

УДК 539

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРА, ПОДВЕРЖЕННОГО ДАВЛЕНИЮ В УПРУГОМ СЛУЧАЕ

Гундина М.А., Юхновская О.В.

Белорусский национальный технический университет  
Минск, Республика Беларусь

**Аннотация.** В данной статье рассматривается решение задачи определения напряженно-деформированного состояния толстостенного цилиндра, подверженного внутреннему и внешнему давлению, реализованные в компьютерной системе WolframMathematica.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, толстостенный цилиндр, метод конечных элементов.

### SIMULATION OF THE STRESS-DEFORMED STATE OF A CYLINDER UNDER PRESSURE IN ELASTIC CASE

Hundzina M., Yuhnovskaya O.

Belarusian National Technical University  
Minsk, Belarus

**Abstract.** This article discusses the solution to the problem of determining the stress-strain state of a thick-walled cylinder subject to internal and external pressure, implemented in the Wolfram Mathematica computer system.

**Key words:** stress-strain state, thick-walled cylinder, finite element method.

Адрес для переписки: Юхновская О.В., пр. Независимости, 65, г. Минск 220113, Республика Беларусь  
e-mail: juhnovskaja@bntu.by

Задача об исследовании разрушения той или иной конструкции часто является нелинейной и остается сложной и малоизученной. Рассмотрим решение упругой задачи определения напряженно-деформированного состояния толстостенного цилиндра, подверженного внутреннему и внешнему давлению, реализованные в компьютерной системе Wolfram Mathematica.

Известно, что цилиндр следует считать толстостенным, если толщина его стенки больше одной десятой среднего радиуса цилиндра. Двумя сечениями, перпендикулярными к оси цилиндра и находящимися друг от друга на расстоянии, вырежем кольцо (рис. 1).

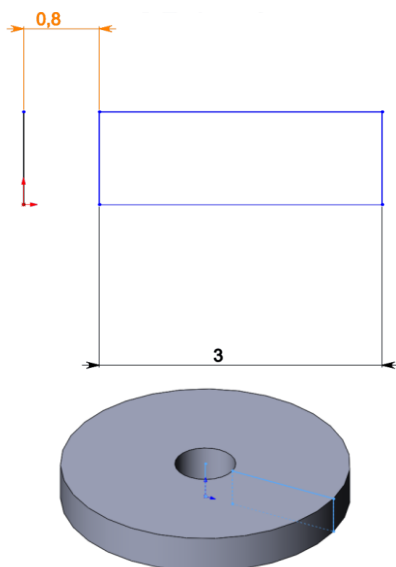


Рисунок 1 – Исходный вид цилиндра

Рассмотрим концы цилиндра, которые могут свободно расширяться. Пусть  $\sigma_z = 0$ . За счет равномерной радиальной деформации  $\tau_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$  обозначают касательные и радиальные напряжения, действующие перпендикулярно сторонам элемента.

Поскольку  $r$  – единственная независимая переменная, приведенное выше уравнение можно записать как

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta = 0.$$

Из закона Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r).$$

Деформация элемента симметрична относительно оси и поэтому вызовет радиальные перемещения всех точек цилиндра. Пусть  $u$  – радиальное перемещение цилиндрической поверхности радиуса  $r$ . Абсолютное радиальное удлинение элемента  $dr$  будет равно  $du$ , а относительное удлинение:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}.$$

Относительное удлинение в тангенциальном направлении на радиусе  $r$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}.$$

В случае двухстороннего растяжения, которому подвергается рассматриваемый элемент,

согласно закону Гука, напряжения и деформации связаны между собой следующими зависимостями:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta),$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r).$$

Подставляя их в уравнение равновесия:

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{du}{dr} + \nu u\right) - \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr}\right) = 0,$$

$$\frac{du}{dr} + r \frac{d^2u}{dr^2} + \nu \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} - \nu \frac{du}{dr} = 0,$$

или

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0.$$

Вышеприведенное уравнение называется уравнением равномерного радиального смещения. Решение вышеуказанного уравнения:

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные.

Следовательно,

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ C_1(1+\nu) - C_2 \left( \frac{1-\nu}{r^2} \right) \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ C_1(1+\nu) + C_2 \left( \frac{1-\nu}{r^2} \right) \right].$$

Константы определяются из граничных условий, когда

$$\begin{aligned} r = a, & \quad \sigma_r = -p_i, \\ r = b, & \quad \sigma_r = -p_0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta),$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r).$$

Значит

$$\sigma_r = \left( \frac{a^2 p_i - b^2 p_0}{(b^2 - a^2)} \right) - \left( \frac{(p_i - p_0) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} \right),$$

$$u = \left( \frac{1-\nu}{E} \right) \frac{(a^2 p_i - b^2 p_0) r}{(b^2 - a^2)} + \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \frac{(p_i - p_0) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r}.$$

График компонента напряжения  $\sigma_r$  представлен на рис. 2.

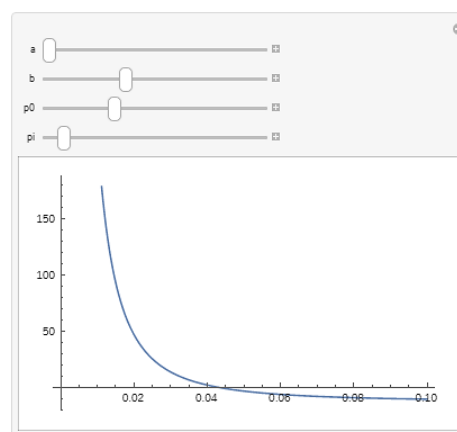


Рисунок 2 – График компонента напряжения  $\sigma_r$

В условиях квазистатического нагружения разрушение цилиндра происходит в результате развития трещины, распространяющейся в радиальном направлении от внутренней поверхности. Длина участка устойчивого роста трещины оказывается сопоставимой с толщиной цилиндра, поэтому анализ его прочности должен основываться на представлениях механики разрушения. При этом необходимо учесть возможность пластического деформирования.

УДК. 539.216; 539.22

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭВТЕКТИЧЕСКОГО СОСТАВА СПЛАВА Al-Si ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ ЗАТВЕРДЕВАНИИ

Гусакова О.В.<sup>1</sup>, Шепелевич В.Г.<sup>2</sup>, Гусакова С.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Международный государственный экологический институт им. А.Д.Сахарова БГУ

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет

Минск, Республика Беларусь

**Аннотация.** Представлены результаты исследования микроструктуры силуминов околоэвтектического состава, полученных при скоростях охлаждения расплава  $10^2$  К/с и  $10^5$  К/с. Показано, что повышение скорости затвердевания до  $10^5$  К/с не приводит к смещению точки эвтектики. Сплав, с концентрацией Si 12,5 мас. % содержит первичные дендриты  $\alpha$ -Al, при концентрации кремния 13,6 мас.% наблюдаются первичные кристаллы Si. При высокоскоростном затвердевании наименьший объем фазы  $\alpha$ -Al при концентрации Si 12,7 мас.%, что соответствует эвтектике при равновесном затвердевании.

**Ключевые слова:** алюминий, кремний, эвтектика, высокоскоростное затвердевание.