МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Экономика и организация энергетики»

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Учебно-методическое пособие
для студентов специальности 1-53 01 05
«Автоматизированные электроприводы»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области автоматизации технологических процессов,
производств и управления*

Минск
БНТУ
2022

УДК 620.9:658(075.8)
ББК 65.9я7
О-64

Составитель
А. В. Левковская

Рецензенты:
А. Д. Луцевич, А. А. Якушев

Организация производства: учебно-методическое пособие для
О-64 студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» / сост. А. В. Левковская. – Минск : БНТУ, 2022. – 48 с.
ISBN 978-985-583-699-6.

В учебно-методическом пособии приведены теоретические основы и даны рекомендации по решению задач по курсу «Организация производства» для студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы».

Выполнение заданий позволит закрепить теоретический материал и получить навыки соответствующих расчетов и анализа.

УДК 620.9:658(075.8)
ББК 65.9я7

ISBN 978-985-583-699-6

1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ БАЛАНСЫ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АГРЕГАТОВ И ИХ СТРУКТУРА

Во всех энергетических системах, а также отдельных их частях осуществляются процессы преобразования, передачи, распределения и потребления энергии, что требует соблюдения энергетического баланса, для любого агрегата составляющегося из приходной и расходной частей, между которыми должно соблюдаться равенство. В приходную часть энергобаланса включается подведенная энергия. В расходной части учитываются как полезная энергия, так и ее потери:

$$W = W_{\text{пол}} + W_{\text{пот}}; \tag{1.1}$$

$$N = N_{\text{пол}} + N_{\text{пот}}, \tag{1.2}$$

где W – подведенная энергия;

$W_{\text{пол}}$ – полезно используемая энергия;

$W_{\text{пот}}$ – потери энергии;

N – подведенная мощность;

$N_{\text{пол}}$ – полезно использованная мощность;

$N_{\text{пот}}$ – потерянная мощность.

В этих уравнениях все величины выражены в одинаковых единицах энергии или мощности. К подведенной энергии относятся: энергия, которая вводится в агрегат одним или несколькими энергоносителями; физическая энергия реальных компонентов процесса; дополнительная энергия внутренних источников процесса, получаемая в результате разного рода химических и физических превращений веществ. Энергетические характеристики строятся на основе балансов мощностей агрегатов, составленных для ряда значений производительности, которая принимается за независимую величину. Подведенная, потерянная и полезная мощность считаются функциональными величинами.

При построении энергетических характеристик ряда энергетических агрегатов за независимую переменную величину принимаются нагрузка или полезная мощность агрегата.

2. ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ТРУДА

Производительность труда в отраслях материального производства определяется объемом валовой, товарной, чистой и реализуемой продукции, приходящимся на одного среднесписочного рабочего промышленно-производственного персонала в единицу времени.

2.1. Объемы продукции по энергетическим производствам

Величина производительности труда зависит от затрат живого труда и затрат овеществленного труда. Для оценки уровня производительности труда применяются различные показатели, отличающиеся главным образом способами измерения произведенной продукции или объема работ. По этому признаку объем произведенной продукции сводят к трем методам расчета: 1) натуральному; 2) стоимостному; 3) трудовому.

При натуральном методе производительность труда определяется отношением общего объема продукции в натуральных единицах к среднесписочному составу работающих или трудоемкости ее изготовления.

Натуральный метод прост, нагляден, приемлем для предприятий, вырабатывающих однородную продукцию. Для предприятий, выпускающих большой объем незавершенного производства, им пользоваться невозможно. Для этого применяют стоимостной метод. Сущность стоимостного метода состоит в том, что уровень производительности труда определяется отношением объемов валовой, чистой, реализованной продукции в неизменных оптовых ценах к численности персонала или затратам рабочего времени. Основной недостаток: показатель уровня производительности труда зависит от цен на продукцию, которая не соответствует трудоемкости ее изготовления, поэтому во многих отраслях используют трудовой метод, сущность которого состоит в том, что объем продукции выражается в неизменных единицах времени и делится на фактически затраченное время или число работников. Применение этого метода в некоторых отраслях затруднено из-за сложности определения трудоемкости.

Под трудоемкостью понимают затраты труда на производство единицы продукции или работы.

В процессе производства затрачивается труд различных работников, поэтому в зависимости от состава включаемых затрат различают следующие виды трудоемкости: технологическую, цеховую и общезаводскую.

В практике планирования различают нормативную трудоемкость – определяемую по нормам; фактическую – отражающую действительные затраты времени; плановую – по планам; проектную – включающую затраты труда по проекту.

2.2. Пути повышения производительности труда

Важнейшим фактором повышения производительности труда является НТП, совершенствование организации производства и труда, экономического стимулирования труда и управления производством, развитие соревнований, механизация и автоматизация производства. Принципы организации труда: ясная цель; здравый смысл – поставленная цель; компетентный совет исполнителю; дисциплина труда; благоприятный микроклимат в коллективе; четкий и ясный отчет о проделанной работе; четкое распределение труда между исполнителями; установление правильных норм и тарифов; нормальные условия труда; нормирование операций; соблюдение инструкций и техники безопасности; награда за высокую производительность труда.

3. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Предметом теории управления запасами является отыскание такой организации поставок или производства, при которых суммарные затраты под функционирование системы были бы минимальными.

Среди основных параметров работы системы управления запасами выделяют следующие:

D – интенсивность спроса, ед./ед. врем.;
K – затраты на оформление заказа, ден. ед.;
y – объем заказа, ед.;
h – удельные затраты на хранение, ден. ед./ед. врем.;
t_0 – продолжительность цикла заказа, ед. врем.;
a – интенсивность пополнения запаса, ед.;
w – величина дефицита, ед.;
p – удельные потери от дефицита, ден. ед./ед. врем.;
L – срок выполнения заказа, ед. врем.;
q – точка разрыва цен, ед.;
c_1, c_2 – стоимость единицы продукции, ден. ед.;
R – точка возобновления заказа, ед.;
TCU – суммарные затраты в единицу времени, ден. ед.
*– параметр является оптимальным.

Рассмотрим основные виды систем управления запасами.

3.1. Бездефицитная простейшая однономенклатурная модель

Простейшая модель оптимальной партии поставки (система Уилсона) строится при следующих предположениях: спрос в единицу времени является постоянным; заказанная партия доставляется одновременно; дефицит недопустим; затраты на организацию поставки постоянны и не зависят от величины партии; издержки содержания единицы продукции в течение единицы времени также постоянны.

Уровень запаса равномерно снижается от y до 0, после чего подается заказ на доставку новой партии величиной y. Заказ выполняется мгновенно, и уровень запаса восстанавливается до величины y (рис. 3.1).

$$TCU = \frac{KD}{y} + \frac{hy}{2}; \quad R = LD; \quad t_0 = y/D. \tag{3.1}$$

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}. \tag{3.2}$$

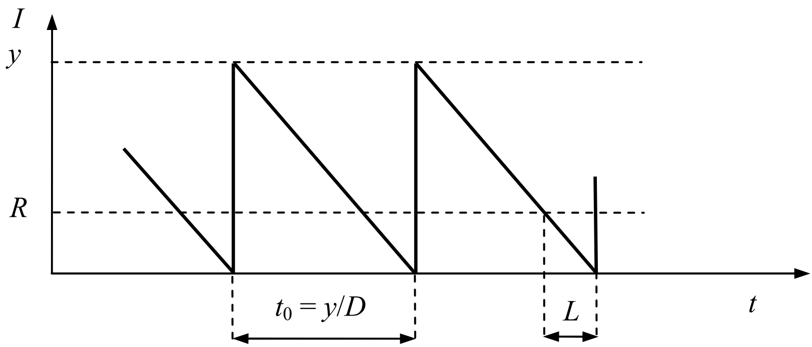


Рис. 3.1. Динамика изменения уровня запаса I для бездефицитной простейшей однономенклатурной модели

3.2. Бездефицитная простейшая однономенклатурная модель с конечной интенсивностью поступления заказа

Пусть заказанная партия поступает с интенсивностью a единиц в единицу времени. Очевидно, что система может работать без дефицита, если интенсивность пополнения запаса a превосходит интенсивность спроса D. В течение времени t_1 (время накопления запаса) запас одновременно и поступает, и расходуется. В течение t_2 запас только расходуется (рис. 3.2). В случае, когда интенсивность поставки значительно больше интенсивности потребления $D / a \to 0$, параметры работы системы становятся параметрами обычной системы Уилсона.

$$TCU = \frac{KD}{y} + \frac{hy}{2}\left(1 - \frac{D}{a}\right); \qquad Y = y\left(1 - \frac{D}{a}\right);$$

$$t = t_1 + t_2; \qquad t_1 = \frac{y}{a}; \qquad t_2 = \frac{Y}{D}; \tag{3.3}$$

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h\left(1 - \dfrac{D}{a}\right)}}. \tag{3.4}$$

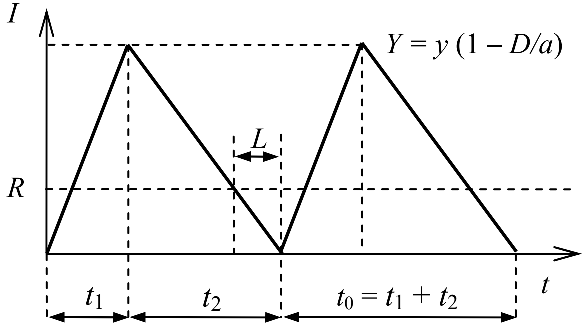


Рис. 3.2. Динамика изменения уровня запасов *I* для однономенклатурной модели с конечной интенсивностью поступления заказа

3.3. Простейшая однономенклатурная модель с учетом неудовлетворенных требований

В некоторых случаях, когда потери из-за дефицита сравнимы с издержками хранения, допускается дефицит. Пусть требования, поступающие в момент отсутствия запаса, берутся на учет. Максимальная величина наличного запаса $Y = y - w$ расходуется за время t_1 (время существования наличного запаса), а затем поступающие требования ставятся на учет в течение времени t_2 (время дефицита). При поступлении очередной партии в первую очередь удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас (рис. 3.3).

$$TCU = \frac{KD}{y} + \frac{h(y-w)^2 + pw^2}{2y}; \quad t = t_1 + t_2;$$

$$t_1 = \frac{y-w}{D}; \quad t_2 = \frac{w}{D}; \tag{3.5}$$

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD(p+h)}{ph}}; \quad w^* = \sqrt{\frac{2KDh}{p(p+h)}}. \tag{3.6}$$

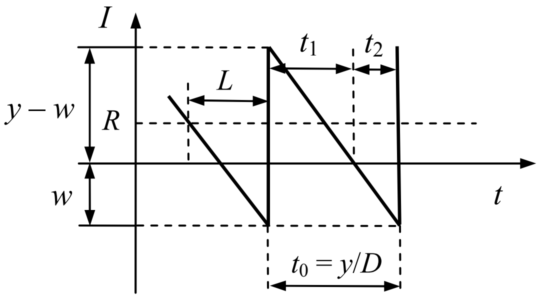


Рис. 3.3. Динамика изменения уровня запасов *I* для однономенклатурной модели с учетом неудовлетворенных требований

В случае, когда необходимо учесть конечную интенсивность поступления заказа, используются расчетные формулы

$$TCU = \frac{KD}{y} + \frac{h\left\{y\left(1-\frac{D}{a}\right)-w\right\}^2 + pw^2}{2\left(1-\frac{D}{a}\right)y}; \tag{3.7}$$

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h\left(1-\frac{D}{a}\right)}}; \qquad w^* = \sqrt{\frac{2KDh\left(1-\frac{D}{a}\right)}{p(p+h)}}. \tag{3.8}$$

3.4. Модель экономичного размера заказа с разрывами цен

Данная модель управления запасами отличается от первой только тем, что продукция может быть приобретена со скидкой, если объем заказа y превышает некоторый фиксированный уровень Q (оптовые закупки).

Таким образом, стоимость единицы продукции c определяется как

$$c = \begin{cases} c_1, \text{ если } y \le Q, \\ c_2, \text{ если } y > Q, \end{cases}$$

где $c_1 > c_2$.

Тогда издержки в единицу времени будут учитывать и затраты на приобретение продукции

$$TCU(y) = \begin{cases} TCU_1(y) = Dc_1 + \dfrac{KD}{y} + \dfrac{hy}{2}, \text{ если } y \le Q, \\ TCU_2(y) = Dc_2 + \dfrac{KD}{y} + \dfrac{hy}{2}, \text{ если } y > Q. \end{cases} \tag{3.9}$$

Графики функций TCU_1 и TCU_2 представлены на рис. 3.4. Так как значения этих функций отличаются только на постоянную величину, то точки их минимума совпадают и находятся в точке $Q_1 = \sqrt{\dfrac{2KD}{h}}$.

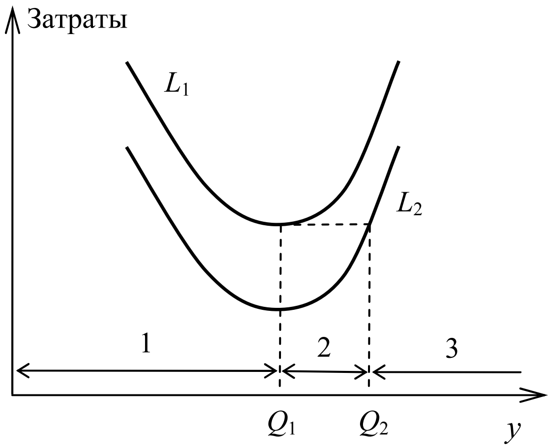


Рис. 3.4. Зависимость издержек от величины партии заказа

График функции затрат $TCU(y)$ при $y \in [0;\ Q]$ совпадает с графиком функции $TCU_1(y)$, а затем совпадает с графиком функции $TCU_2(y)$. Определение оптимального объема заказа y^* зависит от того, где находится точка разрыва цены Q по отношению к указанным на рис. 3.4 зонам 1, 2 и 3. Величина Q_2 определяется из уравнения $TCU_2(Q_2) = TCU_1(Q_1)$. Оптимальное значение y^* определяется так:

$$y^* = \begin{cases} Q_1, \text{ если } Q \text{ находится в зоне 1 или 3}, \\ Q, \text{ если } Q \text{ находится в зоне 2}. \end{cases}$$

4. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

4.1. Постановка задачи линейного программирования

Задача линейного программирования (ЛП) в общем виде записывается следующим образом (1.1)–(1.4). Каждой задаче ЛП может быть поставлена в соответствие другая вполне определенная задача ЛП, чтобы при решении одной из них одновременно решалась и другая. Эти задачи названы парой взаимодвойственных задач. Любой задаче ЛП (4.1)–(4.4) можно поставить в соответствие двойственную задачу вида (4.5)–(4.8):

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max \ (\min), \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \ i = \overline{1,\ k}, \ k \le m, & (4.2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \ i = \overline{k+1,\ m}, & (4.3) \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,\ l}, \ l \le n; & (4.4) \end{cases}$$

$$f = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \min \ (\max), \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \ge c_j, \ j = \overline{1,\ k}, & (4.6) \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i = c_j, \ j = \overline{k+1,\ n}, & (4.7) \\ y_i \ge 0, \ i = \overline{1,\ s}. & (4.8) \end{cases}$$

где x_j – неизвестные величины;

y_i имеет произвольный знак для $i = \overline{s+1, m}$.

a_{ij}, b_i, c_j – заданные действительные числа;

(4.1) – целевая функция (ЦФ);

(4.2), (4.3) – основные ограничения задачи;

(4.4) – неосновные ограничения.

Для решения задач ЛП может быть использован графический метод, симплекс-метод, метод искусственного базиса, модифицированный симплекс-метод и двойственный симплекс-метод.

Правила составления двойственных задач:

1) число неизвестных одной задачи равно числу ограничений второй;

2) матрицы коэффициентов системы ограничений получаются одна из другой путем транспонирования;

3) знаки неравенств в системе ограничений заменяют на противоположные, например ≤ на ≥ и наоборот;

4) свободные члены ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи и, наоборот, коэффициенты целевой функции исходной задачи преобразуются в свободные члены ограничений двойственной;

5) критерий оптимальности целевой функции заменяется на противоположный, например, max на min.

4.2. Анализ линейных моделей на чувствительность (устойчивость)

Анализ линейных моделей на чувствительность – это процесс, реализуемый после нахождения оптимального решения. При таком анализе рассматривается комплекс линейных оптимизационных моделей. Это придает задаче определенную динамичность, что позволяет проанализировать влияние возможных изменений исходных данных на полученное ранее оптимальное решение.

Неизбежное колебание значений таких экономических параметров, как цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке и т. д. может привести к неоптимальности или непригодности прежнего режима работы. Для учета подобных ситуаций проводится анализ чувствительности, т. е. анализ того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение задачи ЛП.

Отсутствие такого анализа может привести к тому, что полученное оптимальное решение устареет еще до своей реализации.

Основные задачи анализа на чувствительность.

1. Анализ изменения запасов ресурсов позволяет ответить на вопросы:

– на сколько можно увеличить запас некоторого дефицитного ресурса, чтобы улучшить значения целевой функции;

– на сколько можно уменьшить запас некоторого недефицитного ресурса, сохранив полученное ранее оптимальное значение целевой функции.

Если ресурс израсходован полностью, его относят к разряду **дефицитных**. Ресурс в избытке называют **недефицитным**. Объем недефицитного ресурса можно уменьшить на величину избытка без изменения значения целевой функции. Объем дефицитного ресурса не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение становится избыточным.

2. Определение наиболее выгодного ресурса позволяет ответить на вопрос: какому из дефицитных ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств. Вводится характеристика ценности единицы ресурса:

$$y_i = \frac{\text{максимальное приращение целевой функции}}{\text{максимальный допустимый прирост } i\text{-го ресурса}}, \quad (4.9)$$

где y_i – теневая цена ресурса (стоимость единицы ресурса).

Теневая цена показывает, на сколько изменится значение целевой функции при изменении запаса ресурса на единицу.

Теневая цена позволяет определить статус ресурса. У недефицитного ресурса теневая цена равна нулю, положительное значение теневой цены говорит о дефицитности данного ресурса.

Значение теневой цены ресурсов – это решение задачи, двойственной к данной.

3. Определение пределов изменения коэффициентов ЦФ:

– каков диапазон изменения того или иного коэффициента ЦФ, при котором не происходит изменение оптимального решения;

– на сколько следует изменить тот или иной коэффициент ЦФ, чтобы сделать дефицитный ресурс недефицитным и наоборот.

4.3. Экономическая интерпретация решения задач ЛП

Пример 4.1. Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$. Для производства продукции используется два вида сырья – А и Б. Максимально возможные запасы сырья, расход сырья на единицу приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Сырье	Расход сырья на единицу		Запас сырья
	$П_1$	$П_2$	
А	2	3	9
Б	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спрос на продукцию $П_2$ больше, чем на единицу. Спрос на продукцию $П_2 \leq 2$ ед. в сутки. Цена реализации $П_1$ составляет 3 ден. ед., $П_2$ – 4 ден. ед.

Какой объем продукции каждого вида должно выпускать предприятие, чтобы максимизировать свой суточный доход?

Решение.

Введем переменные: x_1 – объем выпуска продукции П$_1$; x_2 – объем выпуска продукции П$_2$. Математическая модель задачи и задача в каноническом виде имеют следующий вид:

$$F = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 9; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 13; \\ x_1 - x_2 \le 1; \\ x_2 \le 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = 9; \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 13; \\ x_1 - x_2 + x_5 = 1; \\ x_2 + x_6 = 2; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Дополнительные переменные (x_3, x_4, x_5, x_6, которые прибавили к левым частям соответствующих неравенств) имеют экономический смысл: они показывают величину неиспользованного ресурса. Так, в данном примере x_3 показывает величину неиспользованного сырья А, x_4 – сырья Б, x_5 показывает неиспользованную разницу в спросе на продукцию П$_1$ и П$_2$, x_6 – невостребованное количество продукции П$_2$.

Составим исходную симплекс-таблицу (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Базисные переменные	Решение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	9	2	3	1	0	0	0
x_4	13	3	2	0	1	0	0
x_5	1	1	–1	0	0	1	0
x_6	2	0	1	0	0	0	1
$-F$	0	–3	–4	0	0	0	0

Решая задачу симплекс-методом, получим следующую итоговую симплекс-таблицу (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Базисные переменные	Решение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2,4	1	0	0,2	0	0,6	0
x_4	3	0	0	–1	1	–1	0
x_6	0,6	0	0	–0,2	0	0,4	1
x_2	1,4	0	1	0,2	0	–0,4	0
F	12,8	0	0	1,4	0	0,2	0

Итоговая симплекс-таблица позволяет ответить на ряд вопросов, касающихся анализа на чувствительность.

1. Остаточные (балансовые или дополнительные) переменные x_3, x_4, x_5, x_6 позволяют определить статус ресурсов. Если значение остаточной переменной равно нулю (x_3 и x_5), то ресурс израсходован полностью, т. е. является дефицитным.

Положительное значение остаточной переменной ($x_4 = 3$, $x_6 = 0{,}6$) говорит о недефицитности соответствующего ресурса. Это и есть величина избытка. Соответствующие ресурсы можно уменьшить на полученную величину без изменения значения ЦФ.

2. Теневая цена ресурсов указана в последней строке симплекс-таблицы. Наиболее выгоден первый ресурс (сырье А, ему соответствует переменная x_3), т. к. он имеет наибольшую теневую цену $y_1 = 1{,}4$. Поэтому дополнительные капиталовложения следует направлять, в первую очередь, на увеличение запаса сырья А (первый ресурс) и лишь затем на формирование разницы в спросе на продукцию $П_1$ и $П_2$.

3. Максимальное изменение запаса ресурса.

Пусть запас первого ресурса (сырье А) изменится на величину Δ_1, тогда результирующая симплекс-таблица примет вид табл. 4.4.

Таблица 4.4

Базисные перемен-ные	Решение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$2{,}4 + 0{,}2\Delta_1$	1	0	0,2	0	0,6	0
x_4	$3 - 1\Delta_1$	0	0	–1	1	–1	0
x_6	$0{,}6 - 0{,}2\Delta_1$	0	0	–0,2	0	0,4	1
x_2	$1{,}4 + 0{,}2\Delta_1$	0	1	0,2	0	–0,4	0
F	$12{,}8 + 1{,}4\Delta_1$	0	0	1,4	0	0,2	0

Так как изменение величины ресурса сказывается только на элементах столбца «Решение», то это может повлиять только на допустимость решения, поэтому должна выполняться система:

$$\begin{cases} 2,4 + 0,2 \cdot \Delta_1 \ge 0, \\ 3 - 1 \cdot \Delta_1 \ge 0, \\ 0,6 - 0,2 \cdot \Delta_1 \ge 0, \\ 1,4 + 0,2 \cdot \Delta_1 \ge 0. \end{cases}$$

Решая систему неравенств, получим: $-7 \le \Delta_1 \le 3$. Т. о., уменьшение запаса сырья А (первый ресурс) более чем на 7 единиц или увеличение более чем на 3 единицы приведет к недопустимости полученного решения и новой совокупности базисных переменных. Внутри указанного интервала решение будет действительным. Запас сырья А должен быть в пределах:

$9 - 7 \le 9 + \Delta_1 \le 9 + 3$,

$2 \le$ запас сырья А ≤ 12.

Вывод: запас сырья А можно увеличить на 3 единицы с 9 до 12, это приведет к увеличению ЦФ с 12,8 до 17 единиц ($12,8 + 1,4 \cdot 3 = 17$).

4. Анализ на чувствительность оптимального решения к изменению коэффициентов ЦФ.

Пусть доход, получаемый с единицы продукции $П_1$ изменится на величину Δ_1, тогда итоговая симплекс-таблица примет вид табл. 4.5.

Таблица 4.5

продукция		*ресурсы*					
Базисные перемен-ные	Решение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2,4	1	0	0,2	0	0,6	0
x_4	3	0	0	–1	1	–1	0
x_6	0,6	0	0	–0,2	0	0,4	1
x_2	1,4	0	1	0,2	0	–0,4	0
F	$12,8 + 2,4\Delta_1$	0	0	$1,4 + 0,2\Delta_1$	0	$0,2 + 0,6\Delta_1$	0

x_3 и x_5 не вошли в базис, поэтому должно выполняться:

$$\begin{cases} 1{,}4 + 0{,}2 \cdot \Delta_1 \geq 0, \\ 0{,}2 + 0{,}6 \cdot \Delta_1 \geq 0. \end{cases} \qquad -1/3 \leq \Delta_1 \leq +\infty.$$

При изменении цены на первый вид продукции от 8/3 до $+\infty$ оптимальные значения переменных останутся неизменными:

$$3 - 1/3 \leq Ц_1 = 3 \leq 3 + \infty = \infty.$$

4.4. Экономическая интерпретация двойственности

Задача, двойственная к задаче об ассортименте продукции, рассмотренной в примере 4.1, имеет вид:

$$F = 9 \cdot y_1 + 13 \cdot y_2 + y_3 + 2 \cdot y_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + y_3 \geq 3, \\ 3 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 - y_3 + y_4 \geq 4, \\ y_i \geq 0; \quad i = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

Аналогично, как и для прямой задачи, двойственную задачу представляют в каноническом виде, т. е. вводят дополнительные переменные y_5, y_6, которые прибавляют к левым частям соответствующих неравенств. В целевую функцию все дополнительные переменные вводят с коэффициентами, равными нулю.

Решая двойственную задачу симплекс-методом, получим следующую итоговую таблицу (табл. 4.6).

Переменные y_i двойственной задачи называют двойственными оценками, они представляют собой теневые цены соответствующих ресурсов прямой задачи.

Таблица 4.6

Базисные перемен-ные	Реше-ние	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	1,4	1	1	0	0,2	–0,2	–0,2
y_3	0,2	0	1	1	–0,4	–0,6	0,4
f	12,8	0	–3	0	–0,6	–2,4	–1,4

Анализ на чувствительность оптимального решения базируется на следующих свойствах двойственных оценок (ДО).

1. ДО характеризуют дефицитность ресурсов: чем больше значение ДО, тем более дефицитным является ресурс. Для недефицитных ресурсов $y_i = 0$;

2. ДО показывают, как влияют изменения в правой части ограничений (запасов ресурсов) на значение ЦФ.

Практический интерес представляет верхняя и нижняя границы изменения ресурсов, в которых значения оценок остаются неизменными.

Для дефицитных ресурсов:

нижняя граница

$$\Delta b_i^{(\text{н})} = \min_k \left\{ \frac{x_k}{d_{k\,i}} \right\} \text{ для } d_{k\,i} > 0; \qquad (4.10)$$

верхняя граница

$$\Delta b_i^{(\text{в})} = \max_k \left\{ \left| \frac{x_k}{d_{k\,i}} \right| \right\} \text{ для } d_{k\,i} < 0, \qquad (4.11)$$

где i – номер ресурса;

k – индекс базисной переменной;

x_k – оптимальное значение базисной переменной;

$d_{k\,i}$ – элементы матрицы коэффициентов при базисных переменных в итоговой симплекс-таблице прямой задачи.

Для нашего примера 4.1 для дефицитных ресурсов (см. табл. 4.5):

$$\Delta b_1^{(\text{н})} = \min_k \left\{ \frac{x_1}{d_{11}}; \frac{x_2}{d_{21}} \right\} = \min_k \left\{ \frac{2,4}{0,2}; \frac{1,4}{0,2} \right\} = 7;$$

$$\Delta b_1^{(\text{в})} = \max_k \left\{ \left|\frac{x_4}{d_{41}}\right|; \left|\frac{x_6}{d_{61}}\right| \right\} = \max_k \left\{ \left|\frac{3}{-1}\right|; \left|\frac{0,6}{-0,2}\right| \right\} = 3;$$

$$\Delta b_3^{(\text{н})} = \min_k \left\{ \frac{x_1}{d_{13}}; \frac{x_6}{d_{63}} \right\} = \min_k \left\{ \frac{2,4}{0,6}; \frac{0,6}{0,4} \right\} = 1,5;$$

$$\Delta b_3^{(\text{в})} = \max_k \left\{ \left|\frac{x_4}{d_{43}}\right|; \left|\frac{x_2}{d_{23}}\right| \right\} = \max_k \left\{ \left|\frac{3}{-1}\right|; \left|\frac{1,4}{-0,4}\right| \right\} = 3,5.$$

Для недефицитных ресурсов верхняя граница интервала устойчивости определяется исходными данными, а нижняя равна величине фактически израсходованных ресурсов.

Т. о., интервалы устойчивости оценок по отношению к изменению ресурсов будут равны:

1) [9 – 7; 9 + 3] = [2; 12], 3) [1 – 1,5; 1 + 3,5] = [–0,5; 4,5],
2) [13 – 3; 13] = [10; 13], 4) [2 – 0,6; 2] = [1,4; 2].

Если изменения запасов ресурсов находятся в пределах устойчивости двойственных оценок, их раздельное влияние на значение ЦФ равно произведению двойственной оценки и величины изменения запасов ресурса.

$\Delta F_1 = 1{,}4 \cdot (12 - 2) = 14,$ $\Delta F_3 = 0{,}2 \cdot (4{,}5 - (-0{,}5)) = 1,$

$\Delta F_2 = 0 \cdot (13 - 10) = 0,$ $\Delta F_4 = 0 \cdot (2 - 1{,}4) = 0.$

Суммарное возможное увеличение ЦФ составит:

$$\Delta F = 1{,}4 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 3{,}5 = 4{,}9.$$

3. ДО являются показателем эффективности производства отдельных видов продукции с точки зрения критерия оптимальности. С этой позиции в оптимальный план может быть включена лишь та продукция, для которой выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \leq c_j. \tag{4.12}$$

Например, введение в план третьего вида продукции с технологическими коэффициентами $a_{1,3} = 3$; $a_{2,3} = 1$ и ценой $c_3 = 8$ выгодно, поскольку выполняется $3 \cdot 1{,}4 + 1 \cdot 0 = 4{,}2 \leq 8$.

Математическая модель задачи примет вид:

$$\begin{aligned}
&F = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \to \max,\\
&2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 9.\\
&3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 \leq 13,\\
&x_1 - x_2 \leq 1,\\
&x_2 \leq 2;\ \ x_1 \geq 0;\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

4. ДО позволяют производить сравнение суммарных условных затрат и результатов. Так, например, приобретение двух единиц первого ресурса (сырье А) по цене $c = 0{,}5$ ден. ед. целесообразно, т. к.:

а) изменение ресурса находится в пределах устойчивости ДО;

б) ΔДоход $= \Delta F = 2 \cdot 1{,}4 = 2{,}8$;

ΔРасход $= 2{,}0 \cdot 0{,}5 = 1$;

ΔПрибыль $= \Delta$Доход $- \Delta$Расход $= 2{,}8 - 1 = 1{,}8 > 0$, т. е. прибыль увеличивается.

5. ТРАНСПОРТНЫЕ МОДЕЛИ

5.1. Транспортная задача и ее особенности

При планировании перевозок однородных грузов от поставщика к потребителям, что широко используется в энергетике, возникают вопросы наиболее рациональной их организации. Часто требуется найти такой план перевозок, при котором стоимость перевозок была бы минимальной. Такая задача называется транспортной задачей (ТЗ) по критерию стоимости.

В общем виде транспортная задача формулируется так: имеется m поставщиков и n потребителей однородного груза. Запасы i-го поставщика обозначим a_i , спрос j-го потребителя – b_j. Если обозначить c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза, а x_{ij} – количество перевозимого груза от i-го поставщика j-му потребителю, то математическая модель задачи будет иметь вид:

1) суммарные запасы на перевозку должны быть минимальные:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min;$$

2) объем поставок i-го поставщика равен его запасу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m};$$

3) объем поставок j-му потребителю равен его спросу:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad i = \overline{1, n};$$

4) неотрицательность переменных:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Вместо матрицы затрат c_{ij} может задаваться матрица расстояний d_{ij}.

Если суммарный объем отправляемых грузов равен потребности в этих грузах, то ТЗ называется закрытой (сбалансированной $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, иначе – открытой.

Если имеет место открытая ТЗ, ее нужно свести к закрытой форме следующим образом:

1) если спрос > предложения, то вводят фиктивного поставщика с недостающим объемом спроса; тарифы c_{ij}, связывающие фиктивные пункты с реальными, равны штрафам за недопоставку продукции;

2) если спрос < предложения, то вводят фиктивного потребителя с недостающим объемом потребления, элементы матрицы c_{ij}, связывающие фиктивные пункты с реальными, равны стоимости хранения единицы нераспределенного груза.

Если в вышеназванных пунктах затраты неизвестны, то соответствующие элементы $c_{ij} = 0$.

Транспортная задача решается в два этапа. Сначала необходимо найти исходный опорный план, а затем последовательно произвести его улучшение до получения оптимального плана. На первом этапе для распределения ресурсов можно использовать правило «северо-западного угла» (здесь не учитываются тарифы и план далек от оптимального) или правило «минимального элемента», при котором необходимо осуществлять максимальные поставки ресурсов в клетки с минимальными тарифами. На втором этапе можно применить распределительный метод или метод потенциалов.

5.2. Метод потенциалов

Каждому поставщику (ограничению по запасам) поставим в соответствие потенциал u_i $(i = \overline{1, m})$, а каждому потребителю (ограничению по спросу) – потенциал v_j $(j = \overline{1, n})$.

Согласно теореме о потенциалах, каждой занятой клетке будет соответствовать уравнение $u_i + v_j = c_{ij}$. Так как всех занятых клеток должно быть $m + n - 1$, т. е. на единицу меньше числа потенциалов, то для определения чисел u_i, v_j необходимо решить систему из $m + n - 1$ уравнений с $m + n$ неизвестными: $u_i + v_j = c_{ij}$. Одному из потенциалов задают обычно значение, равное нулю.

Для исследования плана на оптимальность по каждой свободной клетке проверяется условие $u_i + v_j \leq c_{ij}$. Если хотя бы одна свободная клетка не удовлетворяет данному условию, то опорный план не является оптимальным, его можно улучшить за счет загрузки этой клетки. Если таких клеток несколько, то наиболее перспективной для загрузки является клетка, для которой разность (оценка) между тарифом клетки и суммой потенциалов наименьшая, т. е. $S_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) < 0$.

Например, для клеток (i; k) и (i; t) имеем оценки: $S_{ik} = -5$, $S_{it} = -10$. Здесь наиболее потенциальной является клетка (i; t). Экономически оценка показывает, на сколько денежных единиц уменьшатся транспортные издержки от загрузки данной клетки единицей груза. Эффективность плана от загрузки потенциальной клетки грузом в λ единиц составит $\Delta F = S_{ij} \cdot \lambda$ ден. ед. Если для всех свободных клеток оценки $S_{ij} \geq 0$, то опорный план перевозок является оптимальным.

Итак, если для опорного плана перевозок указанное условие оптимальности не выполняется, то за счет загрузки свободной клетки с отрицательной оценкой план перевозок улучшается. Для наиболее перспективной свободной клетки строится замкнутый цикл с вершинами в загруженных клетках. Вершинам этого цикла условно приписываются знаки: свободной клетке – плюс, следующей по часовой или против часовой стрелки занятой клетке – минус, следующей – снова плюс и т. д. Из поставок в клетках цикла с «отрицательными» вершинами выбирается наименьшее количество λ груза, которое и перемещается по клеткам этого цикла: прибавляется к поставкам в положительных вершинах и вычитается из поставок в отрицательных вершинах, в результате чего баланс цикла не нарушается.

Сформулируем алгоритм решения ТЗ методом потенциалов:

1) построить опорный план по одному из правил;

2) вычислить потенциалы поставщиков и потребителей u_i и v_j $(i = \overline{1, m})$; $(j = \overline{1, n})$, решив систему уравнений вида $u_i + v_j = c_{ij}$;

3) вычислить оценки S_{ij} для всех свободных клеток по формуле $S_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Если все $S_{ij} \geq 0$, то полученный план является оптимальным. При этом если все $S_{ij} > 0$, то полученный оптимальный план единственный. В случае, если хотя бы одна оценка $S_{ij} = 0$, имеем бесчисленное множество оптимальных планов с одним и тем же значением целевой функции.

Пример 5.1. В трех хранилищах A_1, A_2, A_3 имеется соответственно 70, 90 и 50 т топлива. Требуется спланировать перевозку топлива четырем потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, спрос которых равен соответственно 50, 70, 40 и 40 т, так, чтобы затраты на транспортировку были минимальны. Стоимость перевозки 1 т указана в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Хранилища	Потребители				Запас топлива, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
	Стоимость перевозки 1 т топлива, ден. ед.				
A_1	5	2	3	6	70
A_2	4	3	5	7	90
A_3	2	4	1	5	50
Потребность в топливе, т	50	70	40	40	210 > 200

Решение. Поскольку запасы топлива в хранилищах превышают спрос потребителей, задача является открытой, вводится фиктивный потребитель, спрос которого $B_5 = 210 - 200 = 10$ т.

Все затраты для фиктивного потребителя $c_{i5} = 0$ $(i = \overline{1, 3})$. После введения фиктивного потребителя открытая модель задачи преобразовалась в закрытую, а распределительная таблица принимает вид табл. 5.2.

Таблица 5.2

Хранилища	Потребители					Запас топлива, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	Стоимость перевозки 1 т топлива, ден. ед.					
A_1	5	2	3	6	0	70
A_2	4	3	5	7	0	90
A_3	2	4	1	5	0	50
Потребность в топливе, т	50	70	40	40	10	210

Исходный опорный план получим, например, по правилу «минимального элемента». Так как наименьшими являются нулевые тарифы для клеток (1; 5), (2; 5), (3; 5), то загрузим первой, например, клетку (1; 5), $x_{15} = 10$ т. Второй загружаем клетку (3; 3), $x_{33} = 40$ т. Далее загружаем клетки (1; 2), (3; 1), (2; 2), (2; 4), полагая $x_{12} = 60$ т, $x_{31} = 10$ т, $x_{22} = 10$ т, $x_{21} = 40$ т, $x_{24} = 10$ т (табл. 5.3).

Таблица 5.3

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запас	
A_1	5	+ 2 60	3	6	– 0 10	70	$u_1 = 0$
A_2	4 40	– 3 10	5	7 40	+ 0	90	$u_2 = 1$
A_3	2 10	4	1 40	5	0	50	$u_3 = -1$
Спрос	50	70	40	40	10	210	
	$v_1 = 3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 6$	$v_5 = 0$		

В результате распределения топлива по потребителям получили невырожденный план: условие для занятых клеток $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ выполняется.

Для определения потенциалов составляем уравнения для занятых клеток: $u_1 + v_2 = 2$, $u_1 + v_5 = 0$, $u_2 + v_1 = 4$, $u_2 + v_2 = 3$, $u_2 + v_4 = 7$, $u_3 + v_1 = 2$, $u_3 + v_3 = 1$. Положим, например, $u_1 = 0$, тогда $u_2 = 1$, $u_3 = -1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 2$, $v_3 = 2$, $v_4 = 6$, $v_5 = 0$.

Определим оценки свободных клеток:

$S_{11} = 5 - (0 + 3) = 2 > 0,\qquad S_{25} = 0 - (0 + 2) = -2 < 0,$

$S_{23} = 5 - (1 + 2) = 2 > 0,\qquad S_{35} = 0 - (-1 - 0) = 1 > 0,$

$S_{34} = 5 - (-1 + 6) = 0,\qquad S_{14} = 6 - (0 + 6) = 0,$

$S_{13} = 3 - (0 + 2) = 1 > 0,\qquad S_{32} = 4 - (-1 + 2) = 3 > 0.$

Определив потенциалы, устанавливаем, что среди оценок свободных клеток одна отрицательная: $S_{25} = -1$, следовательно, план перевозок можно улучшить за счет загрузки клетки (2; 5). Цикл для нее выделен линией в табл. 5.3.

Наименьшее количество топлива в отрицательных вершинах цикла равно 10 т. После смещения по циклу 10 т получаем новый план перевозок (табл. 5.4). Полученный план является вырожденным. Поставим число 0, например, в клетку (2; 2).

Для нового плана определяем новые потенциалы и находим оценки свободных клеток: $S_{11} = 2 > 0$, $S_{13} = 1 > 0$, $S_{14} = 0$, $S_{15} = 1 > 0$, $S_{23} = 2 > 0$, $S_{32} = 3 > 0$, $S_{34} = 0$, $S_{35} = 2 > 0$.

Оценки всех свободных клеток $S_{ij} > 0$, следовательно, получен оптимальный план. Поскольку среди оценок имеются равные нулю, то за счет загрузки клеток (1; 4), (3; 4) можно получить новые планы, но значение целевой функции не изменится. Это случай бесчисленного множества оптимальных планов.

Таблица 5.4

B / A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запас	
A_1	5	2 70	3	6	0	70	$u_1 = -1$
A_2	4 40	3 0	5	7 40	0 10	90	$u_2 = 0$
A_3	2 10	4	1 40	5	0	50	$u_3 = -2$
Спрос	50	70	40	40	10	210	
	$v_1 = 4$	$v_2 = 3$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$	$v_5 = 0$		

Итак, в табл. 5.4 получили оптимальный план

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 70 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 40 \\ 10 & 0 & 40 & 0 \end{bmatrix},$$

для которого значение целевой функции равно

$$F(X^*) = 2 \cdot 70 + 4 \cdot 40 + 7 \cdot 40 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 40 = 640.$$

Десять тонн топлива, находящегося в хранилище A_2, осталось нераспределенным.

5.3. Транспортные задачи в усложненной постановке

Рассмотренная выше постановка ТЗ в экономике предприятия встречается редко. Для того чтобы свести задачу к задаче транспортного типа, приходится учитывать ряд дополнительных ограничений:

1) отдельные поставки от определенных поставщиков некоторым потребителям должны быть исключены из-за отсутствия

необходимых условий хранения, чрезмерной загрузки транспортных коммуникаций и т. д. **Это достигается путем искусственного завышения тарифов в тех ячейках транспортной таблицы, перевозки через которые следует запретить**;

2) на предприятии необходимо оценить суммарные затраты на производство и транспортировку продукции. С подобной задачей сталкиваются при планировании размещения производственных объектов. С этой точки зрения может оказаться экономически более выгодным поставлять сырье из более отдаленных регионов, но по меньшей его себестоимости. В таких задачах в качестве критерия оптимальности принимают **суммарные затраты на транспортировку и производство продукции (**в транспортной таблице к стоимости перевозки добавляется себестоимость изготовления продукции);

3) ряд транспортных маршрутов, по которым необходимо доставить груз, имеют ограничения по пропускной способности (ограничение **«не более чем»**).

Например, если по маршруту A_iB_j можно доставить $\leq q$ единиц груза, столбец B_j разбивается на два столбца: B_j' и B_j''. В первом спрос равен q, во втором – $(b_j - q)$.

Несмотря на то, что транспортные затраты в обоих столбцах одинаковы и равны исходным, ячейка A_iB_j'' блокируется (в ней ставится завышенный тариф);

4) поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в план поставок независимо от того, выгодно это или нет (**ограничение «не менее чем»**). В этом случае уменьшают запас груза и спрос у соответствующих поставщиков и потребителей на величину обязательных поставок и решают задачу относительно тех поставок, которые необязательны. После чего задачу корректируют с учетом обязательных поставок;

5) необходимо максимизировать целевую функцию в ТЗ. Для этого надо изменить знак в тарифах на противоположный.

Задача 5.2. Задание, соответствующее номеру варианта (по порядковому номеру в списке группы), приведено в табл. 5.5, 5.6.

Нефтеперерабатывающие заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$ и $З_5$ ежедневно производят бензин, который направляется в бензохранилища $БХ_1$, $БХ_2$, $БХ_3$, $БХ_4$, $БХ_5$ и $БХ_6$. Объем производства бензина и вместимость бензохранилищ представлены в табл. 5.5. Все бензохранилища связаны с заводами трубопроводами, по которым и перекачивается бензин. Стоимость перекачки 1 тыс. л бензина с заводов в бензохранилища приведены в табл. 5.5. Себестоимость 1 тыс. л бензина на нефтеперерабатывающих заводах соответственно равна 7, 4, 5, 8, 8 у. е.

Таблица 5.5

Нефтеперерабатывающие заводы	Бензохранилища. Стоимость перекачки 1 тыс. л, у.е.						Запас, тыс. л
	$БХ_1$	$БХ_2$	$БХ_3$	$БХ_4$	$БХ_5$	$БХ_6$	
$З_1$	10	15	12	6	8	5	1500
$З_2$	10	13	4	5	10	6	650
$З_3$	8	6	6	6	18	3	390
$З_4$	4	8	11	9	20	14	450
$З_5$	5	7	8	8	12	7	560
Спрос, тыс. л	800	1020	500	780	650	480	

При этом необходимо учитывать, что из-за ремонтных работ временно нет возможности перевозить бензин с некоторых заводов в бензохранилища. В табл. 5.6 это показано в столбце «Запрет поставки» в формате [№ завода × № бензохранилища]. Например, «2×3» обозначает, что нельзя перевозить бензин с завода № 2 в бензохранилище № 3.

Кроме того, необходимо учесть, что некоторые бензохранилища имеют договоры на гарантированную поставку бензина с определенных заводов в определенных объемах (условия «не более» или «не менее»). В табл. 5.6 это показано в столбце «Условие по поставке» в формате [№ завода × № бензохранилища «не более» / «не менее» объем поставки]. Например, «1×4 не менее 40» обозначает, что между заводом № 1 и бензохранилищем № 4 заключен договор на поставку не менее 40 тыс. л бензина.

Требуется составить план перекачки бензина с заводов в бензохранилища, обеспечивающий минимальные затраты.

Необходимо:

1) составить транспортную таблицу, позволяющую найти план перевозки бензина с заводов $З_i$ в бензохранилища $БХ_j$, **отразив в ней все дополнительные условия**;

2) найти исходный опорный план перевозки бензина;

3) решить задачу методом потенциалов, сформулировать вывод относительно распределения поставок бензина;

4) вычислить величину минимальных суммарных затрат на производство и доставку бензина ($F_{\min}$);

5) назвать пункты, в которых остается нераспределенная продукция, и указать объемы такой продукции.

Таблица 5.6

№ варианта	№№ нефтеперерабатывающих заводов	№№ бензохранилищ	Запрет поставки, тыс. л	Условие по поставке, тыс. л
1	2	3	4	5
1	1, 2, 3, 4	1, 2, 3	1×2	2×3 не более 100
2	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	1×1	2×4 не более 500
3	1, 3, 4	1, 2, 3, 5	1×3	3×2 не менее 80
4	1, 2, 3, 5	1, 3, 4	1×4	2×3 не менее 300
5	1, 2, 4, 5	1, 4, 5	1×5	2×4 не более 200
6	1, 4, 5	1, 4, 5, 6	1×6	4×4 не менее 400
7	3, 4, 5	2, 3, 4, 5	3×2	4×4 не более 100
8	1, 2, 5	3, 4, 5, 6	1×4	5×6 не менее 350
9	2, 3, 4, 5	1, 2	2×1	3×2 не менее 90
10	1, 2	3, 4, 5, 6	1×4	2×6 не менее 450
11	2, 4, 5	1, 2, 3, 4	5×2	4×3 не менее 200
12	1, 3, 5	2, 5, 6	1×2	3×5 не более 300
13	2, 4, 5	3, 4, 5, 6	4×5	5×6 не менее 180

Окончание табл. 5.6

1	2	3	4	5
14	3, 4, 5	4, 5, 6	4×5	5×4 не менее 370
15	1, 2, 3	3, 4, 5	3×4	2×3 не более 200
16	1, 3, 4	1, 2, 3, 4	4×3	4×1 не менее 100
17	1, 2, 4, 5	4, 5, 6	1×5	2×5 не менее 250
18	3, 4, 5	2, 5, 6	5×2	3×5 не более 100
19	1, 5	1, 3, 5, 6	3×3	5×5 не менее 350
20	1, 3, 5	4, 5, 6	1×5	5×4 не менее 90
21	2, 4, 5	1, 3, 5	2×3	4×3 не менее 150
22	3, 4, 5	2, 4, 6	3×4	4×4 не менее 400
23	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	1×2	2×3 не более 100
24	2, 3, 4	4, 5, 6	3×5	2×6 не менее 280
25	1, 3	1, 2, 3, 4	1×2	3×3 не более 170
26	3, 4, 5	2, 5, 6	4×2	3×5 не более 200
27	1, 2, 3, 4	4, 5, 6	1×6	2×5 не менее 100
28	1, 3, 4, 5	1, 2, 3	1×2	5×3 не более 370
29	3, 4, 5	1, 3, 6	3×2	5×5 не более 300
30	2, 4	3, 4, 5, 6	2×3	4×6 не менее 350

6. МЕТОДЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ (МСПиУ)

Сетевое планирование и управление – это комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий, обеспечивающих моделирование, анализ и динамическую перестройку плана выполнения сложных проектов и разработок (строительство и реконструкция каких-либо объектов; выполнение научно-исследовательских и конструкторских работ; подготовка производства к выпуску продукции).

Характерной особенностью таких проектов является то, что они состоят из ряда отдельных, элементарных работ. Они обуславливают друг друга так, что выполнение некоторых работ не может быть начато раньше завершения некоторых других. Например, укладка фундамента не может быть начата раньше, чем будут доставлены необходимые материалы; эти материалы не могут быть доставлены раньше, чем будут построены подъездные пути; любой этап строительства не может быть начат без составления соответствующей технической документации и т. д.

Сетевое планирование и управление включает три основных этапа: 1) структурное планирование; 2) календарное планирование; 3) оперативное управление.

Структурное планирование начинается с разбиения проекта на четко определенные операции, для которых определяется продолжительность. Затем строится сетевой график, который представляет взаимосвязи работ проекта. Это позволяет детально анализировать все работы и вносить улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

Календарное планирование предусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой работы и другие временные характеристики сетевого графика. Это позволяет, в частности, выявлять критические операции, которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить проект в срок. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех работ с целью проведения в дальнейшем оптимизации сетевой модели, которая позволит улучшить эффективность использования какого-либо ресурса.

В ходе оперативного управления используются сетевой и календарный графики для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части проекта.

Основой МСПиУ является сетевой график (сетевая модель), который отражает логическую взаимосвязь и логическую взаимообусловленность всех входящих в проект элементарных операций (работ).

Основными понятиями сетевых моделей являются понятия события и работы.

Работа – это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата, требующий затрат каких-либо ресурсов и имеющий протяженность во времени.

Существует 3 вида работ (операций):

1) ——— действительная: работа, которая требует затрат времени и ресурсов, например, разработка проекта, выполнение СМР и т. д.;

2) – · – · – операция ожидания: процесс, требующий только затрат времени, например, затвердевание бетона, естественная сушка краски и т. д.;

3) – – – – – фиктивная работа или логическая зависимость: отражает ресурсную или логическую зависимость при выполнении некоторых операций. Фиктивная работа имеет нулевую продолжительность.

Работа называется **критической**, если она должна начинаться и заканчиваться в строго отведенное время, т. е. не имеет резерва времени своего начала и окончания, который не влиял бы на продолжительность выполнения всего проекта.

Для **некритических** работ возможен некоторый сдвиг времени их начала, но в определенных пределах, которые не влияют на срок выполнения всего проекта.

Событие – это момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Например, фундамент залит бетоном, старение отливок завершено, комплектующие поставлены, отчеты сданы и т. д. Событие представляет собой результат проведенных работ и, в отличие от них, не имеет протяженности во времени.

Различают 3 вида событий: исходное – соответствует началу выполнения проекта, не имеет предшествующих работ; завершающее – соответствует достижению конечной цели, не имеет последующих работ; промежуточное – все остальные события.

Работы на сетевом графике изображаются стрелками, которые соединяют вершины, изображающие события. Начало и окончание любой работы описываются парой событий, которые называются начальным и конечным событиями. Поэтому для определения конкретной работы используют код работы (i, j), состоящий из номеров начального i-го и конечного j-го событий (рис. 6.1).

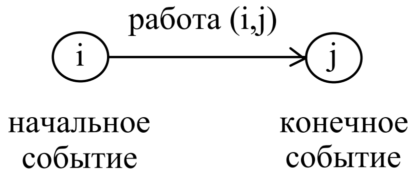


Рис. 6.1. Кодирование работы

При построении сетевого графика **необходимо следовать правилам**: длина стрелки не зависит от времени выполнения работы; стрелка может не быть прямолинейным отрезком; для действительных работ используются сплошные, а для фиктивных – пунктирные стрелки; каждая операция должна быть представлена только одной стрелкой; между одними и теми же событиями **не должно быть параллельных работ**, т. е. работ с одинаковыми кодами; следует избегать пересечения стрелок; не должно быть стрелок, направленных справа налево; номер начального события должен быть меньше номера конечного события; не должно быть **висячих** событий (т. е. не имеющих предшествующих событий), кроме исходного; не должно быть **тупиковых** событий (т. е. не имеющих последующих событий), кроме завершающего; не должно быть циклов.

6.1. Анализ проектов методом критического пути. Расчет временных параметров сетевого графика. График Ганта

Введем следующие обозначения:

$t_{\text{р}}(j)$ – самое раннее возможное время свершения j-го события. Это время, которое необходимо для выполнения всех работ, предшествующих данному событию j. Оно равно наибольшей из продолжительности путей, предшествующих данному событию;

$t_{\text{п}}(j)$ – самое позднее возможное время свершения j-го события. Это такое время наступления события j, превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети. Поздний срок наступления любого события j равен разности между продолжительностью критического пути и наибольшей из продолжительностей путей, следующих за событием j;

$R(j)$ – резерв времени наступления события j. Это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события j без нарушения сроков завершения проекта в целом. Начальные и конечные события критических работ имеют нулевые резервы событий;

d_{ij} – длительность работы (i, j);

Расчет временных параметров сетевого графика проходит в два этапа:

1) вычисляются ранние сроки свершения событий.

$t_р(1) = 0$. Для узла j определим узлы p, q,…, v, которые связаны с узлом j работами (p, j), (q, j),…, (v, j) и для которых уже вычислены самые ранние сроки свершения начальных событий, тогда

$$t_р(j) = \max\left\{t_р(p) + d_{pj};\ t_р(q) + d_{qj};\ ...;\ t_р(v) + d_{vj}\right\}. \quad (6.1)$$

Первый этап заканчивается, когда будет вычислен $t_р$ последнего n-го события. $t_р(n) = t_{кр}$. Критический путь – наибольший путь от начального события до завершающего;

2) вычисляются поздние сроки свершения событий.

Полагаем, что $t_п(n) = t_р(n) = t_{кр}$. Для узла j определим узлы p, q,…, v, которые связаны с узлом j работами (j, p), (j, q),…, (j, v) и для которых уже вычислены самые поздние сроки свершения соответствующих событий:

$$t_п(j) = \min\left\{t_п(p) - d_{jp};\ t_п(q) - d_{jq};\ ...;\ t_п(v) + d_{jv}\right\}. \quad (6.2)$$

Второй этап заканчивается, когда будет вычислено $t_п(1) = 0$.

Резервы времени событий:

$$R(j) = t_п(j) - t_р(j). \quad (6.3)$$

Рассчитанные численные значения временных параметров записываются прямо в вершины сетевого графика (рис. 6.2).

Для критических работ должна получиться непрерывная последовательность от начального события до завершающего. Сумма продолжительностей работ, лежащих на критическом пути, равна минимальному сроку выполнения проекта и равна $t_{кр}$.

Резервы времени событий, лежащих на критическом пути, равны нулю. Для сетевого графика может быть несколько критических путей.

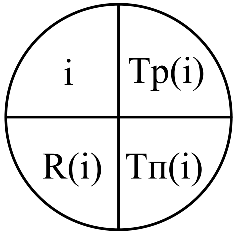


Рис. 6.2. Отображение временных параметров событий в вершинах сетевого графика

Удобным дополнением к сетевому графику является линейный график (график Ганта). На таком графике каждая работа изображается горизонтальным отрезком в привязке к оси времени, длина которого равна продолжительности выполнения работы. Начало каждой работы совпадает с ранним сроком свершения ее начального события. Критические работы образуют на графике Ганта непрерывный путь от начала выполнения проекта до его завершения без временных зазоров и перекрытий. Их суммарная длительность равна длительности выполнения всего проекта.

Некритические работы предпочитают начинать в самый ранний возможный срок, в этом случае остается запас времени, который можно использовать для решения неожиданно возникающих в ходе выполнения проекта проблем. Вместе с тем, можно перенести начало выполнения какого-либо некритического процесса.

Задача 6.1. Проект представлен следующим комплексом работ

Название работы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Продолжительность работы, дней	8	6	6	8	3	4	7	7	12	9	5

Последовательность выполнения работ следующая:

1) A, E и F – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно;

2) работы B и I начинаются сразу по окончании работы F;

3) работа J следует за E, а работа C – за A;

4) работы H и D следуют за B, но не могут начаться, пока не завершена работа C;

5) работа K следует за I;

6) работа G начинается после завершения H и J.

Построить сетевой график выполнения комплекса операций, рассчитать его временные параметры, определить критический путь, построить график Ганта.

6.2. Оптимизация сетевых моделей по ресурсам (исполнителям)

При оптимизации использования ресурса рабочей силы чаще всего сетевые работы стремятся организовать таким образом, чтобы количество одновременно занятых исполнителей было минимальным и чтобы выровнять потребность в людских ресурсах на протяжении срока выполнения проекта.

Суть оптимизации загрузки сетевых моделей по ресурсам заключается в следующем: необходимо таким образом организовать выполнение сетевых работ, чтобы количество одновременно работающих исполнителей было минимальным. Для проведения подобных видов оптимизации необходимо построить и проанализировать график привязки (график Ганта) и график загрузки.

График Ганта отображает взаимосвязь выполняемых работ во времени и строится на основе данных о продолжительности работ. По вертикальной оси графика привязки откладываются коды работ, по горизонтальной оси – длительность работ.

На графике загрузки по горизонтальной оси откладывается время, например в днях, по вертикальной – количество человек (ресурсов), занятых работой в каждый конкретный день.

Для удобства построения и анализа графики загрузки и привязки следует располагать один над другим.

Описанные виды оптимизации загрузки выполняются за счет сдвига во времени некритических работ, т. е. работ, имеющих резервы времени. Сдвиг работы означает, что она будет выполняться уже в другие дни (т. е. изменится время ее начала и окончания), что в свою очередь приведет к изменению количества исполнителей, работающих одновременно (т. е. уровня ежедневной загрузки сети).

Пример 6.1. Для выполнения комплекса операций по ремонту энергетического оборудования предприятие в первые три дня выделяет 7 единиц ресурсов (ед. рес.), в 4-й и 5-й дни – 6 ед. рес., в последующие – 8 ед. рес. Сетевой график представлен на рис. 6.3. Каждой работе графика приписаны два числа: 1) временная оценка, дней; 2) интенсивность потребления ресурса, ед. рес. Работа (1, 2) – 3, 4; (1, 3) – 5, 5; (1, 4) – 7, 2; (2, 3) – 2, 3; (2, 4) – 4, 4; (3, 4) – 4, 1.

Определить сроки выполнения операций таким образом, чтобы завершить весь комплекс работ за минимальное время, при условии, что операции не допускают перерывов в выполнении.

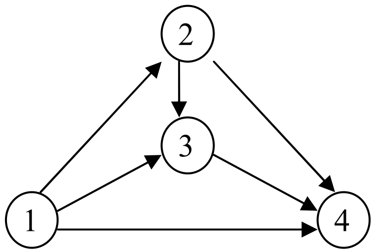


Рис. 6.3. Сетевой график выполнения комплекса работ

Решение. 1. Рассчитав временные параметры сетевого графика, определяем, что весь проект может быть выполнен за 9 дней ($t_{кр}$ = 9). На критическом пути лежат работы (1, 2), (2, 3), (3, 4). Представим график Ганта и график загрузки на рис. 6.4, *а*.

Из графика загрузки видно, что в первые пять дней потребность в ресурсах больше их наличия (на графике выделено серым цветом). Следовательно, выполнить проект за девять дней невозможно, поэтому необходимо провести оптимизацию по ресурсам, чтобы выполнить работы с помощью имеющихся ресурсов.

2. Проецируем на ось времени начало и окончание каждой работы. Проекцию, совпадающую с началом координат, обозначим $t_0 = 0$, $t_1 = 3$ – окончание работы (1, 2). Определим полные резервы времени $R^{п}_{ij}$ операций, расположенных на промежутке от t_0 до t_1, нумеруем эти операции в порядке возрастания полных резервов. Операции с одинаковыми резервами времени нумеруют в порядке убывания интенсивности. $R^{п}_{12} = 0$, $R^{п}_{13} = 0$, $R^{п}_{14} = 9 - 7 = 2$ дня. Нумеруем работы по важности: I – (1, 3), II – (1, 2), III – (1, 4).

3. Последовательно суммируем интенсивности работ, расположенных над промежутком от t_0 до t_1 в порядке возрастания их номеров и сравниваем полученные суммы с заданной величиной имеющихся ресурсов R. Все операции, сумма интенсивностей которых не превышает наличие ресурсов R, оставляем в первоначальном положении. Если после добавления интенсивности какой-либо операции окажется, что суммарное потребление ресурсов больше R, то эту операцию сдвигают вправо на величину рассматриваемого промежутка. Переходят к добавлению интенсивности следующей операции, расположенной на промежутке от t_0 до t_1. Результатом выполнения этого действия будет новый график Ганта, момент t_1 которого считаем началом оставшейся части комплекса операций (рис. 6.4, *б*). Операции (i, j), расположенные над промежутком от t_0 до $t_{кр}$ изображают так, чтобы их начала совпадали с новыми сроками свершения событий.

4. Проецируем на ось времени начало и окончание операций, расположенных на промежутке от t_0 до $t_{кр}$. Ближайшую к $t_1 = 3$ проекцию обозначим $t_2 = 5$ дней. Определим полные

резервы операций, расположенных на промежутке от t_1 до t_2, и нумеруем их. Сначала нумеруют операции, начатые левее момента t_1 согласно возрастанию разностей между полными резервами времени этих операций и длительностью от начала до от t_2. Операции с одинаковыми разностями нумеруют в порядке убывания интенсивностей. Все остальные операции нумеруют как в п. 2. Выполняют действия, аналогичные действиям из п. 3. Если сдвигается операция, начатая левее t_1, начало ее устанавливают в t_2.

$R^{п}{}_{13} - L_{13} = 3 - 5 = 2$, $R^{п}{}_{14} - L_{14} = 5 - 5 = 0$, $R^{п}{}_{12} = 0$. Нумеруем работы по важности: I – (1, 3), II – (1, 4), III – (1, 2). Отмечаем работы на новом графике Ганта согласно данной нумерации (рис. 6.5, *а*).

Далее аналогично рассматриваем промежутки от $t_2 = 5$ до $t_3 = 8$, от $t_3 = 8$ до $t_4 = 10$, от $t_4 = 10$ до $t_5 = 14$ и выполняем действия пп. 2–4 (рис. 6.5, *б*). После каждого графика Ганта необходимо провести проверку графика загрузки, чтобы определить, достаточно ли имеющихся ресурсов для выполнения комплекса работ.

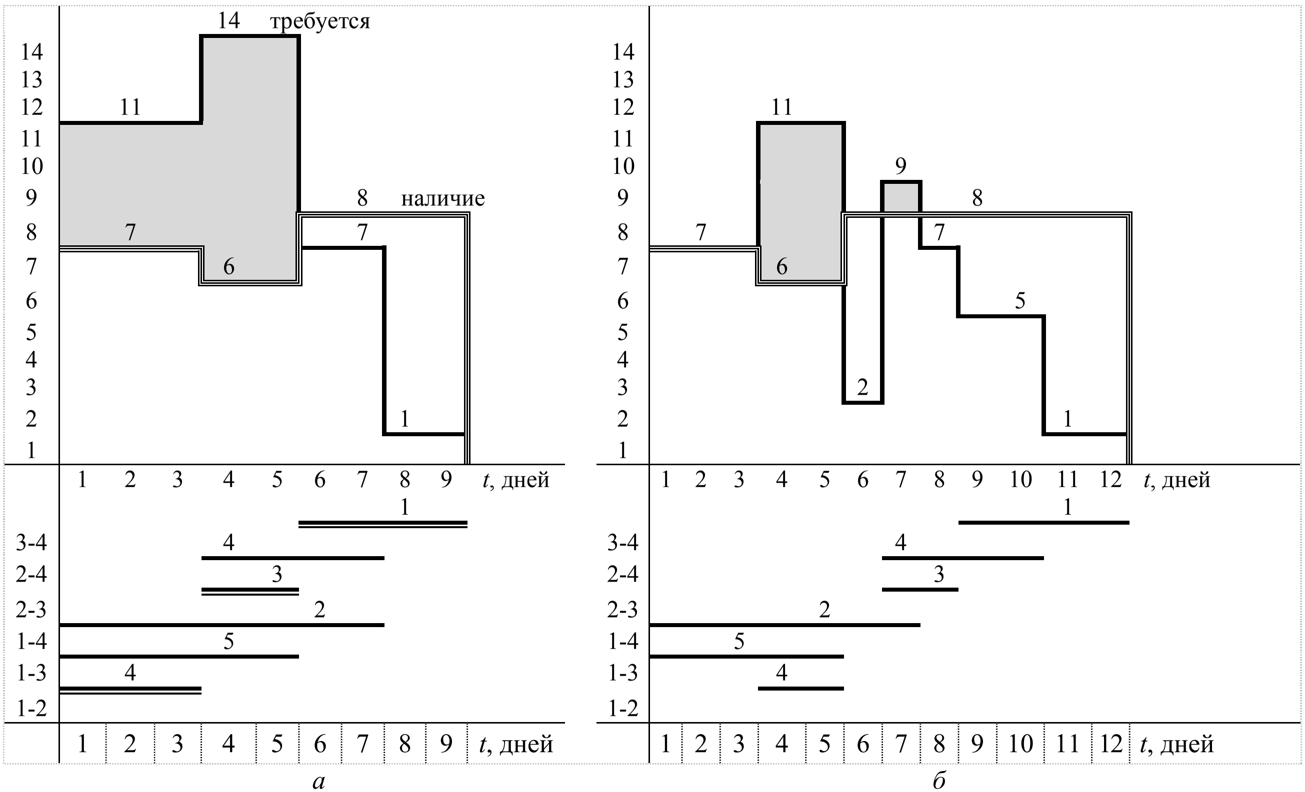
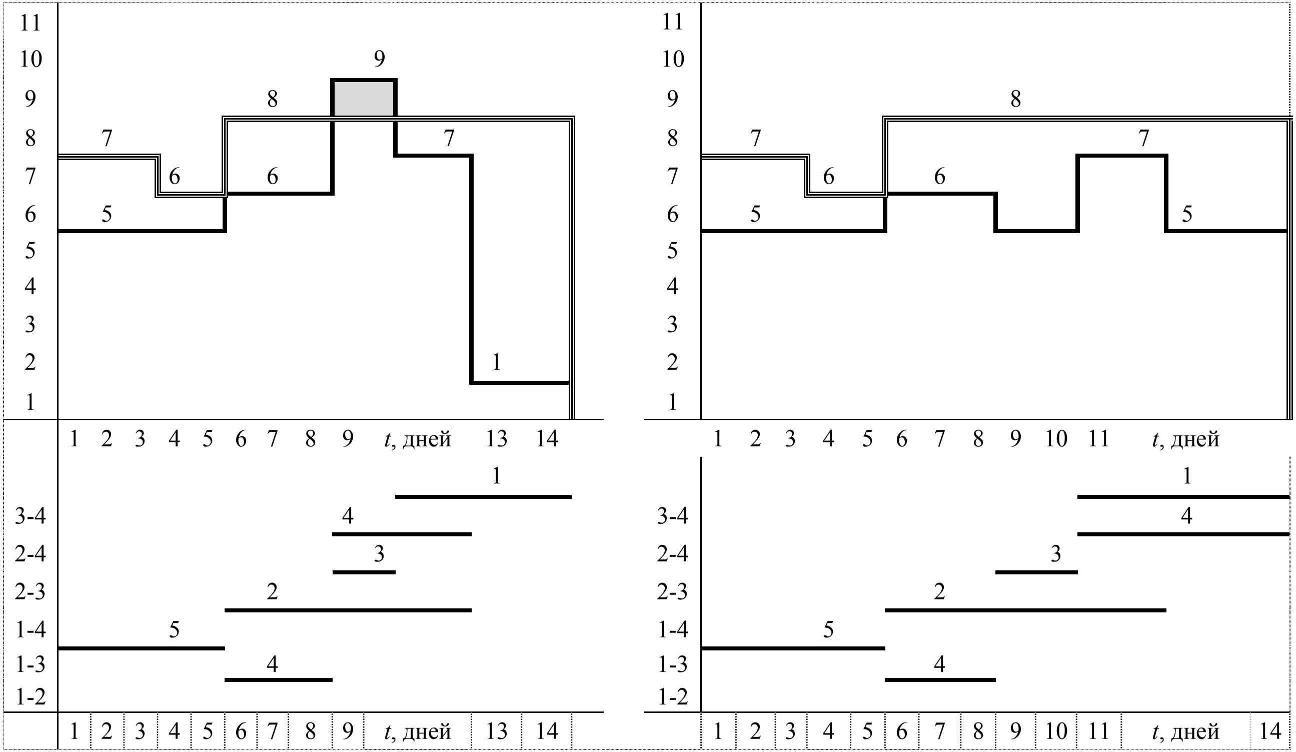


Рис. 6.4. График Ганта и график загрузки



а *б*

Рис. 6.5. График Ганта и график загрузки

Литература

1. Балашевич, В. А. Экономико-математическое моделирование производственных систем : учебное пособие для вузов / В. А. Балашевич, А. М. Андронов. – Мн. : Універсітэцкае, 1995. – 240 с.: ил.
2. Ильин, А. И. Управление предприятием / А. И. Ильин; под общ. ред. М. И. Плотницкого, А. С. Головачева. – Мн. : Вышэйшая школа, 1997. – 275 с.
3. Коршунова, Л. А. Управление энергетическим производством : учебное пособие / Л. А. Коршунова, Н. Г. Кузьмина. – Томск : Томский политехнический университет, 2007.
4. Кузнецов, А. В. Высшая математика: Математическое программирование : учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – 2-е изд., перераб. и доп. – Мн. : Вышэйшая школа, 2001. – 351 с.: ил.
5. Менеджмент организации : учебное пособие / под ред. З. П. Румянцевой, Н. А. Соломатина. – М. : Инфра-М, 1995. – 429 с.
6. Падалко, Л. П. Математические методы оптимального планирования развития и эксплуатации энергосистем / Л. П. Падалко. – Мн. : Вышэйшая школа, 1972.
7. Партыка, Т. Л. Математические методы : учебник / Т. Л. Партыка, И. И. Попов. – М. : ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005. – 464 с.: ил.
8. Прузнер, С. Л. Организация, планирование и управление энергетическим предприятием : учебник для вузов / С. Л. Прузнер, А. Н. Златопольский, В. Г. Журавлев. – М. : Высшая школа, 1998. – 432 с.
9. Экономико-математические методы и модели : учебное пособие / Н. И. Холод [и др.] ; под ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Мн. : БГЭУ, 2000. – 412 с.: ил.

Содержание

1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ БАЛАНСЫ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АГРЕГАТОВ И ИХ СТРУКТУРА 3

2. ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ТРУДА 4
2.1. Объемы продукции по энергетическим производствам.......... 4
2.2. Пути повышения производительности труда........................... 5

3. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ 6
3.1. Бездефицитная простейшая однономенклатурная модель...... 6
3.2. Бездефицитная простейшая однономенклатурная модель с конечной интенсивностью поступления заказа........................... 7
3.3. Простейшая однономенклатурная модель с учетом неудовлетворенных требований.. 8
3.4. Модель экономичного размера заказа с разрывами цен........ 10

4. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ.................... 12
4.1. Постановка задачи линейного программирования 12
4.2. Анализ линейных моделей на чувствительность (устойчивость) 13
4.3. Экономическая интерпретация решения задач ЛП................ 15
4.4. Экономическая интерпретация двойственности 20

5. ТРАНСПОРТНЫЕ МОДЕЛИ.. 24
5.1. Транспортная задача и ее особенности 24
5.2. Метод потенциалов 25
5.3. Транспортные задачи в усложненной постановке 30

6. МЕТОДЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ (МСПиУ) 35
6.1. Анализ проектов методом критического пути. Расчет временных параметров сетевого графика. График Ганта 38
6.2 Оптимизация сетевых моделей по ресурсам (исполнителям)... 41

Литература 47

Учебное издание

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Учебно-методическое пособие
для студентов специальности 1-53 01 05
«Автоматизированные электроприводы»

Составитель
ЛЕВКОВСКАЯ Алёна Викторовна

Редактор *Н. А. Костешева*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 10.01.2022. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,85. Уч.-изд. л. 2,23. Тираж 100. Заказ 577.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.