

Литература

1. Петрухин, О. М. Сенсоры в аналитической химии / О. М. Петрухин, О. О. Максименко // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д. И. Менделеева). – 2008. – Т. LII, № 2. – С. 3–6.

2. Arshak, K. I. Development of new capacitive strain sensors based on thick film polymer and cermet technologies / K. I. Arshak, D. McDonagh, M. A. Durcan // Sensors and Actuators. – 2000. – Vol. 79. – P. 102–114.

УДК 534-16:534-8:621.9.048.6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА ДЛЯ РАСЧЕТА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОЛЬЦЕВЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

Степаненко Д.А.¹, Бунчук К.А.², Жуков В.И.³, Роговцова А.С.¹

¹Белорусский национальный технический университет

²РИУП «Научно-технологический парк БНТУ «Политехник»

³ГУ «Минский научно-практический центр хирургии, трансплантологии и гематологии»

Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Разработана механико-математическая модель колебаний кольцевых упругих элементов, используемых в качестве усилителей колебаний по амплитуде. Рассмотрен численный пример расчета кольцевого усилителя колебаний с уклонами торцовых поверхностей. Достоверность полученных результатов подтверждена путем их сравнения с результатами моделирования с помощью метода конечных элементов и путем проверки обобщенного условия ортогональности собственных форм колебаний.

Ключевые слова: упругие колебания, усилитель колебаний, метод гармонического баланса.

APPLICATION OF HARMONIC BALANCE METHOD FOR DESIGN AND MODELLING OF RING-SHAPED AMPLIFIERS OF ELASTIC VIBRATIONS

Stepanenko D.¹, Bunchuk K.², Zhukov V.³, Rogovcova A.¹

¹Belarusian National Technical University

²State Unitary Innovative Enterprise “Science and Technology Park of BNTU “Polytechnic”

³State Institution “Minsk Scientific and Practical Center for Surgery, Transplantology and Hematology”

Minsk, Belarus

Abstract. The article presents mechanico-mathematical model of vibrations of ring-shaped elastic elements used as amplifiers of vibrations’ amplitude. Numerical example of modelling of ring-shaped amplifier with oblique planar surfaces is considered. Validity of the obtained results is proved by comparing them to the results of modelling using finite element method and by checking generalized orthogonality condition for the eigenmodes of vibration.

Key words: elastic vibrations, amplifier of vibrations, method of harmonic balance.

Адрес для переписки: Степаненко Д.А., пр. Независимости, 65, г. Минск 220113, Республика Беларусь
e-mail: dstepanenko@bntu.by

Усиление упругих, в частности, ультразвуковых, колебаний по амплитуде может осуществляться стержневыми концентраторами в виде прямолинейных стержней с изменяющимися по длине площадью поперечного сечения и/или механическими свойствами материала или с помощью кольцевых упругих элементов, у которых перечисленные характеристики изменяются по длине окружности. Расчет и проектирование усилителей упругих колебаний могут производиться численными, аналитическими и полуаналитическими методами. Примером последних является метод гармонического баланса (МГБ), ранее использованный авторами для расчета и проектирования стержневых концентраторов [1]. В данной работе рассматривается применение МГБ для расчета и проектирования кольцевых усилителей упругих колебаний (рис. 1).

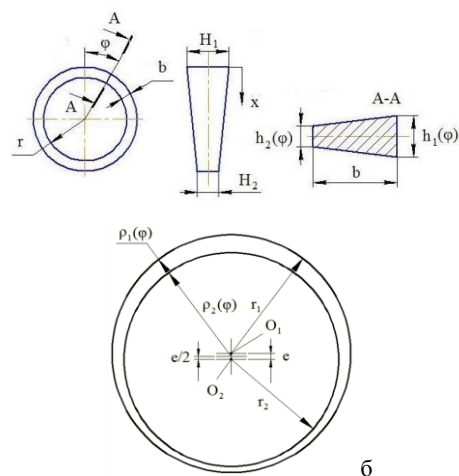


Рисунок 1 – Варианты конструктивного исполнения кольцевых усилителей упругих колебаний

Для описания изгибных колебаний кольцевого упругого элемента используется уравнение

$$\frac{1}{r_m^4}(Iu^V + 3I'u^{IV} + 2Iu'''' + 3I''u'' + 4I'u'' + I''''u'' + I'u' + 3I''u' + I'u + I''u) + \frac{\rho\omega^2}{E}(S \int_0^\phi u d\phi - S'u - Su') = -\frac{\rho\omega^2 w_0}{E} S, (1)$$

где $u = w'$, $w(\phi)$ – амплитуда радиальной составляющей колебательного смещения, $w_0 = w(0)$ – значение амплитуды во входном поперечном сечении, ω – круговая частота колебаний, $S(\phi)$ – площадь поперечного сечения, $I(\phi)$ – осевой момент инерции поперечного сечения, r_m – радиус средней линии, E – модуль продольной упругости материала, ρ – плотность материала.

Входящие в уравнение (1) периодические функции $I(\phi)$, $S(\phi)$ и $w(\phi)$ представляются в виде многочленов Фурье с коэффициентами $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$ и $a_i^{(3)}$. Вектор коэффициентов $a^{(3)}$ определяется с помощью МГБ, приводящего к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений

$$M(\omega)a^{(3)} = -\frac{\rho\omega^2 w_0}{E} a^{(2)}, (2)$$

имеющей решение в смысле наименьших квадратов

$$a^{(3)} = -\frac{\rho\omega^2 w_0}{E} M^\dagger(\omega)a^{(2)}, (3)$$

где $M^\dagger(\omega) = (M^T(\omega)M(\omega))^{-1}M^T(\omega)$ – псевдообратная матрица Мура-Пенроуза.

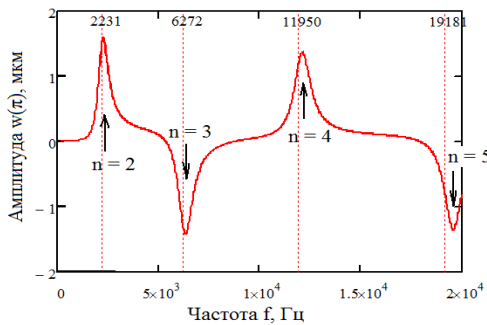


Рисунок 2 – Расчетная зависимость амплитуды $w(\pi)$ от частоты f

Для определения собственных частот колебаний при заданных значениях геометрических параметров рассчитываются решения системы (2) для ряда значений частоты f , а собственные частоты определяются как значения f , при которых модуль $|w(\pi)|$ амплитуды в выходном поперечном сечении достигает максимумов:

$$f_{cob} = \arg \max_f \left| w_0 + 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} \frac{a_{2k-1}^{(3)}(f)}{2k-1} \right|, (4)$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа, N – число гармоник многочлена Фурье.

Аналогичным образом определяются геометрические параметры, например, толщина b_0 , обеспечивающие заданное целевое значение собственной частоты колебаний f_0 :

$$b_0 = \arg \max_b \left| w_0 + 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} \frac{a_{2k-1}^{(3)}(b, f_0)}{2k-1} \right|. (5)$$

В качестве примера был рассмотрен расчет кольцевого упругого элемента с уклонами торцовых поверхностей (рис. 1, а) при следующих данных: внутренний радиус $r = 20$ мм, радиальная толщина $b = 1,5$ мм, предельные значения осевой толщины $H_1 = 3,5$ мм и $H_2 = 2$ мм, плотность $\rho = 7800$ кг/м³, модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, число гармоник $N = 5$, входная амплитуда $w_0 = 1$ мкм. На рис. 2 приведена расчетная зависимость амплитуды $w(\pi)$ от частоты f , экстремумы которой соответствуют собственным частотам различного порядка n .

Вертикальными линиями отмечены значения собственных частот, определенные методом конечных элементов (МКЭ) с помощью программы COMSOL Multiphysics. Эти значения отличаются от значений, полученных с помощью МГБ, на 2,0–2,2 %. Аналогичная точность была получена для кольцевого элемента с эксцентричными цилиндрическими поверхностями (рис. 1, б).

Корректность полученных результатов была подтверждена путем проверки выполнения обобщенного условия ортогональности для соответствующей уравнению (1) обобщенной задачи Штурма-Лиувилля 6-го порядка

$$\int_0^\pi \tilde{w}_n(\phi) L \tilde{w}_m(\phi) d\phi = \delta_{nm}, (6)$$

где $L = -S + S' \frac{d}{d\phi} + S \frac{d^2}{d\phi^2}$ – линейный дифференциальный оператор, δ_{nm} – символ Кронекера, $\tilde{w}_n(\phi)$ – нормированные (отнесенные к величине $\sqrt{\int_0^\pi w_n(\phi) L w_n(\phi) d\phi}$) собственные формы колебаний n -го порядка.

Абсолютное значение интеграла (6) при $n \neq m$ составило от $5,1 \cdot 10^{-5}$ до $9,8 \cdot 10^{-4}$, то есть условие ортогональности выполняется с высокой точностью.

Предложенный в работе метод расчета кольцевых усилителей упругих колебаний в силу своего полуаналитического характера упрощает анализ и оптимизацию получаемых решений в сравнении с численными методами и, как следствие, обладает по сравнению с ними более высокой прогностической способностью.

Литература

1. Степаненко, Д. А. Расчет и проектирование стержневых ультразвуковых концентраторов с помощью метода гармонического баланса / Д. А. Степаненко, В. И. Жуков, А. С. Роговцова // Электронный журнал «Техническая акустика». – 2019. – № 3. – 11 с.