	26,28	22	98
Кремний	2,42	-	2,3	167
Магний	1,74	24,6	-	71
Медь	8,93	24,52	16,6	395
Натрий	0,971	28,12	72	133
Олово (серое)	5,8	25,8	-	65
Ртуть (жидк.)	13,55	27,98	-	8,45
Свинец	11,34	26,44	28,3	34,9
Серебро	10,5	25,49	19	418
Стронций	2,54	25,11	20,6	-
Углерод (алмаз)	3,52	6,12	1,2	-
Цинк	6,92	25,4	32	111

Таблица П5

Физические свойства сплавов

Сплав	Плотность ρ, 10^3 кг/м^3	Коэффициент линейного расширения, α, 10^{-6} К$^{-1}$	Теплопроводность K, Вт/(м·К)
Бронзы	8,7–8,9	16–20	30–110
Дюралюминий	2,79	27	186
Инвар	8,00	1	11
Константан	8,88	15–17	21–22
Латунь	8,4–8,7	17–20	80–180
Манганин	8,5	16	36
Стали	7,5–8,00	10–13	40

Таблица П6

Физические свойства минералов и твердых веществ

Вещество	Плотность ρ, 10^3 кг/м^3	Коэффициент линейного расширения, α, 10^{-6} К$^{-1}$	Теплопроводность K, Вт/(м·К)
Алмаз	3,01–3,52	1,5	628
Асбест	2,0–2,8	-	0,1
Базальт	2,4–3,1	-	2,18
Гипс	2,31–2,33	-	0,18–1,05
Глина	1,8–2,6	8,1	1,05–1,26
Гранит	2,64–2,76	8,3	2,7–3,3
Кварц	2,65	1,46	-
Мел	1,9–2,8	-	1,1
Мрамор	2,6–2,84	3–15	2,7–3,0
Кирпич	1,4–2,2	3–9	1,0–1,3
Лед	0,917	-	2,5
Парафин	0,87–0,91	-	2,5
Пробка	0,22–0,26	-	-
Резина	1,1–1,2	220	0,146
Стекло	2,4–2,8	6	0,7–1,13

Таблица П7

Плотность ρ, температура плавления $t_{пл}$
и удельная теплоемкость c жидкостей
при температуре 20 °С и давлении 101,3 кПа

Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3	$t_{пл}$, °С	c, $\frac{кДж}{кг \cdot К}$
Анилин	1,026	–6	2,156
Ацетон	0,792	–95	2,18
Бензол	0,897	+5,5	1,72
Вода	0,998	0,0	4,19
Глицерин	1,260	+20	2,43
Спирт метиловый	0,793	–93,9	2,39
Спирт этиловый	0,789	–117	2,51
Эфир этиловый	0,714	–116	2,34

Таблица П8

Поверхностное натяжение α, вязкость η, теплопроводность K жидкостей при давлении 101,3 кПа

Вещество	α, 10^{-3} Н/м	η, 10^{-3} кг/(м с)	K, Вт/(м·К)
Анилин	40,8	4,40	0,181
Ацетон	23,3	0,324	0,170
Бензол	29,2	0,647	0,153
Вода	72,75	1,0019	0,596
Глицерин	63,4	1495	0,290
Масло касторовое	33,1	986	-
Ртуть	487	1,552	8,45
Спирт метиловый	23,0	0,576	0,222
Спирт этиловый	22,75	1,20	0,184
Эфир этиловый	16,96	0,242	-

Таблица П9

Физические свойства газов

Газ, формула, молярная масса M, 10^{-3} кг/моль	Плотность ρ, кг/м^3 (при t = = 0 °С и p = = 101,3 кПа)	Критическая температура $t_{кр}$, °С	Температура плавления $t_{пл}$, °С (при p = = 101,3 кПа)
Азот, N_2 28,016	1,2505	−147,1	−210,02
Аммиак, NH_3 17,031	0,7714	+132,4	−77,7
Аргон, Ar 39,944	1,7839	−122,4	−189,3
Водород, H_2 2,0158	0,08988	−239,9	−259,2
Вода пар, H_2O 18,0156	0,768	+374,2	0,00
Воздух сухой 28,96	1,2928	−140,7	−213
Гелий, He 4,002	0,1785	−267,9	−272,2
Закись азота, N_2O 44,013	1,9775	+36,5	-90
Кислород, O_2 32,00	1,42896	−118,8	−218,83
Метан, CH_4 16,04	0,7168	−82,5	−182,5
Неон, Ne 20,183	0,8999	−228,7	−248,6
Окись азота, NO 30,006	1,3402	−92,9	−167
Окись углерода, CO 28,01	1,2500	−140,2	−205
Углекислый газ CO_2 44,01	1,9768	+31,0	−56,6 (p = 519 кПа, тройная точка)
Хлор, Cl_2 70,914	3,22	+144	−100,5

Таблица П10

Тепловые свойства газов

Газ	Молярная теплоемкость C_p, Дж/(мольК) (интервал температур, °С)	$\gamma = C_P/C_V$	Вязкость η, 10^{-7} кг/(м с)	Теплопроводность K, Вт/(м·К)
Азот	29,1 (0–20)	1,404	174	2,43
Аргон	20,9 (15)	1,67	222	1,62
Водород	28,8 (10–200)	1,41	88	16,84
Вода пар	34,5 (100)	1,324	128	2,35 (100°С)
Воздух сухой	29,3 (0–100)	1,40	181	2,41
Гелий	21,0 (–180)	1,66	194	14,15
Закись азота	41,7 (16–200)	1,32	146	1,51
Кислород	29,1 (13–207)	1,40	200	2,44
Метан	39,8 (18–208)	1,31	109	3,02
Окись азота	29,0 (13–172)	1,40	188	2,38
Окись углерода	28,5 (26–198)	1,40	177	2,32
Углекислый газ	37,1 (15)	1,30	145	1,45
Хлор	36,8 (13–202)	1,36	132	0,72

Таблица П11

Упругие свойства материалов при 18°С

Материал	Модуль Юнга E, 10^{10} Па	Модуль сдвига G, 10^{10} Па	Коэффициент Пуассона μ	Модуль всестороннего сжатия K, 10^{10} Па
Металлы и сплавы				
Алюминий	7,1	2,6	0,35	7,58
Бронза	9,7–10,2	3,3–3,7	0,34–0,40	11,2
Висмут	3,2	1,2	0,33	3,13
Железо	19–20	7,7–8,3	0,29	16,9
Золото	7,8	2,7	0,44	21,7
Кадмий	4,9	1,9	0,30	4,16
Константан	16,3	6,1	0,32	15,5
Латунь	9,7–10,2	3,5	0,34–0,40	10,7
Медь	10,5–13,0	3,5–4,9	0,34	13,8
Никель	20,4	7,9	0,28	16,1
Олово	5,4	2,0	0,33	5,29
Платина	16,8	6,1	0,37	22,8
Свинец	1,6	0,56	0,44	4,6
Серебро	8,3	3,0	0,37	10,4
Сталь	20–21	7,9–8,9	0,25–0,33	16,8
Титан	11,6	4,4	0,32	10,7
Цинк	9,0	3,6	0,25	6,0
Дюралюминий	7,3	2,7	0,34	–
Неметаллические материалы				
Бамбук	3,3	–	–	–
Дуб	1,3	–	–	–
Кварцевое стекло	7,5	3,2	0,17	–
Стекло	5,1–7,1	3,1	0,17–0,32	3,75
Сосна	0,9	–	–	–
Резина мягкая	0,00015–0,0005	0,00005–0,00015	0,46–0,49	16,8

Таблица П12

Скорость звука в твердых телах (при 20 °C)

Вещество	Скорость продольных волн $c_{\parallel}$, 10^3 м/с	Скорость поперечных волн $c_{\perp}$, 10^3 м/с	Скорость продольных волн в тонком стержне c, 10^3 м/с
Алюминий	6,26	3,08	5,08
Бетон	4,25–5,25	-	-
Вольфрам	5,46	2,62	4,31
Гранит	5,40	-	3,95
Дуб (вдоль волокон)	-	-	4,05
Железо	5,85	3,23	5,17
Кварц плавленый	5,98	3,76	5,76
Латунь	4,43	2,12	3,49
Медь	4,70	2,26	3,71
Никель	5,63	2,96	4,79
Олово	3,32	1,67	2,73
Полистирол	2,35	1,12	-
Пробка	0,50	-	-
Серебро	3,60	1,59	2,64
Сосна (вдоль волокон)	-	-	3,60
Стекло (крон)	5,66	3,42	5,30
Стекло (флинт)	3,76	2,22	3,49
Сталь (инструментальная)	6,10	-	5,05
Сталь (нержавеющая)	5,74	3,09	-
Цинк	4,17	2,41	3,81

Таблица П13

Скорость звука в жидкостях (при 20 °C) и газах (при 0 °C)

Жидкости	c, м/с	Газы	c, м/с
Анилин	1656	Азот	334
Ацетон	1192	Аммиак	415
Бензол	1295	Аргон	319
Вода	1497	Водород	1284
Глицерин	1923	Воздух сухой	332
Керосин	1315	Гелий	965
Ртуть	1451	Кислород	314
Сероуглерод	1158	Метан	430
Скипидар	1225	Неон	433
Спирт этиловый	1165	Вода, пар (100 °C)	405

Таблица П14

Физические свойства воды при различных температурах

Температура t, °C	Плотность ρ, 10^3 кг/м^3	Поверхностное натяжение α, 10^{-3} Н/м	Вязкость η, 10^{-3} кг/(м с)	Удельная теплоемкость c, 10^3 Дж/(кг К)
0	0,9999	75,62	1,788	4,2174
10	0,9997	74,11	1,306	4,1919
20	0,9982	72,58	1,004	4,1816
30	0,9957	71,03	0,801	4,1782
40	0,9922	69,41	0,553	4,1783
50	0,9881	67,79	0,549	4,1804
60	0,9838	66,04	0,470	4,1841
70	0,9778	64,27	0,406	4,1893
80	0,9766	62,50	0,356	4,1961
90	0,9633	60,68	0,316	4,2048
100	-	58,80	0,283	4,2145 (99 °C)

Таблица П15

Удельная теплота сгорания топлива

Вид топлива	q, МДж/кг	Вид топлива	q, МДж/кг
Бурый уголь	9,3	Дизельное топливо	42
Древесный уголь	31,5	Бензин	46
Дрова сухие	8,4	Керосин	44
Порох	3,8	Мазут	40
Торф	15	Спирт	27

Таблица П16

Константы Ван-дер-Ваальса

Вещество	a, (Н· м^4)/моль^2	b, 10^{-6} м^3/моль
Азот	0,141	39,2
Аммиак	0,422	37,2
Аргон	0,136	32,3
Ацетон	1,58	98,5
Бензол	1,85	115
Вода	0,555	30,5
Водород	0,0245	26,6
Гелий	0,0035	23,8
Кислород	0,138	31,8
Ртуть	0,82	16,7
Спирт метиловый	0,95	67
Спирт этиловый	1,22	84
Эфир этиловый	1,75	134

Таблица П17

Диаметры молекул

Вещество	Диаметр d, нм	Вещество	Диаметр d, нм
Азот	0,37	Метан	0,444
Аргон	0,36	Неон	0,354
Водород	0,27	Окись углерода	0,370
Гелий	0,215	Ртуть	0,30
Кислород	0,356	Углекислый газ	0,454
Криптон	0,314	Хлор	0,544

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КУЖИР Павел Григорьевич
ЮРКЕВИЧ Наталья Петровна
САВЧУК Галина Казимировна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

В 2 частях

Часть 1

МЕХАНИКА. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

3-е издание, исправленное и дополненное

Технический редактор *О. В. Песенько*

Подписано в печать 14.08.2014. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 12,79. Уч.-изд. л. 10,00. Тираж 400. Заказ 261.
Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.