

ISSN 0134-9635

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный
научно-технический сборник

Основан в 1975 году

Выпуск 36

Минск
БНТУ
2022

УДК [531+621.01:531.8](082)
ББК 22.21я43
30.12я43
Т 36

РЕДАКЦИЯ СБОРНИКА

Президиум редакции:

С. В. Харитончик, А. М. Маляревич, В. М. Трепачко, А. И. Сафонов,
С. А. Чижик, М. А. Журавков, Ю. М. Плескачевский, С. С. Щербаков

Редакционная коллегия:

Ю. В. Василевич (председатель, главный редактор),
В. А. Чигарев (зам. председателя, уч. секретарь),
Т. Н. Микулик (редактор), И. С. Куликов, В. А. Акимов,
А. В. Савицкая (электронный макет, компьютерная верстка)

Адрес редакции:

220013, Минск, проспект Независимости, 65
БНТУ, кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»
Тел.: (+375 17) 293 96 47, 292 74 25,
E-mail: smat@bntu.by, tmech@bntu.by

В сборнике представляются научные статьи по общей механике, теоретической и прикладной механике, механике материалов, механики сплошной среды, механике деформируемого твердого тела и смежным вопросам, научно-методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов, специалистов исследовательских и научно-технических организаций.

Тематика статей охватывает широкий круг вопросов: общая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости и газа, мехатроника, робототехника, био- и наномеханика, математическое и компьютерное моделирование физических и технических процессов, дифференциальные уравнения и их приложения в механике, конструирование деталей машин и др. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Мехатроника», «Механика деформируемых тел», «Техническая механика» и др. Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов в высшей и средней школе.

Взгляды отдельных авторов могут не совпадать с позицией редакции научного издания.

Научно-технический сборник полезен преподавателям высших учебных заведений, научно-инженерным работникам, аспирантам, магистрантам и студентам старших курсов технических вузов.

Издание включено в перечень ВАК Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований.

УДК [531+621.01:531.8](082)
ББК 22.21я43
30.12я43

© Белорусский национальный
технический университет, 2022

ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Маркова М. В., Леоненко Д. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Применение трехслойных конструкций в различных областях строительства и промышленности обусловлено их оптимальными механическими, теплотехническими и эксплуатационными свойствами. При работе трехслойной конструкции, содержащей жесткие и прочные внешние несущие слои и легкий срединный наполнитель, отмечаются хорошие прочностные и жесткостные показатели всей системы в целом при минимуме ее весовых характеристик. Ввиду этого становится очевидной необходимость разработки эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния данного вида конструкций.

Статическое и динамическое деформирование круговых трехслойных пластин уже было исследовано в работах многочисленных авторов. Так, к примеру, статическое деформирование подробно рассматривалось в работах [1–6], поперечные колебания – в работах [7–10]. Однако, все перечисленные исследования посвящены круговым трехслойным пластинам, имеющим постоянную толщину. Исследование работы трехслойной круговой пластины переменной толщины проводилось лишь для статического деформирования [11], в данной статье будут рассмотрены динамические аспекты.

Гипотезы. Рассмотрим вывод системы уравнений, описывающей вынужденные поперечные колебания круговой трехслойной пластины, состоящей из несимметричных тонких несущих слоев переменной толщины (слои 1 и 2) и толстого легкого наполнителя постоянной толщины (слой 3). Общий вид рассматриваемой пластины приведен на рисунке 1, а.

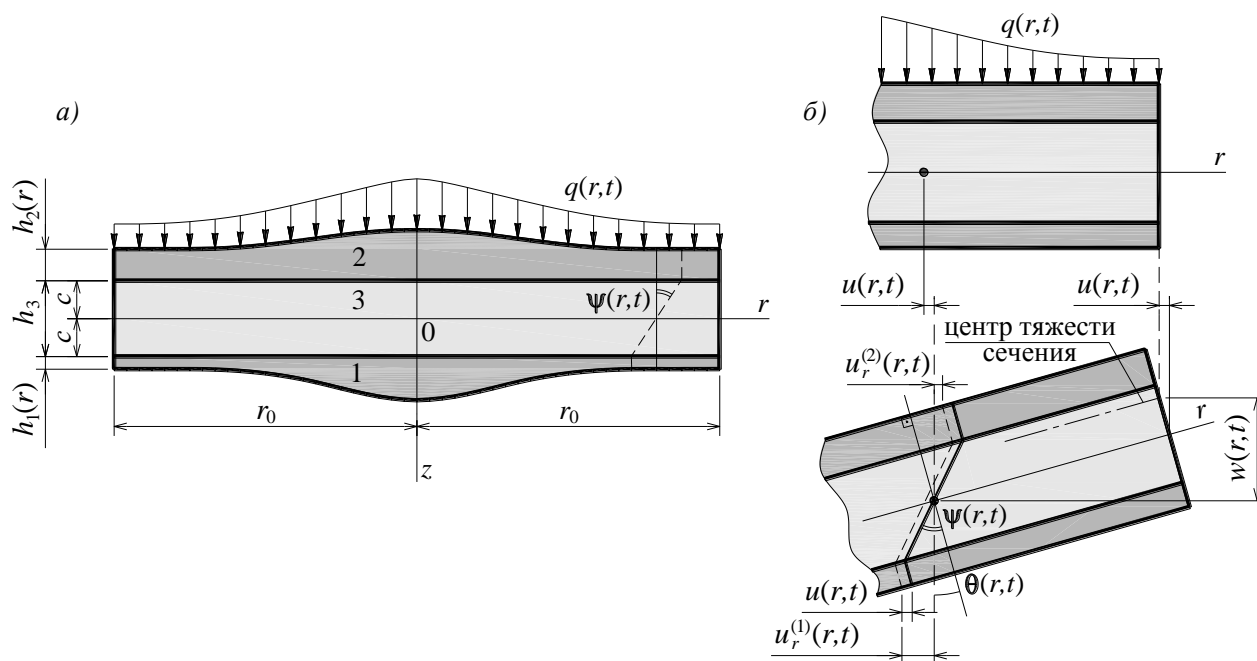


Рис. 1. Трехслойная круговая пластина переменной толщины: а – общий вид пластины; б – перемещения в деформированной пластине

Задачу рассматриваем в цилиндрической системе координат. Срединную плоскость заполнителя (слоя 3) принимаем за координатную ось r . Ось z поводим вниз перпендикулярно срединной плоскости заполнителя. Через h_k обозначена толщина k -го слоя, причем толщины несущих слоев переменны вдоль радиуса пластины ($h_1 = h_1(r)$ и $h_2 = h_2(r)$), а толщина заполнителя постоянна ($h_3 = 2c = \text{const}$). В дальнейшем для краткости толщину слоев переменной толщины будем обозначать как h_1 и h_2 .

Для описания кинематики всего пакета из трех слоев будем использовать гипотезу «ломаной» нормали. В тонких изотропных несущих слоях 1 и 2 будет справедлива гипотеза «прямой» нормали, то есть нормаль к срединной поверхности при изгибе пластины повернется на некоторый угол θ , но останется прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной плоскости. В толстом легком заполнителе 3 при этом нормаль также оставаясь прямолинейной и не меняет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ [12, 13] (рисунок 1, б).

На внешний слой 2 пластины действует произвольная осесимметричная вертикальная распределенная нагрузка, не зависящая от координаты φ , то есть $q = q(r, t)$. В этом случае прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u также не будут зависеть от координаты φ , то есть $w = w(r, t)$, $\psi = \psi(r, t)$, $u = u(r, t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Тангенциальные перемещения в слоях в силу симметрии задачи будут отсутствовать, то есть $u_\varphi = 0$. Все деформации пластины от действующей внешней нагрузки считаем малыми. Работой легкого заполнителя в тангенциальном направлении пренебрегаем [13].

На границе контакта слоев пластины будем использовать условие непрерывности перемещений, то есть считаем, что пластина не имеет расслоений и работает без проскальзывания между слоями. На контуре пластины предполагаем наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев, то есть на контуре пластины $\psi = 0$.

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя и соотношения Коши получаем

$$\varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}(u_r^{(3)} + w_{,r}), \quad (1)$$

здесь запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

После интегрирования выражения (1) по толщине всего пакета получаем выражения для определения радиальных перемещений в слоях пластины через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (\text{при } c < z \leq c + h_1); \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r} \quad (\text{при } -c \leq z \leq c); \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (\text{при } -c - h_2 \leq z < -c), \end{aligned} \quad (2)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; $u \pm c\psi$ – величина смещения внешних слоев 1 и 2 за счет деформации заполнителя 3.

Введем обобщенные внутренние усилия и моменты в слоях пластины:

$$T_\alpha = \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz; \quad M_\alpha = \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz; \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}). \quad (3)$$

Вывод уравнений движения. Уравнения движения получим из вариационного принципа Гамильтона [14], согласно которому переход системы из одного возможного

состояния в другое за любой промежуток времени происходит таким образом, что функционал действия по Гамильтону δS принимает стационарное значение, то есть

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (K - W + A) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta W + \delta A) dt = 0, \quad (4)$$

где δK – вариация кинетической энергии всей системы; δW – вариация потенциальной энергии деформации всей системы; $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – суммарная вариация работ всех, действующих на систему, внешних сил и контурных усилий:

$$\delta A = \iint_{r \varphi} (q \delta w) r dr d\varphi + r \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q_r^0 \delta w) d\varphi.$$

Вариация потенциальной энергии деформации

$$\delta W = \iint_{r \varphi} \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi. \quad (5)$$

Вариация кинетической энергии

$$\delta K = \sum_{k=1}^3 \delta K^{(k)} = \iint_{r \varphi} \left[\sum_{k=1}^3 \frac{\rho_k}{2} \int_{h_k} \delta \left((\dot{u}_r^{(k)})^2 + \dot{w}^2 \right) dz \right] r dr d\varphi, \quad (6)$$

здесь ρ_k – плотность материала k -го слоя.

Используя перемещения (2) и соотношения Коши [14], выразим интегралы в (5) через внутренние усилия (3)

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{\varphi} \left[r T_r \delta u + r H_r \delta \psi - r M_r \delta w_{,r} + ((r M_r)_{,r} - M_\varphi) \delta w \right] d\varphi - \\ & - \iint_{r \varphi} \left[((r T_r)_{,r} - T_\varphi) \delta u + ((r H_r)_{,r} - H_\varphi) \delta \psi + ((r M_r)_{,rr} - M_{\varphi,r}) \delta w \right] r dr d\varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим по слоям суммарный интеграл, входящий в выражение (6).

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \int_c^{c+h_1} \delta \left((\dot{u}_r^{(1)})^2 + \dot{w}^2 \right) dz = \frac{\rho_1}{2} \int_c^{c+h_1} \left(2\dot{u}_r^{(1)} \delta \dot{u}_r^{(1)} + 2\dot{w} \delta \dot{w} \right) dz = \\ & = h_1 \rho_1 \left[\dot{u} + c\dot{\psi} - \left(c + \frac{h_1}{2} \right) \dot{w}_{,r} \right] \delta \dot{u} + h_1 \rho_1 \left[\dot{u} + c\dot{\psi} - \left(c + \frac{h_1}{2} \right) \dot{w}_{,r} \right] c \delta \dot{\psi} - \\ & - h_1 \rho_1 \left[\left(c + \frac{h_1}{2} \right) \dot{u} + \left(c + \frac{h_1}{2} \right) c\dot{\psi} - \left(c^2 + h_1 c + \frac{h_1^2}{3} \right) \dot{w}_{,r} \right] \delta \dot{w}_{,r} + h_1 \rho_1 \dot{w} \delta \dot{w}; \\ & \frac{\rho_2}{2} \int_{-c-h_2}^{-c} \delta \left((\dot{u}_r^{(2)})^2 + \dot{w}^2 \right) dz = h_2 \rho_2 \left[\dot{u} - c\dot{\psi} + \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \dot{w}_{,r} \right] \delta \dot{u} - h_2 \rho_2 \left[\dot{u} - c\dot{\psi} + \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \dot{w}_{,r} \right] c \delta \dot{\psi} + \\ & + h_2 \rho_2 \left[\left(c + \frac{h_2}{2} \right) \dot{u} - \left(c + \frac{h_2}{2} \right) c\dot{\psi} + \left(c^2 + h_2 c + \frac{h_2^2}{3} \right) \dot{w}_{,r} \right] \delta \dot{w}_{,r} + h_2 \rho_2 \dot{w} \delta \dot{w}; \\ & \frac{\rho_3}{2} \int_{-c}^c \delta \left((\dot{u}_r^{(3)})^2 + \dot{w}^2 \right) dz = 2c \rho_3 \dot{u} \delta \dot{u} + 2c \rho_3 \left[\frac{c}{3} \dot{\psi} - \frac{c}{3} \dot{w}_{,r} \right] c \delta \dot{\psi} - 2c \rho_3 \left[\frac{c^2}{3} \dot{\psi} - \frac{c^2}{3} \dot{w}_{,r} \right] \delta \dot{w}_{,r} + 2c \rho_3 \dot{w} \delta \dot{w}. \end{aligned}$$

Тогда выражение для вариации кинетической энергии примет вид

$$\begin{aligned}
\delta K = & \iint_{r \varphi} \left[\left(h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2 + 2c\rho_3 \right) \dot{u} + c \left(h_1 \rho_1 - h_2 \rho_2 \right) \dot{\psi} - \left(h_1 \rho_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - h_2 \rho_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right) \dot{w}_{,r} \right] r \delta \dot{u} + \\
& + \left[c \left(h_1 \rho_1 - h_2 \rho_2 \right) \dot{u} + c^2 \left(h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2 + \frac{1}{3} 2c\rho_3 \right) \dot{\psi} - c \left(h_1 \rho_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + h_2 \rho_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{c}{3} 2c\rho_3 \right) \dot{w}_{,r} \right] r \delta \dot{\psi} - \left[\left(h_1 \rho_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - h_2 \rho_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right) \dot{u} + c \left(h_1 \rho_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + h_2 \rho_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{c}{3} 2c\rho_3 \right) \dot{\psi} - \left(h_1 \rho_1 \left(c^2 + h_1 c + \frac{h_1^2}{3} \right) + h_2 \rho_2 \left(c^2 + h_2 c + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{c^2}{3} 2c\rho_3 \right) \dot{w}_{,r} \right] r \delta \dot{w}_{,r} + \\
& + \left(h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2 + 2c\rho_3 \right) \dot{w} r \delta \dot{w} \Big] dr d\varphi.
\end{aligned}$$

Для удобства дальнейших преобразований примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
M_1 &= h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2 + 2c\rho_3 = \sum_{k=1}^3 h_k \rho_k; \quad M_2 = c \left(h_1 \rho_1 - h_2 \rho_2 \right); \\
M_3 &= h_1 \rho_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - h_2 \rho_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right); \\
M_4 &= c^2 \left(h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2 + \frac{1}{3} 2c\rho_3 \right); \quad M_5 = c \left(h_1 \rho_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + h_2 \rho_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{c}{3} 2c\rho_3 \right); \\
M_6 &= h_1 \rho_1 \left(c^2 + h_1 c + \frac{h_1^2}{3} \right) + h_2 \rho_2 \left(c^2 + h_2 c + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{c^2}{3} 2c\rho_3.
\end{aligned}$$

В этом случае, после математических преобразований, выражение для вариации кинетической энергии примет вид

$$\begin{aligned}
\delta K = & \iint_{r \varphi} \left[\left(M_1 \dot{u} + M_2 \dot{\psi} - M_3 \dot{w}_{,r} \right) r \delta \dot{u} + \left(M_2 \dot{u} + M_4 \dot{\psi} - M_5 \dot{w}_{,r} \right) r \delta \dot{\psi} + \right. \\
& + \left. \left(\left(M_{3,r} r + M_3 \right) \dot{u} + \left(M_{5,r} r + M_5 \right) \dot{\psi} - \right. \right. \\
& - \left. \left(M_{6,r} r + M_6 \right) \dot{w}_{,r} + M_3 r \dot{u}_{,r} + M_5 r \dot{\psi}_{,r} - M_6 r \dot{w}_{,rr} + M_1 r \dot{w} \right) \delta \dot{w} \Big] dr d\varphi - \\
& - \int_{\varphi} \left(M_3 \dot{u} + M_5 \dot{\psi} - M_6 \dot{w}_{,r} \right) r \delta \dot{w} d\varphi.
\end{aligned} \tag{8}$$

С учетом выражений (7) и (8) функционал действия по Гамильтону (4) примет вид:

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int_{t_1}^{t_2} \iint_{r \varphi} \left[r T_r^0 \delta u + r H_r^0 \delta \psi + r M_r^0 \delta w_{,r} + r Q_r^0 \delta w - \left(M_3 \dot{u} + M_5 \dot{\psi} - M_6 \dot{w}_{,r} \right) r \delta \dot{w} - r T_r \delta u - \right. \\
& - r H_r \delta \psi + r M_r \delta w_{,r} - \left. \left(\left(r M_r \right)_{,r} - M_{\varphi} \right) \delta w \right] dr d\varphi dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_{r \varphi} \left[r q \delta w + \left(M_1 \dot{u} + M_2 \dot{\psi} - M_3 \dot{w}_{,r} \right) r \delta \dot{u} + \right. \\
& + \left(M_2 \dot{u} + M_4 \dot{\psi} - M_5 \dot{w}_{,r} \right) r \delta \dot{\psi} + \left(\left(M_{3,r} r + M_3 \right) \dot{u} + \left(M_{5,r} r + M_5 \right) \dot{\psi} - \left(M_{6,r} r + M_6 \right) \dot{w}_{,r} + \right. \\
& + \left. M_3 r \dot{u}_{,r} + M_5 r \dot{\psi}_{,r} - M_6 r \dot{w}_{,rr} + M_1 r \dot{w} \right) \delta \dot{w} + \left(\left(r T_r \right)_{,r} - T_{\varphi} \right) \delta u + \left(\left(r H_r \right)_{,r} - H_{\varphi} \right) \delta \psi + \\
& + \left. \left(\left(r M_r \right)_{,rr} - M_{\varphi,r} \right) \delta w \right] dr d\varphi dt.
\end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим интегрирование по частям выражений, содержащих вариацию дифференциала по времени.

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{u} \delta \dot{u} dt = \dot{u} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta u du = \dot{u} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{u} \delta u dt = - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u} \delta u dt.$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как равна нулю вариация δu рассматриваемой функции $\delta u(t_1) = \delta u(t_2) = 0$, что в свою очередь обусловлено тем, что значения функции на границе заданы. После аналогичных преобразований для всех, дифференцируемых по времени, вариаций угловых и линейных перемещений, выражение (9) примет следующий вид

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\varphi} \left[rT_r^0 \delta u + rH_r^0 \delta \psi + rM_r^0 \delta w_{,r} + rQ_r^0 \delta w + (M_3 \ddot{u} + M_5 \ddot{\psi} - M_6 \ddot{w}_{,r}) r \delta w - rT_r \delta u - \right. \\ & - rH_r \delta \psi + rM_r \delta w_{,r} - \left. \left((rM_r)_{,r} - M_{\varphi} \right) \delta w \right] d\varphi dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{r \varphi} \left[r q \delta w - (M_1 \ddot{u} + M_2 \ddot{\psi} - M_3 \ddot{w}_{,r}) r \delta u - \right. \\ & - (M_2 \ddot{u} + M_4 \ddot{\psi} - M_5 \ddot{w}_{,r}) r \delta \psi - \left. \left((M_{3,r} r + M_3) \ddot{u} + (M_{5,r} r + M_5) \ddot{\psi} - (M_{6,r} r + M_6) \ddot{w}_{,r} + \right. \right. \\ & + M_5 r \ddot{\psi}_{,r} - M_6 r \ddot{w}_{,rr} + M_1 r \ddot{w} \left. \right) \delta w + \left. \left((rT_r)_{,r} - T_{\varphi} \right) \delta u + \left((rH_r)_{,r} - H_{\varphi} \right) \delta \psi + \right. \\ & \left. + \left((rM_r)_{,rr} - M_{\varphi,r} \right) \delta w \right] dr d\varphi dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Выполнение равенства (10) при любых значениях варьируемых перемещений возможно при равенстве нулю коэффициентов при независимых вариациях искомым функций. Отсюда следует система дифференциальных уравнений движения в усилиях, описывающая колебания рассматриваемой пластины,

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r} (T_r - T_{\varphi}) - (M_1 \ddot{u} + M_2 \ddot{\psi} - M_3 \ddot{w}_{,r}) &= 0; \\ H_{r,r} + \frac{1}{r} (H_r - H_{\varphi}) - (M_2 \ddot{u} + M_4 \ddot{\psi} - M_5 \ddot{w}_{,r}) &= 0; \\ M_{r,rr} \frac{1}{r} (2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) - \left(M_{3,r} + \frac{M_3}{r} \right) \ddot{u} - \left(M_{5,r} + \frac{M_5}{r} \right) \ddot{\psi} + \left(M_{6,r} + \frac{M_6}{r} \right) \ddot{w}_{,r} - \\ - M_3 \ddot{u}_{,r} - M_5 \ddot{\psi}_{,r} + M_6 \ddot{w}_{,rr} - M_1 \ddot{w} &= -q. \end{aligned} \quad (11)$$

На контуре пластины ($r = r_0$) при этом должны выполняться силовые условия

$$\begin{aligned} T_r = T_r^0; \quad H_r = H_r^0; \quad M_r = M_r^0; \\ M_{r,r} + \frac{1}{r} (M_r + M_{\varphi}) - M_3 \ddot{u} - M_5 \ddot{\psi} + M_6 \ddot{w}_{,r} = Q_r^0. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения движения в перемещениях. Предполагая, что связь напряжений и деформаций в слоях пластины описывается соотношениями линейной теории упругости, выразим внутренние усилия T_{α} , M_{α} и H_{α} через неизвестные искомые функции $u(r, t)$, $\psi(r, t)$ и $w(r, t)$.

$$\begin{aligned} T_r = \sum_{k=1}^3 K_k^+ h_k u_{,r} + \sum_{k=1}^3 K_k^- h_k \frac{u}{r} + c (K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{,r} + c (K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\psi}{r} - \\ - \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] w_{,rr} - \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{w_{,r}}{r}. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
M_r = & \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\
& + c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right] \psi_{,r} + c \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} K_3^- c^2 \right] \frac{\psi}{r} - \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3 \right] w_{,rr} - \\
& - \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^- c^3 \right] \frac{w_{,r}}{r}.
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
H_r = & c \left(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2 \right) u_{,r} + c \left(K_1^- h_1 - K_2^- h_2 \right) \frac{u}{r} + c^2 \left(K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3} K_3^+ c \right) \psi_{,r} + \\
& + c^2 \left(K_1^- h_1 + K_2^- h_2 + \frac{2}{3} K_3^- c \right) \frac{\psi}{r} - c \left(K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right) w_{,rr} - \\
& - c \left(K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^- c^2 \right) \frac{w_{,r}}{r}.
\end{aligned} \tag{15}$$

В приведенных выражениях $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k$ и $K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k$.

Выражения для T_φ , M_φ и H_φ следуют из (13)–(15) при взаимной замене K_k^+ и K_k^- .

Формально данные выражения совпадают с усилиями в [13] для пластин постоянной толщины. Однако здесь величины h_1 и h_2 являются функциями от r .

Для удобства дальнейших расчетов введем следующие условные обозначения

$$\begin{aligned}
a_1^\pm &= \sum_{k=1}^3 K_k^\pm h_k; \quad a_2^\pm = c \left(K_1^\pm h_1 - K_2^\pm h_2 \right); \quad a_3^\pm = K_1^\pm h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^\pm h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right); \\
a_4^\pm &= c^2 \left(K_1^\pm h_1 + K_2^\pm h_2 + \frac{2}{3} K_3^\pm c \right); \quad a_5^\pm = c \left(K_1^\pm h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^\pm h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^\pm c^2 \right); \\
a_6^\pm &= K_1^\pm h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^\pm h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^\pm c^3.
\end{aligned}$$

Тогда выражения для обобщенных внутренних усилий и моментов примут вид

$$\begin{aligned}
T_r &= a_1^+ u_{,r} + a_1^- \frac{u}{r} + a_2^+ \psi_{,r} + a_2^- \frac{\psi}{r} - a_3^+ w_{,rr} - a_3^- \frac{w_{,r}}{r}; \\
T_\varphi &= a_1^- u_{,r} + a_1^+ \frac{u}{r} + a_2^- \psi_{,r} + a_2^+ \frac{\psi}{r} - a_3^- w_{,rr} - a_3^+ \frac{w_{,r}}{r}; \\
H_r &= a_2^+ u_{,r} + a_2^- \frac{u}{r} + a_4^+ \psi_{,r} + a_4^- \frac{\psi}{r} - a_5^+ w_{,rr} - a_5^- \frac{w_{,r}}{r}; \\
H_\varphi &= a_2^- u_{,r} + a_2^+ \frac{u}{r} + a_4^- \psi_{,r} + a_4^+ \frac{\psi}{r} - a_5^- w_{,rr} - a_5^+ \frac{w_{,r}}{r}; \\
M_r &= a_3^+ u_{,r} + a_3^- \frac{u}{r} + a_5^+ \psi_{,r} + a_5^- \frac{\psi}{r} - a_6^+ w_{,rr} - a_6^- \frac{w_{,r}}{r}; \\
M_\varphi &= a_3^- u_{,r} + a_3^+ \frac{u}{r} + a_5^- \psi_{,r} + a_5^+ \frac{\psi}{r} - a_6^- w_{,rr} - a_6^+ \frac{w_{,r}}{r}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Подставив полученные выражения (16) в (11) получим систему дифференциальных уравнений, описывающую колебания трехслойной пластины переменной толщины через перемещения

$$\begin{aligned}
& a_1^+ L_2(u) + a_2^+ L_2(\psi) - a_3^+ L_2(w,r) + a_{1,r}^+ u_r + a_{2,r}^+ \psi_r - a_{3,rr}^+ w_{,rr} + a_{1,r}^- \frac{u}{r} + \\
& + a_{2,r}^- \frac{\psi}{r} - a_{3,r}^- \frac{w_{,r}}{r} - M_1 \ddot{u} - M_2 \ddot{\psi} + M_3 \ddot{w}_{,r} = 0; \\
& a_2^+ L_2(u) + a_4^+ L_2(\psi) - a_5^+ L_2(w,r) + a_{2,r}^+ u_r + a_{4,r}^+ \psi_r - a_{5,rr}^+ w_{,rr} + a_{2,r}^- \frac{u}{r} + \\
& + a_{4,r}^- \frac{\psi}{r} - a_{5,r}^- \frac{w_{,r}}{r} - M_2 \ddot{u} - M_4 \ddot{\psi} + M_5 \ddot{w}_{,r} = 0; \\
& a_3^+ L_3(u) + 2a_{3,r}^+ L_2(u) + a_5^+ L_3(\psi) + 2a_{5,r}^+ L_2(\psi) - a_6^+ L_3(w,r) - 2a_{6,r}^+ L_2(w,r) + \\
& + \left(a_{3,rr}^+ + \frac{a_{3,r}^-}{r} \right) u_r + \left(a_{5,rr}^+ + \frac{a_{5,r}^-}{r} \right) \psi_r - \left(a_{6,rr}^+ + \frac{a_{6,r}^-}{r} \right) w_{,rr} + \left(a_{3,rr}^- - \frac{a_{3,r}^+}{r} \right) \frac{u}{r} + \\
& + \left(a_{5,rr}^- - \frac{a_{5,r}^+}{r} \right) \frac{\psi}{r} - \left(a_{6,rr}^- - \frac{a_{6,r}^+}{r} \right) \frac{w_{,r}}{r} - \left[M_{3,r} + \frac{M_3}{r} \right] \ddot{u} - \left[M_{5,r} + \frac{M_5}{r} \right] \ddot{\psi} + \\
& + \left[M_{6,r} + \frac{M_6}{r} \right] \ddot{w}_{,r} - M_3 \ddot{u}_{,r} - M_5 \ddot{\psi}_{,r} + M_6 \ddot{w}_{,rr} - M_1 \ddot{w} = -q.
\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg) \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}$; $L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}$.

В качестве начальных ($t=0$) примем условия

$$w(r, 0) = f_1(r); \quad \dot{w}(r, 0) = f_2(r). \tag{18}$$

Выводы. Таким образом, полученная система дифференциальных уравнений (17) совместно с начальными (18) и граничными (12) условиями позволяет описывать поперечные колебания круговых трехслойных пластин переменной толщины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев, А. Н. Осесимметричное выпучивание трехслойных круговых пластин / А. Н. Андреев // Динамика сплошной среды. – 1984. – № 66. – С. 3–11.
2. Горшков, А. Г. Деформирование трехслойной круговой пластины на упругом основании / А. Г. Горшков [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – Т. 2, № 1. – С. 16–22.
3. Захарчук, Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск, 2018. – Вып. 33. – С. 363–369.
4. Козел, А. Г. Деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск, 2017. – Вып. 32. – С. 235–240.
5. Нестерович, А. В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск, 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.
6. Старовойтов, Э. И. Деформирование упругопластической круговой трехслойной пластины на основании Винклера при термосиловом нагружении / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Проблемы прочности. – 2007. – № 5. – С. 68–80.
7. Леоненко, Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – Т. 11, № 1. – С. 59–63.
8. Леоненко, Д. В. Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – Т. 5, № 3. – С. 42–47.

9. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.
10. Старовойтов, Э. И. Резонансные колебания круговых композитных пластин на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Механика композитных материалов. – 2015. – Т. 51, № 5. – С. 793–806.
11. Парфенова, В. С. Деформирование круговой трехслойной пластины со ступенчато-переменной границей / В. С. Парфенова // Механика. Исследования и инновации : междунар. сб. науч. тр. – Гомель, 2017. – № 10. – С. 157–163.
12. Алфутов, Н. А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композитных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – Москва : Машиностроение, 1984. – 264 с.
13. Старовойтов, Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости : учеб. для студентов строительных спец. вузов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.
14. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.

Поступила: 28.01.2021

РОЛЬ СИЛ НЕУПРУГОЙ ПРИРОДЫ В ФОРМИРОВАНИИ ОСТАТОЧНЫХ ВИНТОВЫХ НАНОДВОЙНИКОВ КЛИНОВИДНОЙ ФОРМЫ

¹Василевич Ю. В., ²Остриков О. М., ¹Чигарев В. А.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

Введение. Остаточное механическое нанодвойникование, впервые описанное в [1], представляет научный интерес в плане изучения механизмов фиксации ограниченного количества двойникующих дислокаций, закономерным образом ограничивающих наноразмерную область локально сдвойникового материала. С практической точки зрения данное явление интересно, как способ управляемого нагрузкой процесса создания нанодвойникового композита [2].

Целью данной работы стало изучение роли сил внутреннего трения в формировании остаточных нанодвойников клиновидной формы.

Постановка задачи. Для статического равновесия нанодвойника необходимо выполнение условия

$$\vec{F}_i = \vec{F}_e + \vec{S}. \quad (1)$$

Здесь силы: \vec{F}_i – действующая на i -ую двойникующую дислокацию со стороны остальных дислокаций нанодвойника; \vec{F}_e – действующая на двойникующую дислокацию со стороны внешних сил; \vec{S} – неупругой природы.

Примем:

$$\vec{F}_i \neq 0, \quad \vec{F}_e = 0, \quad \vec{S} \neq 0. \quad (2)$$

Тогда для нанодвойника, состоящего из пяти двойникующих дислокаций, справедливо:

$$\begin{cases} c_{01} + c_{02} + c_{03} + c_{04} = S; \\ c_{01} - c_{12} - c_{13} - c_{14} = S; \\ c_{02} + c_{12} - c_{23} - c_{24} = S; \\ c_{03} + c_{13} + c_{23} - c_{34} = S; \\ c_{04} + c_{14} + c_{24} + c_{34} = S. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_{01} &= \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_1}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}; & c_{02} &= \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_2}{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}; \\ c_{03} &= \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_3}{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}; & c_{04} &= \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_4}{(x_0 - x_4)^2 + (y_0 - y_4)^2}; \\ c_{12} &= \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}; & c_{13} &= \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_3}{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}; \\ c_{14} &= \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_4}{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}; & c_{23} &= \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{x_2 - x_3}{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$c_{24} = \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_2 - x_4}{(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2}; \quad c_{34} = \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_3 - x_4}{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2},$$

где μ – модуль сдвига; b_B – модуль вектора Бюргера двойнивающей дислокации винтового нанодвойника; x_i и y_i – координаты двойнивающих дислокаций (i – индекс, принимающий значения от 0 до 4).

Система алгебраических уравнений (3) с учетом обозначений (4) получена из (1), полагая, что

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_0 - x_1}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} + \frac{x_0 - x_2}{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_0 - x_3}{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2} + \frac{x_0 - x_4}{(x_0 - x_4)^2 + (y_0 - y_4)^2} \right\} = S; \\ F_1 &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_1 - x_0}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_1 - x_3}{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} + \frac{x_1 - x_4}{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2} \right\} = S; \\ F_2 &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_2 - x_0}{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} + \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_2 - x_3}{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \frac{x_2 - x_4}{(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2} \right\} = S; \\ F_3 &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_3 - x_0}{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2} + \frac{x_3 - x_1}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_3 - x_2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} + \frac{x_3 - x_4}{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2} \right\} = S; \\ F_4 &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_4 - x_0}{(x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2} + \frac{x_4 - x_1}{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_4 - x_2}{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2} + \frac{x_4 - x_3}{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \right\} = S. \end{aligned} \tag{5}$$

Результаты и их обсуждение. Если двойнивающие дислокации, кроме вершинной дислокации, на противоположных границах нанодвойника попарно расположены друг над другом, то с учетом

$$\begin{aligned} |y_0 - y_1| &= |y_1 - y_0| = |y_0 - y_3| = |y_3 - y_0| = a; \\ |y_1 - y_2| &= |y_2 - y_1| = |y_3 - y_4| = |y_4 - y_3| = a; \\ |y_0 - y_2| &= |y_2 - y_0| = |y_0 - y_4| = |y_4 - y_0| = 2a; \\ |y_1 - y_4| &= |y_4 - y_1| = |y_2 - y_3| = |y_3 - y_2| = 3a; \\ |y_1 - y_3| &= |y_3 - y_1| = 2a; \quad |y_2 - y_4| = |y_4 - y_2| = 4a, \end{aligned} \tag{6}$$

где a – межплоскостное расстояние в плоскости, перпендикулярной плоскости двойникования, и с учетом

$$c_{01} = c_{03}, \quad c_{02} = c_{04}, \quad c_{12} = c_{34}, \quad c_{14} = c_{23}, \quad (7)$$

систему (3) можно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} c_{01} + c_{02} = S/2 \\ c_{01} - c_{12} = S/2. \\ c_{02} + c_{12} = S/2 \end{cases} \quad (8)$$

Здесь

$$c_{01} = \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_1}{(x_0 - x_1)^2 + a^2}; \quad c_{02} = \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_2}{(x_0 - x_2)^2 + a^2}; \quad c_{12} = \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)^2 + a^2}. \quad (9)$$

Введем обозначения:

$$d_{01} = x_0 - x_1, \quad d_{02} = x_0 - x_2, \quad d_{12} = x_1 - x_2. \quad (10)$$

Тогда (8) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \frac{d_{01}}{d_{01}^2 + a^2} + \frac{d_{02}}{d_{02}^2 + 4a^2} = \frac{\pi S}{\mu b_B^2}; \\ \frac{d_{01}}{d_{01}^2 + a^2} - \frac{d_{12}}{d_{12}^2 + a^2} = \frac{\pi S}{\mu b_B^2}; \\ \frac{d_{02}}{d_{02}^2 + 4a^2} + \frac{d_{12}}{d_{12}^2 + a^2} = \frac{\pi S}{\mu b_B^2}. \end{cases} \quad (11)$$

Примем

$$d_{01} = d_{12} = d, \quad d_{02} = 2d. \quad (12)$$

Тогда из (11) получим:

$$\frac{d}{d^2 + a^2} = \frac{2\pi S}{3\mu b_B^2}. \quad (13)$$

Отсюда

$$d^2 - \frac{3\mu b_B^2}{2\pi S} d + a^2 = 0. \quad (14)$$

Данное квадратное относительно d уравнение имеет два решения [3]:

$$d_1 = \frac{3\mu b_B^2}{4\pi S} - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{3\mu b_B^2}{4\pi S} \right)^2 - a^2}, \quad (15)$$

$$d_2 = \frac{3\mu b_B^2}{4\pi S} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{3\mu b_B^2}{4\pi S} \right)^2 - a^2}. \quad (16)$$

В данных решениях уменьшаемое и первое слагаемое всегда больше вычитаемого и второго слагаемого. Поэтому в зависимости d от S будет доминировать $1/S$. Это означает, что рост S позволяет удерживать в равновесии нанодвойники меньших размеров. А уменьшение S приводит к росту нанодвойника.

Выводы. Таким образом, изучена роль сил внутреннего трения в формировании остаточных нанодвойников клиновидной формы. Показано, рост сил неупругой природы

способствует удержанию в равновесии нанодвойники меньших размеров, в то время как уменьшение силы внутреннего трения способствует росту нанодвойника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Остриков, О. М. Нанодвойникование монокристаллов висмута / О. М. Остриков // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2002. – № 3. – С. 51–52.
2. Остриков, О. М. Дислокационная модель нанодвойникового композита / О. М. Остриков // Вестник Могилевского государственного университета имени А. А. Кулешова. Серия В. – 2013, № 1(41). – С. 35–46.
3. Воднев, В. Т. Основные математические формулы: Справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Мн.: Высшая школа, 1988. – 269 с.

Поступила: 26.01.2021

ТЕРМОУПРУГИЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ

¹Старовойтов Э. И., ²Журавков М. А., ¹Яровая А. В.

¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

²Белорусский государственный университет, Минск

Введение. В связи с широким распространением композитных, в том числе трехслойных, элементов конструкций в технике и строительстве в последнее время значительное возрос спрос на разработку математических моделей и методов их расчета на различные виды и типы нагрузок.

Монографии [1–3] содержат различные математические модели статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций, включая стержни, пластины и оболочки. В них изложены методы решения соответствующих краевых задач. Гармонические и нестационарные динамические нагружения неоднородных цилиндрических и сферических оболочек исследованы в работах [4–7]. Изотермическое динамическое деформирование трехслойных круговых пластин при импульсных и резонансных непрерывных и локальных нагрузках рассмотрено в статьях [8–11]. Постановки и методики решения краевых задач об изотермическом квазистатическом деформировании, в том числе циклическом, упругопластических слоистых стержней и пластин приведены в [12–15]. Термосиловое нагружение трехслойных пластин и оболочек исследовалось в работах [16–18].

Здесь рассмотрена задача о колебаниях упругой круговой трехслойной пластины в температурном поле. Проведен численный параметрический анализ зависимости собственных чисел и частот колебаний защемленной по контуру пластины от температуры.

1. Общее решение начально-краевой задачи. Постановка начально-краевой задачи проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z . Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось z направляется ей перпендикулярно вверх, к первому слою (рис. 1). Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого заполнителя ($h_3 = 2c$), воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали.

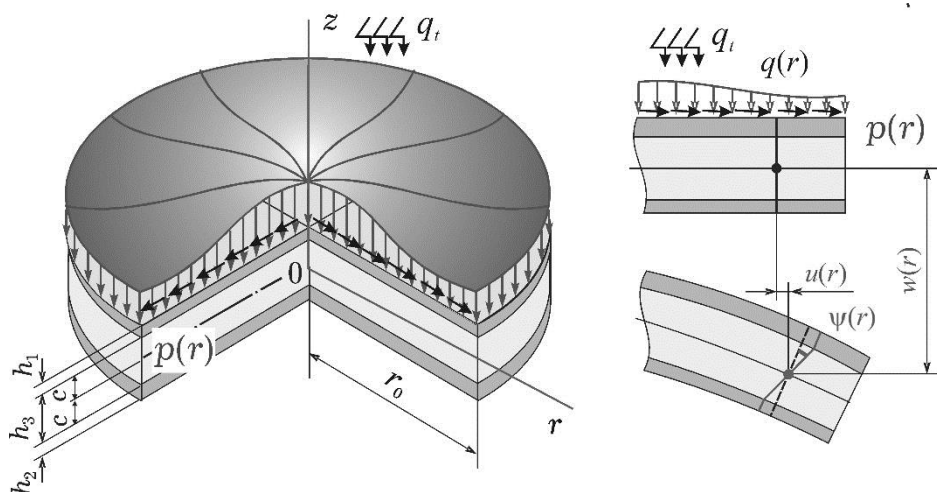


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины

Считаем, что к наружной поверхности первого несущего слоя приложены произвольные распределенные нагрузки $q(r)$, $p(r)$, к контуру пластины – погонные усилия и моменты T_r^0 , H_r^0 , M_r^0 , Q^0 . Температурное поле принимается однородным. В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ . В дальнейшем эти функции считаем искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$). Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 .

Из гипотезы прямолинейности нормали заполнителя следует, что

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi.$$

После интегрирования этого выражения с учетом принятых гипотез получим формулы, выражающие радиальные перемещения в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, & -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (1) и соотношений Коши, напряжения – из термодинамических соотношений закона Гука:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(T_k)\varepsilon_\alpha^{(k)}, & \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k) \quad (k = 1, 2, 3), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_k(T_k)\varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi), \end{aligned}$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – модули сдвига и объемного деформирования; T_k – температура в k -ом слое, отсчитываемая от некоторого начального значения T_0 ; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k -го слоя.

Для описания зависимости модулей упругости $G(T)$, $K(T)$ материалов слоев от температуры применялась универсальная линейная формула Белла [2]:

$$\begin{aligned} \{G(T), K(T), E(T)\} &= \{G(0), K(0), E(0)\} \varphi(T), \\ \varphi(T) &= \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \leq 0,06, \\ 1,03(1 - T/(2T_m)), & 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где T_m – температура плавления материала; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ – значения модулей при, так называемом, нулевом напряжении, которые определяются из эксперимента, например, зная G_0 при некоторой начальной температуре T_0 получим, что $G(0) = G_0 / \varphi(T_0)$.

Уравнения движения рассматриваемой пластины получены вариационным методом в [2]. Соответствующая система дифференциальных уравнений вынужденных колебаний будет

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r}) &= -p, \\ L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2cG_3\psi &= 0, \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) - M_0\ddot{w} &= -q. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь L_2 , L_3 – линейные дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}; \end{aligned}$$

Коэффициенты

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\
 a_3 &= h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+, \quad a_4 = c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), \\
 a_5 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\
 a_6 &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\
 K_k^+ &= K_k(T_{0k}) + \frac{4}{3} G_k(T_{0k}), \quad K_k^- = K_k(T_{0k}) - \frac{2}{3} G_k(T_{0k}),
 \end{aligned} \tag{4}$$

$M_0 \ddot{w}$ – поперечные инерционные силы, $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$, ρ_k – плотность материала слоя; $T_{0k}(t)$ – величина усредненной температуры в k -ом слое в момент времени t .

Начальные условия принимаются однородными. В качестве граничных принимаются кинематические условия заделки контура пластины:

$$(u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = 1). \tag{5}$$

2. Собственные колебания пластины. Соответствующая система дифференциальных уравнений движения следует из (3), если положить нагрузки в правых частях уравнений равными нулю. После некоторых преобразований она приводится к виду

$$\begin{aligned}
 u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \\
 L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} &= 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}, \\
 M^4 &= M_0 D, \quad D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.
 \end{aligned}$$

Термозависимые коэффициенты a_i определяются соотношениями (4).

В связи с ограниченностью искомого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо в (6) положить $C_2 = C_4 = 0$.

Искомый прогиб принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \tag{7}$$

где $v(r)$ – неизвестная координатная функция, ω – частота собственных колебаний рассматриваемой пластины, A и B – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

После подстановки выражения (7) в последнее уравнение системы (6) получим уравнение для определения координатной функции $v(r)$:

$$L_3(v_{,r}) - \beta^4 v = 0, \tag{8}$$

или, с учетом оператора (4), в развернутом виде

$$v_{,rrrr} + \frac{2}{r} v_{,rrr} - \frac{1}{r^2} v_{,rr} + \frac{1}{r^3} v_{,r} - \beta^4 v = 0.$$

Здесь введено обозначение для собственного числа уравнения (8):

$$\beta^4 = M^4 \omega^2. \tag{9}$$

Решение уравнения (8) известно:

$$v(\beta r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r) + C_7 Y_0(\beta r) + C_8 K_0(\beta r). \tag{10}$$

где J_0 , Y_0 – функции Бесселя нулевого порядка (нижний индекс) первого и второго рода соответственно; I_0 , K_0 – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков; C_5, \dots, C_8 – константы интегрирования.

Не останавливаясь на описании указанных функций Бесселя, отметим, что $Y_0(\beta r)$ и $K_0(\beta r)$ имеют особенность типа логарифма в начале координат, т. е. в центре пластины. Поэтому необходимо в (10) положить постоянные интегрирования $C_7 = C_8 = 0$. Заметим также, что для пластин с отверстием эти константы определяются из граничных условий на внутреннем контуре. В результате, решение системы (6) принимает вид

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r, & \psi &= b_2 w_{,r} + C_3 r, \\ w(\beta r) &= v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \\ v(\beta r) &= C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r) w(r, t). \end{aligned} \quad (11)$$

Если контур пластины заземлен, то на нем должны выполняться условия (5). Подставив в два последних из них решение (11), получим однородную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования C_5, C_6 :

$$\begin{aligned} C_5 J_0(\beta r_1) + C_6 I_0(\beta r_1) &= 0, \\ -C_5 J_1(\beta r_1) + C_6 I_1(\beta r_1) &= 0, \end{aligned}$$

где J_1, I_1 – функции Бесселя первого порядка.

Эта система однородная, поэтому имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее детерминанта. Следовательно,

$$I_1(\beta r_1) J_0(\beta r_1) + J_1(\beta r_1) I_0(\beta r_1) = 0. \quad (12)$$

Трансцендентное уравнение (12) служит для определения собственных чисел β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) дифференциального уравнения (8). После вычисления β_n частоты собственных колебаний следуют из соотношения (9):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}. \quad (13)$$

Следует отметить, что частоты ω_n зависят от температуры через коэффициент M^4 , введенный в (6).

В таблице 1 приведены собственные числа для трехслойной пластины единичного радиуса ($r_0 = 1$), материалы слоев которой Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т. Толщины слоев принимались следующие: $h_1 = h_2 = 0,02, h_3 = 0,1$.

Таблица 1 – Собственные числа при заделанном контуре пластины

Номер n	Собственное число λ_n	Номер n	Собственное число λ_n
0	3,196	8	28,279
1	6,306	9	31,420
2	9,439	10	34,561
3	12,577	11	37,702
4	15,716	12	40,844
5	18,857	13	43,985
6	21,997	14	47,126
7	25,138		

Таблица 2 содержит собственные числа пластины, материалы слоев которой кордиерит–фторопласт-4–Д16-Т, при толщинах $h_3 = 10h_2 = 20h_1 = 0,05$. Механические характеристики, использованных материалов, приведены в [2].

Таблица 2 – Собственные числа для пакета кордиерит–фторопласт–Д16Т

Номер n	Собственное число β_n	Номер n	Собственное число β_n
0	3,193	10	34,531
1	6,301	11	37,679
2	9,431	12	40,808
3	12,566	13	43,947
4	15,702	14	47,086
5	18,840	15	50,224
6	21,977	16	53,363
7	25,116	17	56,502
8	28,254	18	59,641
9	31,392	19	62,780

3. Численные результаты показывают зависимость собственных частот (13) от температуры круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру: 1 – ω_0 ; 2 – ω_1 ; 3 – ω_0 ; 4 – ω_1 . Предполагалось, что вся пластина прогревается равномерно до рассматриваемой температуры. Коэффициенты a_i рассчитывались по формулам (4). Зависимость от температуры учитывалась формулой Белла (2).

На рисунке 2 приведены графики, иллюстрирующие зависимость собственных частот от температуры для пластины, выполненной из материалов Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т. Толщины слоев: $h_1 = h_2 = 0,02$, $h_3 = 0,1$. Рисунок 3 содержит аналогичные графики для пластины, со слоями кордиерит–фторопласт-4–Д16-Т, $h_3 = 10h_2 = 20h_1 = 0,05$.

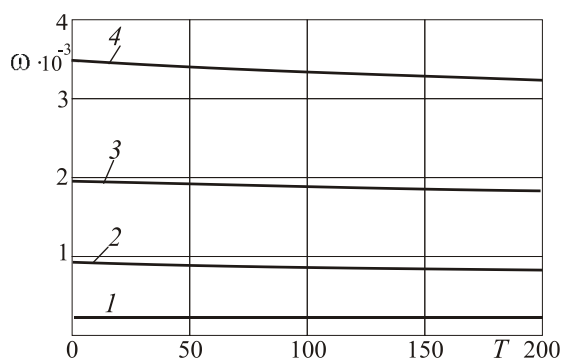


Рис. 2. Пластина Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т

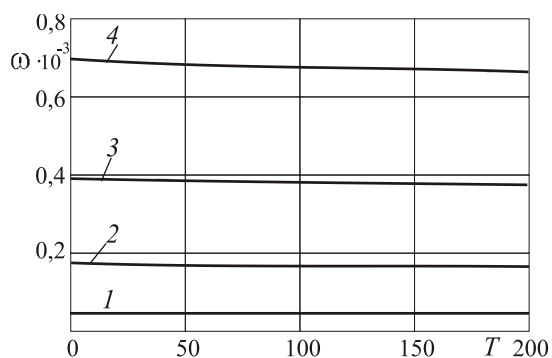


Рис. 3. Пластина кордиерит–фторопласт-4–Д16-Т

Выводы. При замене верхнего несущего слоя на кордиерит, пластина становится более жесткой и частоты собственных колебаний растут. При нагревании на 100° частоты уменьшаются на 3,6 %, при нагревании на 200° – на 7 % за счет изменения модулей упругости материалов слоев.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект T20P-047).

ЛИТЕРАТУРА

1. Головки, К. Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К. Г. Головки, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.
2. Журавков, М. А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.
3. Старовойтов, Э. И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск: Бел. наука, 2017. – 275 с.

4. Горшков, А. Г. Гармонические колебания трехслойной цилиндрической вязкоупругопластической оболочки / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая // Прикладная механика. – 2001. – № 9. – С. 100–107.
5. Mikhailova, E. Yu. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) / G. V. Fedotenkov, E. Yu. Mikhailova // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 2, P. 239–247.
6. Fedotenkov, G. V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovskiy // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 162, No. 2. – P. 246–253.
7. Tarlakovskiy, D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskiy, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, No. 2. – P. 145–152.
8. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.
9. Starovoitov, E. I. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, No 5. – P. 561–570.
10. Ivañez, I. The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. – 2015. – No. 133. – P. 1127–1136.
11. Paimushin, V. N. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate / V. N. Paimushin, R. K. Gazizullin // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol. 53, No. 3. – P. 407–436.
12. Москвитин, В. В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 267–273.
13. Старовойтов, Э. И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.
14. Захарчук, Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – № 33. – С. 363–369.
15. Козел, А. Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – № 33. – С. 318–323.
16. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.
17. Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.
18. Нестерович, А. В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–60.

Поступила: 31.01.2021

ВЛИЯНИЕ МАТЕРИАЛОВ СЛОЕВ НА ИЗГИБ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

Козел А. Г.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

В современном строительстве, аэрокосмическом комплексе, судостроении и строительстве не могут обойтись без применения композиционных, в том числе трехслойных конструкций. Конструктивно они состоят из внешних прочных слоев малой толщины, между которыми помещается относительно толстый наполнитель, а их соединение друг с другом обеспечивается склеиванием. Трехслойные пакеты могут изготавливаться из разнообразных материалов (бетона, древесины, металла, пластмасс и т. д.), которые варьируются в зависимости от необходимых характеристик и условий эксплуатации заданного изделия.

В монографии [1] приведены различные математические модели деформирования трехслойных стержней, изложены методы решения соответствующих краевых задач. Интересные задачи, связанные с исследованием влияния сжимаемости наполнителя на перемещения в пластине в случае осесимметричного деформирования решены в [2, 3], неосесимметричное нагружение пластин исследовалось в [4]. Деформирование круговых сэндвич-пластин на упругом основании под действием динамических нагрузок рассмотрено в [5–7], прямоугольных сэндвич-пластин – в [8, 9].

Осесимметричное деформирование несимметричных по толщине упругих круговых трехслойных пластин на основании Пастернака исследовалось в работах [10, 11]. Анализ напряженного состояния упругой и упругопластической круглой сэндвич-пластины выполнен в работах [12, 13]. Здесь приведена постановка и решение краевой задачи изгиба упругой круговой сэндвич-пластины, связанной со сложным основанием модели Пастернака, численно исследованы перемещения и напряжения при различных материалах несущих слоев и наполнителя.

1. Постановка задачи. Рассматривается сэндвич-пластина на упругом основании (рис. 1). Для изотропных несущих слоев толщиной $h_1 = h_2$ приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом несжимаемом по толщине наполнителе ($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . Наполнитель считается легким, т. е. не учитывается работа касательных напряжений $\sigma_{rz}^{(3)}$ в тангенциальном направлении. Постановка и решение задачи приводится в цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной со срединной плоскостью наполнителя. Ввиду симметрии пластины радиальное перемещение координатной плоскости $u(r)$ отсутствует. Решение задачи сводится к нахождению двух неизвестных функций – относительного сдвига в наполнителе $\psi(r)$ и прогиба пластины $w(r)$. На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев.

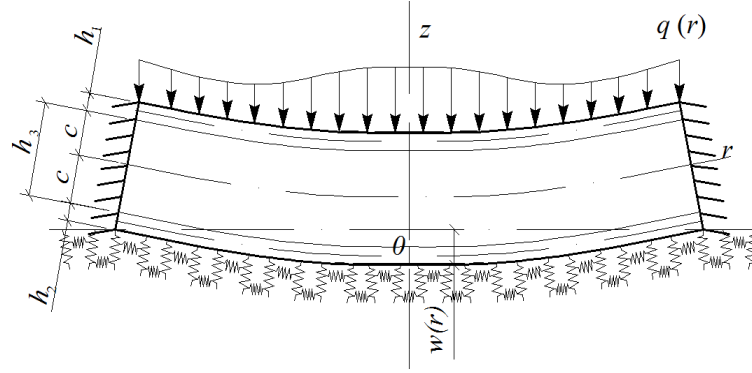


Рис. 1. Схема деформирования сэндвич-пластины в случае жесткой заделки контура

Осесимметричная нагрузка $q(r)$ распределена по верхнему слою пластины, реакция основания согласно модели Пастернака будет [14]:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (1)$$

где κ_0 – коэффициент сжатия; t_f – коэффициент сдвига материала основания; Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}.$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, с учетом выражения (1), получена с помощью вариационного принципа Лагранжа в [12]:

$$M_{r,r}^{(3)} + \frac{1}{r} (M_r^{(3)} - M_\phi^{(3)}) = 0, \quad (2)$$

$$M_{r,rr} + \frac{1}{r} (2M_{r,r} - M_{\phi,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q,$$

где обобщенные внутренние моменты M_α , $M_\alpha^{(3)}$ ($\alpha = r, \phi$) будут

$$\begin{aligned} M_r &= \left[2cK_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \left[2cK_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\ &- \left[2K_1^+ h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \left[2K_1^- h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}, \\ M_r^{(3)} &= \int_{-c}^c \left[K_3^+ (z\psi_{,r} - zw_{,rr}) + \frac{1}{r} K_3^- (z\psi - zw_{,r}) \right] z dz, \\ M_\phi &= \left[2cK_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \psi_{,r} + \left[2cK_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \frac{\psi}{r} - \\ &- \left[2K_1^- h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] w_{,rr} - \left[2K_1^+ h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \frac{w_{,r}}{r}, \\ M_\phi^{(3)} &= \int_{-c}^c \left[K_3^- (z\psi_{,r} - zw_{,rr}) + \frac{1}{r} K_3^+ (z\psi - zw_{,r}) \right] z dz. \end{aligned}$$

Силовые граничные условия на контуре сэндвич-пластины ($r = R$):

$$M_r^{(3)} = M_r^{(3)0}, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r} (M_r - M_\phi) = Q^0, \quad (3)$$

где M_r^0 , $M_r^{(3)0}$, Q^0 – заданные внешние контурные усилия.

После подстановки обобщенных внутренних моментов M_α , $M_\alpha^{(3)}$ ($\alpha = r, \phi$), выраженных через искомые функции в (2), с учетом реакции основания (1), получена в перемещениях следующая система уравнений равновесия, описывающая изгиб круговой упругой сэндвич-пластины на двухпараметрическом основании Пастернака:

$$\begin{aligned} L_2(a_1\psi - a_2w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_2\psi - a_3w_{,r}) - \kappa_0w + t_f\Delta w &= -q, \end{aligned} \quad (4)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 следующие

$$a_1 = c^2(2h_1K_1^+ + \frac{2}{3}cK_3^+), \quad a_2 = c[2h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ + \frac{2}{3}c^2K_3^+], \quad a_3 = 2h_1(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2)K_1^+ + \frac{2}{3}c^3K_3^+,$$

$$K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3}G_k,$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r}\right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевая задача по определению перемещений замыкается присоединением к (4) силовых (3) или кинематических граничных условий ($r = R$):

– в случае жесткой заделки контура пластины

$$\psi = 0, \quad w = 0, \quad w_{,r} = 0; \quad (5)$$

– при шарнирном опирании контура

$$\psi = 0, \quad w = 0, \quad M_r = 0; \quad (6)$$

– при свободном контуре

$$\psi = 0, \quad M_r = 0, \quad M_{r,r} = 0. \quad (7)$$

2. Решение краевой задачи. Выполнив ряд преобразований, перепишем систему (4) в виде:

$$\psi = \frac{a_2}{a_1}w_{,r} + C_1r + \frac{C_2}{r}, \quad (8)$$

$$w_{,rrr} + \frac{2}{r}w_{,rr} - \frac{1}{r^2}w_{,rr} + \frac{1}{r^3}w_{,r} - t_f D(w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r}) + \kappa_0 D w = qD,$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования, определяемые из граничных условий (5) – (7);

$$D = \frac{a_1}{a_3a_1 - a_2^2}.$$

Процедура решения системы уравнений (8) подробно рассмотрена в [12]. В нашем случае оно имеет вид:

$$\psi = \frac{a_2}{a_1}w_{,r} + C_1r + \frac{C_2}{r}; \quad (9)$$

$$w = C_3J_0(\sqrt{a}kr) + C_4H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr) + C_5J_0(\sqrt{\bar{a}}kr) + C_6H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}kr) + w_p,$$

где C_3, C_4, C_5, C_6 – константы интегрирования; $J_0(\sqrt{a}kr), J_0(\sqrt{\bar{a}}kr)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, комплексных аргументов $\sqrt{a}kr$ и $\sqrt{\bar{a}}kr$; $H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr), H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}kr)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов; a, \bar{a} – величины, выражаемые через параметры пластины и основания; $\kappa^4 = \kappa_0 D$; w_p – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Общее решение системы дифференциальных уравнений равновесия круговой сэндвич-пластины, связанной с основанием Пастернака, с учетом ограниченности прогиба в центре пластины $C_2 = C_4 = C_6 = 0$, будет следующим

$$\psi = \frac{a_2}{a_1}w_{,r} + C_1r, \quad (10)$$

$$w = C_3J_0(\sqrt{a}kr) + C_5J_0(\sqrt{\bar{a}}kr) + w_p.$$

В случае жесткой заделки контура пластины константы интегрирования C_1, C_3, C_5 определяются из граничных условий (5). В результате получаем

$$C_1 = 0, C_5 = \frac{w_{p,r}(R)J_0(\sqrt{a}kR) + \kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)w_p(R)}{\kappa\left[\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)J_0(\sqrt{a}kR) - \sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)J_0(\sqrt{a}kR)\right]}, \quad (11)$$

$$C_7 = \frac{w_{p,r}(R)J_0(\sqrt{a}kR) + \kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)w_p(R)}{\kappa\left[\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}kR)J_0(\sqrt{a}kR) - \sqrt{a}J_0(\sqrt{a}kR)J_1(\sqrt{a}kR)\right]}.$$

Таким образом, система (10) с константами интегрирования (11) дает рекуррентное решение задачи для рассматриваемой пластины при произвольной осесимметричной нагрузке.

3. Численный параметрический анализ. Численные результаты получены для защемленной по контуру трехслойной пластины единичного радиуса $R=1$ м, связанной с двухпараметрическим основанием Пастернака. Для основания приняты следующие параметры: $\kappa_0 = 100$ МПа/м, $t_f =$ МПа·м. Величина интенсивности поверхностной равномерно распределенной нагрузки $q_0 = 1$ МПа. Базовой является пластина, материалы несущих слоев которой набраны из дюралюминиевого сплава (Д16Т), наполнитель – фторопласт-4, толщины слоев $h_1 = h_2 = 0,04$ м, $h_3 = 0,4$ м. Механические характеристики этих и других материалов, используемых далее, заимствованы из [15]: Д16-Т – $G = 0,267 \cdot 10^5$ МПа, $K = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; нитридкремниевая конструкционная керамика (НКККМ) – $G = 5,85 \cdot 10^5$ МПа, $K = 12,7 \cdot 10^5$ МПа; кордиерит – $G = 2,58 \cdot 10^5$ МПа, $K = 5,58 \cdot 10^5$ МПа; титан – $G = 0,41 \cdot 10^5$ МПа, $K = 1,04 \cdot 10^5$ МПа; политетрафторэтилен (фторопласт-4) – $G = 90$ МПа, $K = 345$ МПа; пенополиуретан – $G = 4,5$ МПа, $K = 11,765$ МПа; пенопласт – $G = 11,8$ МПа, $K = 55$ МПа.

Влияние материала наполнителя на прогиб пластины и сдвиг в наполнителе оказалось несущественным, кривые практически совпадали. Значительный эффект выбор материала наполнителя оказывает на изменение тангенциальных $\sigma_{rz}^{(3)}$ – (а) и радиальных $\sigma_r^{(3)}$ – (б) напряжений в наполнителе на склейке с верхним слоем ($z = c$) (рис. 2): 1 – пенополиуретан, 2 – пенопласт, 3 – фторопласт-4. При замене фторопласта-4 на пенопласт тангенциальные напряжения уменьшаются на 87 %, при использовании пенополиуретана – на 95 %, что объясняется уменьшением упругих модулей этих материалов.

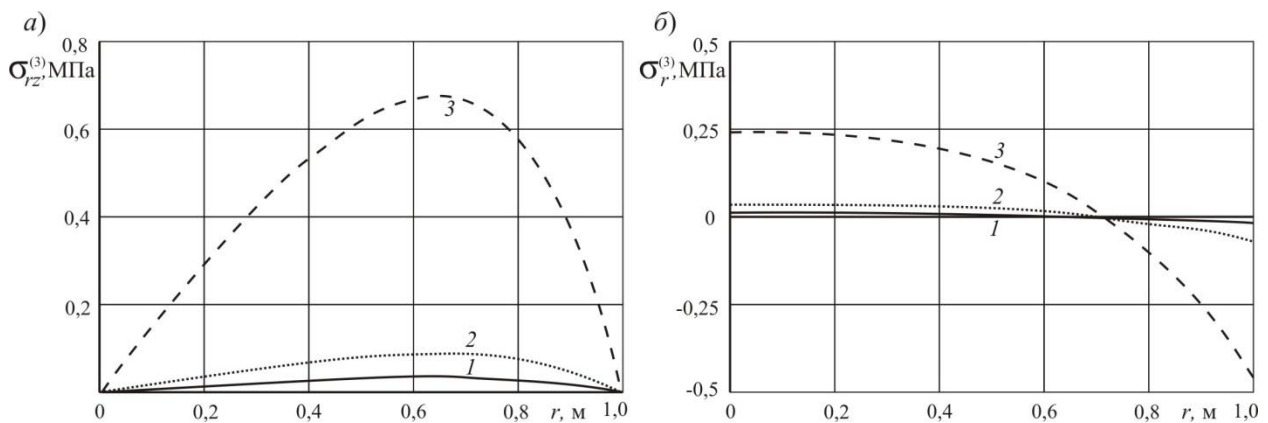


Рис. 2. Изменение тангенциальных $\sigma_{rz}^{(3)}$ и радиальных напряжений $\sigma_r^{(3)}$ вдоль радиуса пластины при различных материалах наполнителя

Зависимость прогиба пластины (а) и сдвига в наполнителе (б) от жесткости материала несущих слоев показана на рисунке 3: 1 – Д16Т–фторопласт-4–Д16Т, 2 – титан–фторопласт-4–титан, 3 – кордиерит–фторопласт-4–кордиерит, 4 – НКККМ–фторопласт-4–НКККМ. Если несущие слои выполнены из титана, то прогиб уменьшается на 13 %, если из кордиерита – на 72 %, из НКККМ – на 86 %.

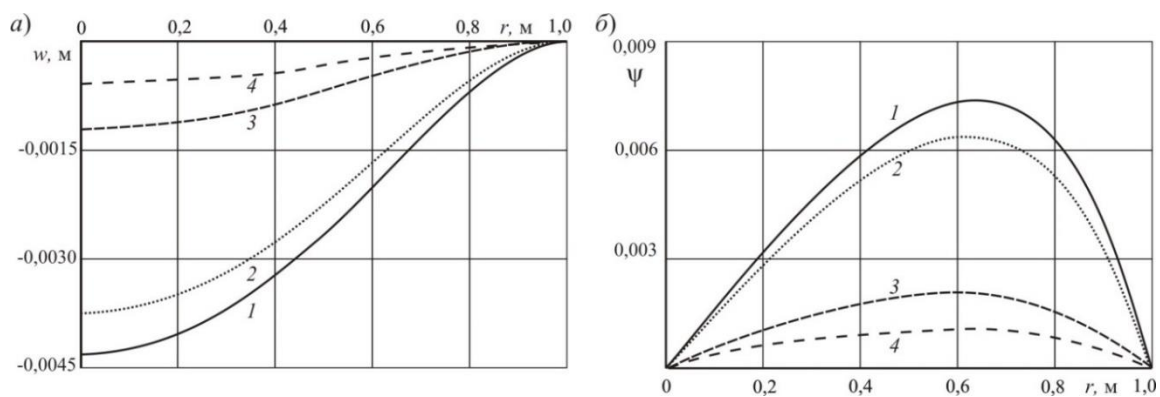


Рис. 3. Изменение прогиба w и сдвига в заполнителе ψ вдоль радиуса пластины

Также для подобных трехслойных пакетов проведено исследование изменения радиальных напряжений $\sigma_r(z)$ по толщине пластины на ее контуре (а) и в центре (б) (рис. 4), нумерация кривых прежняя.

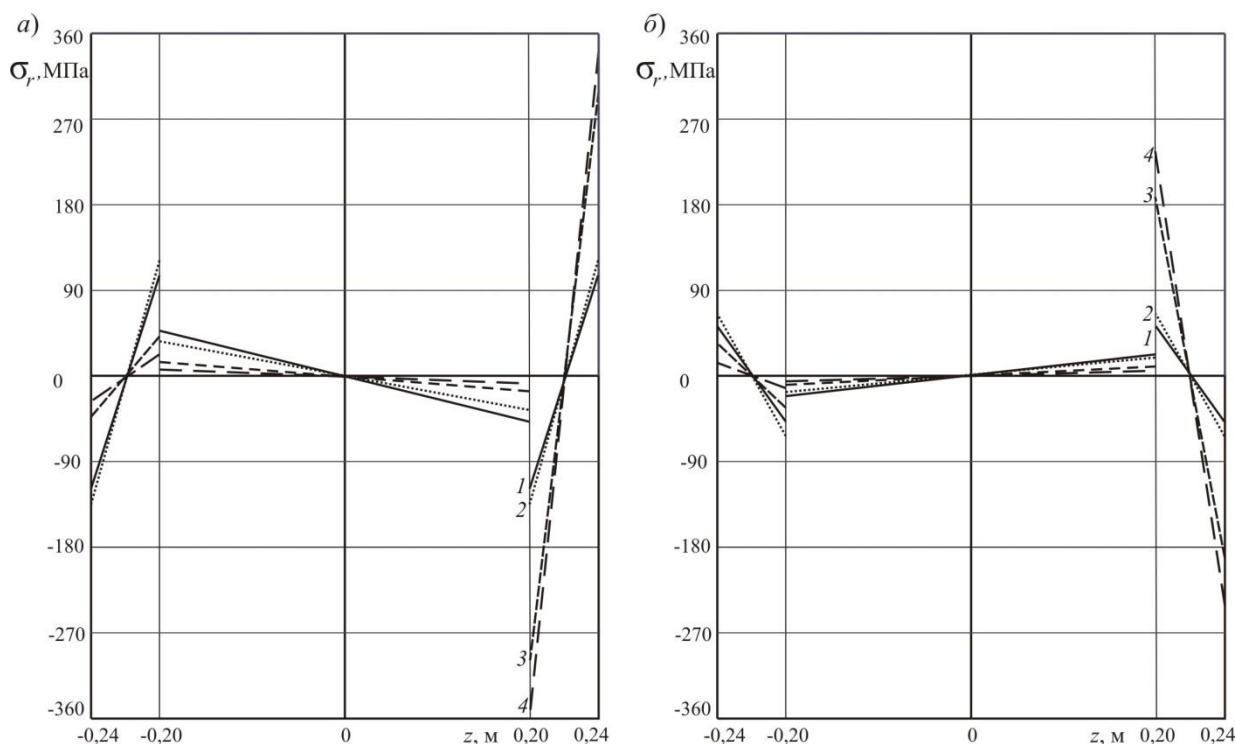


Рис. 4. Изменение радиальных напряжений σ_r по толщине пластины

Выводы. Для всех пакетов графики напряжений симметричны относительно срединной поверхности заполнителя в силу симметрии пластины по толщине. При этом напряжения в несущих слоях больше в титановом сплаве от 11 % (а) до 19 % (б), в заполнителе они уменьшаются от 8,5 % (б) до 18 % (а).

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т19РМ-089).

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э. И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко // – Минск: Бел. наука, 2017. – С. 275.

2. Зеленая, А. С. Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2017. – № 6(105). – С. 89–95.
3. Захарчук, Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – Т. 33, № 4. – С. 53–57.
4. Нестерович, А. В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научн.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.
5. Starovoitov, E. I. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, No 5. – P. 561–570.
6. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.
7. Леоненко, Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – № 1. – С. 59–63.
8. Sobhy, M. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions / M. Sobhy // Composite Structures. – Vol. 99. – 2013. – P. 76–87.
9. Nonlinear vibration and dynamic buckling analyses of sandwich functionally graded porous plate with graphene platelet reinforcement resting on Winkler–Pasternak elastic foundation / Q. Li [et al.] // International Journal of Mechanical Sciences. – 2018. – Vol. 148. – P. 596–610.
10. Старовойтов, Э. И. Влияние жесткости основания Пастернака на деформирование круговой трехслойной пластины / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2019. – № 2. – С. 106–113.
11. Старовойтов, Э. И. Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 1. – С. 392–406.
12. Козел, А. Г. Влияние сдвиговой жесткости основания на напряженное состояние сэндвич-пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6(332). – С. 25–35.
13. Козел, А. Г. Нелинейный изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научн.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2020. – Вып. 35. – С. 106–113.
14. Пастернак, П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак // М.: Госстройиздат. – 1954. – С. 56.
15. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Москва: Физматлит, 2006. – С. 379.

Поступила: 02.02.2021

ДИНАМИКА СЛОИСТЫХ БАЛОК СОДЕРЖАЩИХ ЭЛЕКТРОРЕОЛОГИЧЕСКИЙ КОМПОЗИЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

Ботогова М. Г., Михиевич А. П., Михасев Г. И.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Тонкие слоистые композитные балки, пластины и оболочки широко используются в различных областях современной техники. Образованные из слоистых композитных тонкостенных оболочкоподобных элементов конструкции сочетают в себе легкость с высокой прочностью, что объясняет широкое применение их в судостроении, авиа- и ракетостроении, машиностроении, в промышленном строительстве и других областях [1]. Применение новых полимерных материалов, таких как электрореологические композиты (ЭРК) с управляемыми упругими и вязко-пластичными свойствами на основе нано- и ультрадисперсных наполнителей, дало мощный толчок для активизации исследований и разработок по их применению в задачах демпфирования различных тонкостенных конструкций [2–7].

ЭРК относятся к классу так называемых «интеллектуальных материалов», которые демонстрируют практически мгновенную реакцию (несколько миллисекунд), меняя свои вязкоупругие свойства на приложенное электрическое поле. Оптимальное сочетание тонких относительно жестких слоев, выполненных из традиционных упругих изотропных материалов с вязкоупругими «мягкими» слоями ЭРК, является ключевой идеей при моделировании «умных» слоистых тонкостенных конструкций с управляемыми жесткостными и демпфирующими характеристиками.

Применение ЭРК в качестве наполнителей в слоистых конструкциях позволяет осуществлять мягкое гашение бегущих вибраций [8], а также управлять жесткостными характеристиками конструкции посредством изменения магнитного поля и увеличивать более чем на 50 % их несущую способность [9, 10]. Приложенное электрическое поле может очень сильно искажать формы собственных колебаний и, соответственно, влиять на спектр собственных частот конструкции.

Электрореологические композитные материалы. Композитные электрореологические материалы, чаще электрореологические жидкости (ЭРЖ), представляют собой суспензию диэлектрических частиц разной концентрации в вязкой среде [11, 12]. Данные материалы могут менять свои реологические свойства под действием электрического поля. Некоторые ЭРЖ с высокой концентрацией диэлектрических частиц под действием электрического поля показывают вязкоупругие свойства очень близкие к свойствам МРЭ. Подобные высоконцентрированные «умные» жидкости часто называются электрореологическими композитами (ЭРК).

Рассмотрим электрореологический композит ЭРК, полученный в ИТМО [12]. ЭРК – высоконцентрированная электрореологическая жидкость, состоящая из частиц гетита (45 %), трансформаторного масла (51 %) и глицерина моноолеата (4 %).

Пусть – комплексный модуль сдвига ЭРК,

$$G = G' + iG'', \quad (1)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, а $G' = \text{Re } G$ и $G'' = \text{Im } G$ – вещественная и мнимые части модуля G , называемые модулем накопления и модулем потерь, соответственно. Как видно, модули проявляют сильную зависимость от напряженности электрического поля ε .

Вязкоупругие свойства данного материала строго зависят от температуры. На рисунке 1 приведены основные характеристики композита от напряженности электрического поля ε при различных значениях температуры $T = 0, 40, 60, 100$ °С.

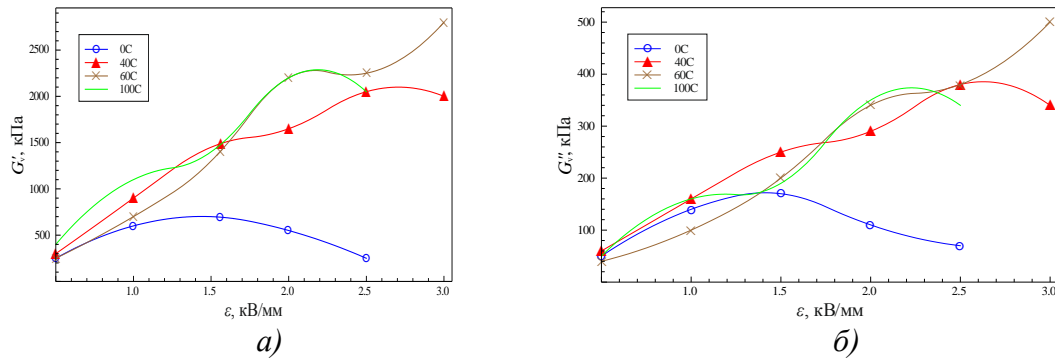


Рис. 1. Влияние напряженности электрического поля при различных температурах композита: а) на модуль сдвига электрореологического композита ЭРК; б) на модуль потерь электрореологического композита ЭРК

Свободные колебания слоистых балок, содержащих ЭРК. Рассмотрим многослойную балку, состоящую из N слоев. Для начала рассматриваем случай, когда все слои изготовлены из упругих материалов. Также, предполагается, что балка сжимается или растягивается осевой силой F^o и/или опирается на упругое основание с коэффициентом постели c_f . В общем случае F^o, ρ_1, c_f могут быть функциями координаты α_1 ($0 \leq \alpha_1 \leq L$). Здесь применяем теорию Григolloка-Куликова [13]. Принимая во внимание реакцию упругого основания и зависимость осевой силы от α_1 , уравнение, определяющее динамику многослойной балки, можно записать в виде:

$$EI\eta_3 \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \frac{\partial^4 \chi}{\partial \alpha_1^4} - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[F^o \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1} + c_f \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \chi + \rho_1 \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где E – приведенный модуль Юнга; β, θ – параметры сдвига; c_f – коэффициент постели упругого основания Винклера.

В соответствии с принимаемой теорией исходная слоистая оболочка заменяется так называемой «эквивалентной» однослойной трансверсально изотропной оболочкой толщиной h с приведенными модулями Юнга E и сдвига G , а также коэффициентом Пуассона ν , которые вводятся следующим образом:

$$E = \frac{1-\nu^2}{h} \left(\sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu^2} \right), \quad \nu = \sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k \nu_k}{1-\nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \right)^{-1}, \quad (3)$$

$$\beta = \frac{12(1-\nu^2)q_{44}}{E h \eta_1}, \quad \theta = 1 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1 \eta_3}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
q_{44} &= \frac{\left[\sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{kk} \right) \right]^2}{\sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{kk} \right) G_k^{-1}} + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} G_k, \\
\lambda_k &= \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0^2(z) dz, \quad \lambda_{kn} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k(z) f_n(z) dz \quad (n=0, k), \\
\eta_1 &= \sum_{k=1}^N \frac{\pi_{1k} \gamma_k}{\xi_k} - 3c_{12}^2, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^N \frac{\pi_{2k} \gamma_k}{\xi_k} - 3c_{12} c_{13}, \quad \eta_3 = 4 \sum_{k=1}^N (\xi_k^2 + 3\zeta_{k-1} \zeta_k) \gamma_k - 3c_{13}^2, \\
h\xi_k &= h_k, \quad h\zeta_n = \delta_n \quad (n=0, k), \\
c_{12} &= \sum_{k=1}^N \xi_k^{-1} \pi_{3k} \gamma_k, \quad c_{13} = \sum_{k=1}^N (\zeta_{k-1} + \zeta_k) \gamma_k \delta_0 = -h_1 - \frac{1}{2} h_2, \\
\pi_{1k} &= \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g^2(z) dz, \quad \pi_{2k} = \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} z g(z) dz, \quad \pi_{3k} = \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g(z) dz.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $G = q_{44} / h$ – приведенный модуль сдвига [14]; $f_n(z)$ – непрерывные на каждом слое функции, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned}
f_0(z) &= \frac{1}{h^2} (z - \delta_0)(\delta_N - z) \quad \text{если } z \in [\delta_0, \delta_N], \\
f_k(z) &= \frac{1}{h_k^2} (z - \delta_{k-1})(\delta_k - z) \quad \text{если } z \in [\delta_{k-1}, \delta_k], \\
f_k(z) &= 0 \quad \text{если } z \notin [\delta_{k-1}, \delta_k],
\end{aligned} \tag{6}$$

а δ_n – координаты внешних и интерфейсных поверхностей, отсчитываемые от исходной поверхности. Например, для трехслойной оболочки (сэндвича) имеем, $\delta_0 = -h_1 - \frac{1}{2} h_2$, $\delta_1 = -\frac{1}{2} h_2$, $\delta_2 = \frac{1}{2} h_2$, $\delta_3 = h_3 + \frac{1}{2} h_2$. Заметим, что функции $f_n(z)$ могут быть введены иначе, например через полиномы Лежандра.

Пусть края балки шарнирно оперты. Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$\chi = \chi'' = \chi^{IV} = 0 \quad \text{при } \alpha_1 = 0, L. \tag{7}$$

Если все параметры, включая F^o , ρ_0 , c_f являются постоянными, то решение уравнения (2) удовлетворяющее граничным условиям (7) имеет простую форму

$$\chi = \chi_0 \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L} e^{i\omega t}, \tag{8}$$

где L – длина балки; n – число волн; ω – собственная частота.

Подстановка (8) в (2) приводит к простой формуле для собственной частоты:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\rho_l}} \sqrt{\frac{EI \eta_3 \pi^4 n^4 (1 + \theta Kn^2)}{L^4 (1 + Kn^2)} + \frac{F^o \pi^2 n^2}{L^2} + c_f}, \tag{9}$$

где $K = \frac{\pi^2 h^2}{\beta L^2}$ – параметр сдвига.

Если $F^o > 0$, то балка растягивается, а при $F^o < 0$ – сжимается. В последнем случае предполагается, что $|F^o| < F_{cr}^*$, где F_{cr}^* – критическая сила, приводящая к потере устойчивости:

$$F_{cr}^* = \max_n \left\{ \frac{\pi^2 n^2 EI \eta_3 (1 + \theta K n^2)}{L^2 (1 + K n^2)} + \frac{c_f L^2}{\pi^2 n^2} \right\}. \quad (10)$$

Увеличение растягивающего усилия F^o и/или жесткости пружины c_f приводит к росту собственных частот для любого числа n . Напротив, увеличение сжимающей силы F^o приводит к уменьшению собственных частот; при этом $\omega \rightarrow 0$, как $|N^o| \rightarrow N_{cr}^*$.

Пусть какой-либо из слоев балки изготовлен из вязкоупругого ЭРК. В этом случае параметры K, η_3, θ , фигурирующие в (5) становятся комплексными, а собственное значение (5) также становится комплексным. Пусть балка свободна от внешнего осевого усилия, а упругое основание отсутствует. Тогда (5) переписется в виде:

$$\Omega = \Omega_n = \frac{1}{\sqrt{\rho_l}} \sqrt{\frac{EI \eta_3 \pi^4 n^4 (1 + \theta K n^2)}{L^4 (1 + K n^2)}}. \quad (11)$$

Здесь $\omega = \text{Re} \Omega$ – собственная частота колебаний, $\alpha = \text{Im} \Omega$ – декремент колебаний.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим сэндвич-балку, содержащую в качестве ядра ЭРК. Лицевые поверхности изготовлены из алюминия с модулем Юнга $E_1 = E_3 = 70,3$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu_1 = \nu_3 = 0,345$ и плотностью материала $\rho_1 = \rho_3 = 2,7 \times 10^{-6}$ кг/мм³. Модули накопления и потерь ЭРК представлены на рис. 1. Пусть $L = 0,3$ м, $b = 15$ мм и $h_1 = h_3 = 1$ мм. Результаты поставленной задачи для первой моды представлены на рис. 2.

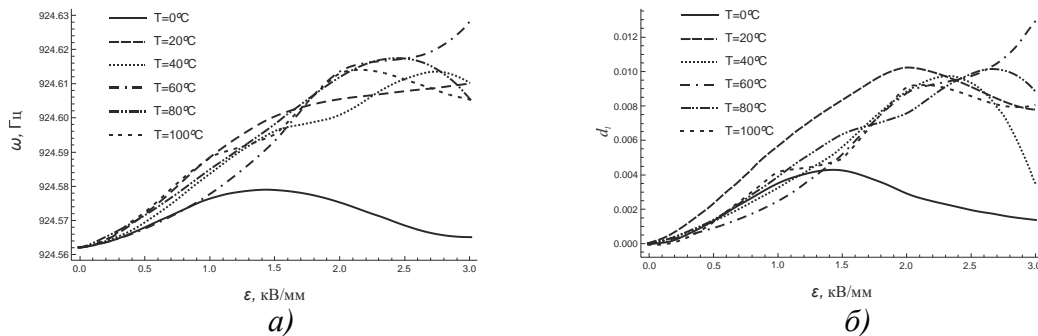


Рис. 2. Результаты для первой моды ($n = 1$) сэндвич-балки с ЭРК ядром толщиной $h_2 = 5$ мм в зависимости от напряженности электрического поля ε при различных температурах композита: а) первая собственная частота ω ; б) соответствующий логарифмический декремент

Как видно, в случае использования ЭРК в качестве чувствительного внутреннего слоя, зависимости частоты и логарифмического декремента от напряженности электрического поля становятся сложными и сильно зависят от температуры композита. Не разогретый композит менее чувствителен к электрическому полю и, как следствие приложенное электрическое поле не приводит к сильному росту частот и соответствующих декрементов. Наилучший результат демонстрирует балка с композитом, разогретым до 60 °С. На всех частотах наилучшее демпфирование колебаний достигается при напряженности $\varepsilon = 3,0$ кВ/мм.

Вынужденные колебания слоистых балок, содержащих ЭРК. Рассмотрим сэндвич-балку под действием внешней периодической нагрузки

$$q_l = \rho_l A_0(x) e^{i\omega_e t}, \quad (12)$$

где ω_e – частота возбуждающей внешней силы; $A_0(x)$ – амплитуда внешней нагрузки, зависящая от координаты x ; t – время. Примем модель Григолюка-Куликова, в соответствии с которой движение балки описывается уравнением (2), в котором положим $F^o = c_f = 0$. В качестве граничных условий рассмотрим условие шарнирного опирания (8). Решение уравнения (2) с граничными условиями (8) ищем в виде

$$\chi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) q_n(t), \quad (13)$$

где $q_n(t)$ – так называемые обобщенные координаты. Подстановка ряда (13) в уравнение (2) приводит к серии дифференциальных уравнений

$$\ddot{q}_n + \Omega_n^2 q_n = \frac{2F_n}{L(1 + Kn^2)} e^{i\omega_e t}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где Ω_n – комплексная собственная частота балки, определяемая соотношением (11), а F_n – так называемая обобщенная сила, которая находится по формуле

$$F_n = \int_0^L A_0(x) \sin(\lambda_n x) dx. \quad (15)$$

Частное решение уравнения (14) при фиксированном n имеет вид:

$$q_n(t) = \frac{2F_n}{L(1 + Kn^2)(\Omega_n^2 - \omega_e^2)} e^{i\omega_e t}. \quad (16)$$

Тогда амплитуда вынужденных установившихся колебаний будет определяться формулой

$$\chi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_n}{L(1 + Kn^2)(\Omega_n^2 - \omega_e^2)} e^{i\omega_e t} \sin(\lambda_n x). \quad (17)$$

Пример 2. Рассмотрим сэндвич-балку с параметрами такими же как и в примере 1. Внутренний слой толщиной $h_2 = 12$ мм изготовлен из ЭРК. Пусть внешняя периодическая нагрузка подчиняется закону (12), амплитуда которой есть функция

$$A_0(x) = 4 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right). \quad (18)$$

На рис. 3 приведены амплитудно-частотные характеристики в диапазоне изменения частоты возбуждения $0,9 \leq \omega_e \leq 12,0$ кГц при температуре $T = 40$ °С. Пунктирная кривая 1 соответствует случаю, когда электрическое поле отсутствует, а сплошная кривая 2 – когда между лицевыми пластинками действует электрическое поле напряженности $\varepsilon = 2$ кВ/мм. При этом, на рис. 3, а показаны резонансные пики на первой частоте, а на рис. 3, б – участки кривых, включающие резонансы на 2–5 частотах. Значения амплитуд колебаний масштабированы с одинаковым масштабом для обоих случаев, когда $\varepsilon = 0$ кВ/мм и $\varepsilon = 2$ кВ/мм.

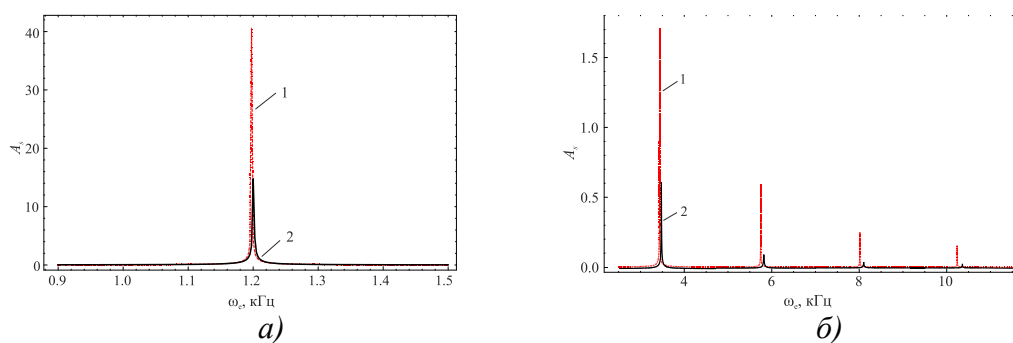


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика для сэндвич-балки, содержащей ЭРК ядро при температуре 40 °С для двух случаев: пунктирная линия 1 – напряженность электрического поля отсутствует; сплошная линия 2 – приложено электрическое поле напряженности $\varepsilon = 2$ кВ/мм, в разных диапазонах изменения частоты вынужденных колебаний; а) от 0,90 до 1,50 кГц; б) от 2,00 до 12,00 кГц

Выводы. Электрическое поле слабо влияет на значения первых собственных частот, и лишь для мод с номерами $n=3$ и выше наблюдается эффект смещения кривых вправо. Что касается сжатия амплитуды вынужденных колебаний, то данный эффект зависит от напряженности электрического поля, температуры композита и номера моды. Например, при $T = 40^\circ\text{C}$, $\varepsilon = 2$ кВ/мм наилучший эффект сжатия наблюдается на третьей моде ($n = 3$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Librescu, L. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey / L. Librescu, T. Hause // *Journal of Composite Structures*. – 2000. – Vol. 48. – P. 1–17.
2. Li, Y. A state-of-the-art review on magnetorheological elastomer devices / Y. Li [et al.] // *Smart Materials and Structures*. – 2014. – № 23(12). – P. 123001.
3. Shaw, J. S. Design and control of adaptive vibration absorber for multimode structures / J. S. Shaw, C. A. Wang // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2019. – № 30(7). – P. 1043–1052.
4. Mikhasev, G. I. Thin-Walled Laminated Structures: Buckling, Vibrations and Their Suppression / G. I. Mikhasev, H. Altenbach // Berlin: Springer, 2019. – P. 280.
5. Korobko, E. V. On Damping Vibrations of Three Layered Beam Containing Magnetorheological / E. V. Korobko [et al.] // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2012. – Vol. 23(9). – P. 1019–1023.
6. Korobko, E. V. Investigation of Elasticity of Magneto-sensitive Adaptive Materials for Laminated Composite Structures / E. Korobko [et al.] // *Mechanika*. – 2014. – Vol. 20, № 5. – P. 466–470.
7. Farshad, M. Magnetoactive elastomer composites / M. Farshad, A. Benine // *Journal of Polymer Testing*. – 2004. – Vol. 23. – P. 347–53.
8. Mikhasev, G. Soft Suppression of Traveling Localized Vibrations in Medium-Length Thin Sandwich-Like Cylindrical Shells Containing Magnetorheological Layers via Nonstationary Magnetic Field / G. Mikhasev, I. Mlechka, H. Altenbach // *Dynamical Systems: Theoretical and Experimental Analysis* (ed.: J. Awrejcewicz), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer International Publishing Switzerland. – 2016. – Vol. 182. – P. 241–260.
9. Mikhasev, G. I. On influence of boundary conditions and transverse shear on buckling of thin laminated cylindrical shells under external pressure / G. I. Mikhasev, I. R. Mlechka // *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*. – 2014. – Vol. 12, No. 2. – P. 95–106.

10. Mikhasev, G.I. Effect of edge shears and diaphragms on buckling of thin laminated medium-length cylindrical shells with low effective shear modulus under external pressure / G. I. Mikhasev, M. G. Botogova // *Acta Mechanica* – 2017. – Vol. 228 (6). – P. 2119–2140.
11. Hao, T. Mechanism of the electrorheological effect: evidence from the conductive, dielectric, and surface characteristics of water-free electrorheological fluids / T. Hao, A. Kawai, F. Ikazaki // *Langmuir*. – 1998. – Vol. 14, № 5. – P. 1256–1262.
12. Zhurauski, M. A. Mechanical Properties of Smart Fluids under Combined Electric and Magnetic Fields / M. A. Zhurauski [et al.] // *Mechanika*. – 2008. – Vol. 6, № 74. – P. 21–24.
13. Григолюк, Э. И., Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов // Москва: Машиностроение, 1988. – С. 288.
14. Mikhasev, G. I. Equivalent Single Layer Model for Thin Laminated Cylindrical Shells / G. I. Mikhasev, H. Altenbach // *Thin-walled Laminated Structures. Advanced Structured Materials*, Springer. – 2019. – Vol. 106 – P. 29–84.

Поступила: 18.02.2021

УПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ НАГРУЗКАМИ

Захарчук Ю. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Многослойные конструкции, в том числе трехслойные, нашли широкое применение при развитии самолетостроения в середине прошлого века. Это обусловило необходимость разработки механико-математических моделей и методов расчета трехслойных элементов конструкций на различные виды и типы нагрузок. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. В трехслойных пакетах основная часть механической нагрузки воспринимается несущими слоями из материалов высокой прочности и жесткости. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, предназначены для перераспределения усилий между несущими слоями. Такое сочетание слоев позволяет обеспечить надежную работу систем в неблагоприятных условиях окружающей среды (температура, радиация), создавать конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой.

В настоящее время разработка общей теории квазистатических деформаций трехслойных конструкций транспортной техники, в том числе и пластин, еще не завершена и интенсивно продолжается. Для них создаются математические модели деформирования при комплексных термосиловых, терморadiационных нагружениях. Рассматриваются задачи прочности, устойчивости, динамического поведения.

Динамике и колебаниям слоистых элементов конструкций, включая трехслойные пакеты, посвящены многочисленные исследования, в том числе монографии [1–3]. В них даются общие подходы к разработке механико-математических моделей колебаний и квазистатического деформирования трехслойных стержней, пластин и оболочек. Свободные и вынужденные колебания трехслойных пластин и оболочек рассмотрены в публикациях [4–6]. Продолжаются исследования напряженно-деформированного состояния многослойных композитных пластин при акустическом [7], термосиловом [8, 9] воздействии. Квазистатическому деформированию круговой трехслойной пластины в своей плоскости посвящены работы [10, 11], рассматривающие лишь частные случаи нагружения: осесимметричное, неосесимметричное радиальной нагрузкой.

Следует отметить, что и деформирование и колебания трехслойных круговых пластин в указанных работах исследовались только в случае несжимаемого заполнителя. В то время как применение различных видов заполнителей в расчетных моделях показывает, что существенную роль в напряженно-деформированном состоянии трехслойных пластин играют не только размеры, жесткость срединного слоя [12], степень заполнения объема между несущими слоями [13], но и его сжимаемость [14, 15]. Применение моделей, учитывающих сжимаемость заполнителя, позволило бы с большей степенью точности оценить физические параметры прочности рассматриваемых конструкций. Поэтому здесь приведена постановка и решение краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины со сжимаемым-растягиваемым заполнителем, включающая систему дифференциальных уравнений равновесия и граничные условия.

1. Постановка краевой задачи. Рассматривается упругая круговая трехслойная пластина со сжимаемым-растягиваемым заполнителем (рис. 1). Постановка задачи и ее

решение проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной со срединной плоскостью заполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. В заполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном и вертикальном направлениях, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Обжатие по толщине принимается линейным.

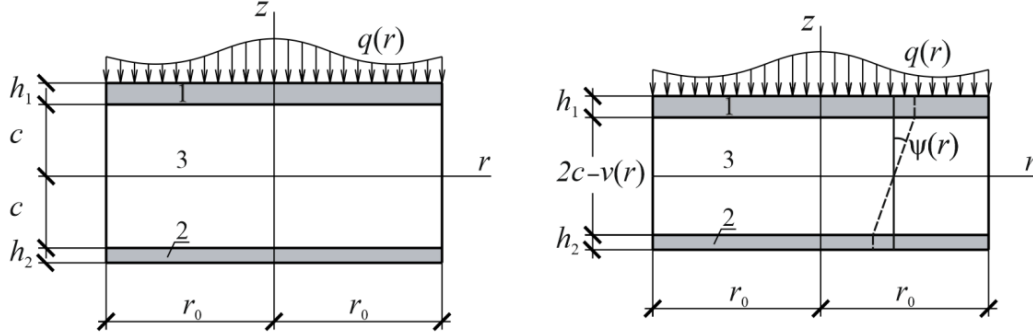


Рис. 1. Схема деформирования круговой трехслойной пластины

На внешний слой пластины действует осесимметричная распределенная нагрузка с вертикальной $q = q(r)$ и горизонтальной $p = p(r)$ составляющими. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя ($\psi = 0, v = 0$ при $r = r_0$). Через $w(r)$ обозначен прогиб нижнего несущего слоя, $u(r)$ – радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя, $\psi(r)$ – относительный сдвиг в заполнителе, $v(r)$ – функция, характеризующая сжимаемость заполнителя. Через h_k обозначена толщина k -го слоя ($k = 1, 2, 3$), при этом $h_3 = 2c$.

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ выражаются через четыре искомые функции $w(r), u(r), \psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями:

– несущие слои 1, 2

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}), \quad w^{(1)}(r, z) = w(r) + v(r) \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r}, \quad w^{(2)}(r, z) = w(r) \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c),$$

– заполнитель 3

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z \left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z + c) \right], \quad w^{(3)}(r, z) = w(r) + \frac{v(r)}{2c}(z + c) \quad (-c \leq z \leq c), \quad (1)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях:

$$\varepsilon_r^{(1)} = u_{,r} + c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}), \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r})), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0,$$

$$\varepsilon_r^{(3)} = u_{,r} + z\psi_{,r} - z \left[w_{,rr} + \frac{v_{,rr}}{2c}(z + c) \right], \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r} \left\{ u + z\psi - z \left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z + c) \right] \right\}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2} \left(\psi - \frac{z}{2c} v_{,r} \right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c}.$$

Таким образом, через введенные четыре искомые функции $w(r), u(r), \psi(r)$ и $v(r)$ выражены перемещения (1) и деформации (2) в круговой пластине со сжимаемым заполнителем.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ S_\alpha^{(3)} &= \int_{-c}^c \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz, \quad Q^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz, \quad M_{rz}^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} z dz, \quad T_z^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_z^{(3)} dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c(M_\alpha^{(1)} - M_\alpha^{(2)}), \end{aligned} \quad (3)$$

где интегралы берутся по толщине k -го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем получим, используя вариационный принцип Лагранжа.

$$\delta A = \delta W,$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – суммарная вариация работы внешних сил δA_1 и контурных усилий δA_2 ; δW – вариация работы внутренних сил упругости.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки будет:

$$\delta A_1 = \iint_S q \delta w r dr d\varphi. \quad (4)$$

Вариация работы контурных усилий $T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0, D_r^0, M_{rz}^0$:

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w + D_r^0 \delta v_{,r} + M_{rz}^0 \delta v) d\varphi. \quad (5)$$

Вариация работы сил упругости:

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz + 2 \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} \delta \varepsilon_{rz}^{(3)} dz + \int_{-c}^c \sigma_z^{(3)} \delta \varepsilon_z^{(3)} dz \right] r dr d\varphi. \quad (6)$$

Выразив в (6) деформации через искомые функции и приравняв полученное выражение к работе внешних и контурных усилий (4), (5), потребуем выполнение этого равенства при любых значениях варьируемых величин. Это возможно при равенстве нулю коэффициентов при независимых вариациях искомых функций. Отсюда следует система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях (3), описывающая деформирование круглой трехслойной пластинки со сжимаемым заполнителем:

$$\begin{cases} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = -p, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q^{(3)} = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r} - M_{rz}^{(3)}) - T_z^{(3)} - M_{rz,r}^{(3)} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

На границе $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0, \\ D_r &= D_r^0; \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\varphi) - M_{rz}^{(3)} = M_{rz}^0. \end{aligned} \quad (8)$$

Выразив внутренние обобщенные усилия в (7) через искомые функции $w(r), u(r), \psi(r), v(r)$, и используя обозначения $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k$, $K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k$, получим в итоге систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую перемещения в круглой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем:

$$\begin{aligned}
L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r} - a_4v_{,r}) + K_3^- v_{,r} &= p, \\
L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r} - a_7v_{,r}) - 2cG_3\psi &= 0, \\
L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r} - a_8v_{,r}) &= -q,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$L_3(a_4u + a_7\psi - a_9w_{,r} - a_{10}v_{,r}) + \frac{c}{6}K_3^- \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) - 2cK_3^+ v - 2cK_3^- \left(u_{,r} + \frac{u}{r} \right) = -q.$$

Здесь коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2 (оператор Бесселя), L_3 определяются соотношениями:

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+,$$

$$a_4 = c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right),$$

$$a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right],$$

$$a_6 = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+,$$

$$a_7 = c^2 \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ \right],$$

$$a_8 = c \left[h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ - h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ \right],$$

$$a_9 = c^2 \left(h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{5} c^3 K_3^+ \right),$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевая задача замыкается добавлением к системе (9) силовых (8) или кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться требования

$$u = \psi = w = v = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = r_0.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = \psi = w = v = M_r = 0 \quad \text{при } r = r_0. \tag{10}$$

Следует отметить, если в системе (9) положить $v(r) \equiv 0$, то первые три уравнения в ней совпадут с известной системой уравнений равновесия для круговой пластины с несжимаемым наполнителем [3, 8].

2. Аналитическое решение краевой задачи. В общем случае получить точное решение системы (9) не удалось. Поэтому ограничиваемся рассмотрением изгиба пластины под действием равномерно распределенной нагрузки ($q = \text{const}$, $p = 0$), с легким наполнителем. В этом случае пренебрегаем работой наполнителя в тангенциальном и вертикальном направлениях, что приводит к удалению двух интегральных слагаемых в выражении вариации работы внутренних усилий (6), содержащих σ_{rz} , σ_z . В системе (9) исчезнет последнее слагаемое во втором уравнении и последние два слагаемые в четвертом уравнении. После необходимых преобразований было получено дифференциальное уравнение четвертого порядка для прогиба пластины. Его решение было сведено к решению двух дифференциальных уравнений второго порядка. В итоге имеем следующее решение задачи об изгибе трехслойной круговой пластины со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{aligned}
\psi &= -\frac{q}{8a_6} r^3 - \frac{1}{a_6} (a_3u - a_8w_{,r} - a_9v_{,r}) + C_3 \frac{r}{2}, \\
w &= \frac{a_2a_6 - a_3a_5}{a_6^2 - a_5a_8} \int u \, dr - \frac{a_6a_7 - a_5a_9}{a_6^2 - a_5a_8} v - \frac{a_5q}{8(a_6^2 - a_5a_8)} r^3 + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{12}, \\
u &= b_1v_{,r} + (b_2 + b_3)L_3^{-1}(q) + C_5 \frac{r}{2},
\end{aligned} \tag{11}$$

$$v = -\frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1(r) r dr dr - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1(r) r dr dr \right) + C_9,$$

где $J_1(\beta r)$, $Y_1(\beta r)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно;

$$q_1 = \frac{r}{2} \left(\frac{d_4 d_5 - d_1 d_8}{d_1 d_6 - d_2 d_5} + \frac{d_1 d_9}{d_1 d_6 - d_2 d_5} \right), \quad b_1 = \frac{d_2 d_7 - d_3 d_6}{d_1 d_7 - d_3 d_5}, \quad b_2 = \frac{d_4 d_7 - d_3 d_8}{d_1 d_7 - d_3 d_5}, \quad b_3 = \frac{d_3 d_9}{d_1 d_7 - d_3 d_5},$$

$$d_1 = (a_1 a_6 - a_2 a_3)(a_6^2 - a_5 a_8) - (a_2 a_6 - a_3 a_5)(a_3 a_6 - a_2 a_8),$$

$$d_2 = (a_4 a_6 - a_2 a_9)(a_6^2 - a_5 a_8) - (a_6 a_7 - a_5 a_9)(a_3 a_6 - a_2 a_8), \quad d_3 = a_6(a_6^2 - a_5 a_8) K_3^-,$$

$$d_4 = a_2(a_6^2 - a_5 a_8) - a_5(a_3 a_6 - a_2 a_8),$$

$$d_5 = (a_4 a_6 - a_3 a_7)(a_6^2 - a_5 a_8) - (a_2 a_6 - a_3 a_5)(a_6 a_9 - a_7 a_8),$$

$$d_6 = (a_6 a_{10} - a_7 a_9)(a_6^2 - a_5 a_8) - (a_6 a_7 - a_5 a_9)(a_6 a_9 - a_7 a_8), \quad d_7 = \frac{a_6 c}{6}(a_6^2 - a_5 a_8) K_3^-,$$

$$d_8 = a_7(a_6^2 - a_5 a_8) - a_5(a_6 a_9 - a_7 a_8), \quad d_9 = a_6(a_6^2 - a_5 a_8).$$

В общем случае в решении (11) содержится 12 констант интегрирования. Шесть из них полагаются равными нулю исходя из условия ограниченности перемещений в центре пластины. Остальные определяются из граничных условий на контуре пластины.

В случае шарнирного опирания контура из условий (10) и решения (11) следуют константы интегрирования

$$C_3 = \frac{q_0 r_0^2}{8a_6} + \frac{2a_8}{a_6 r_0} \left(-\frac{a_5}{16(a_6^2 - a_5 a_8)} q_0 r_0^3 + C_{10} \frac{r_0}{2} \right) + \frac{2a_9}{a_6 r_0} \left(\frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} - 1 \right) C_7 J_1(\beta r_0) + \frac{q_0}{2\beta^2} (p_1 + p_2),$$

$$C_5 = -(b_2 + b_3) \frac{q_0 r_0^2}{8} - \frac{q_0 b_1}{2\beta^2} (p_1 + p_2), \quad C_7 = 0, \quad C_9 = -\frac{q_0 r_0}{2\beta^2} (p_1 + p_2), \quad (12)$$

$$C_{10} = \frac{3q_0 a_5}{8(a_6^2 - a_5 a_8)} r_0^2 - \frac{3q_0(a_2 a_6 - a_3 a_5)(b_2 + b_3)}{8(a_6^2 - a_5 a_8)} r_0^2 + C_5,$$

$$C_{12} = -\frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \left((b_2 + b_3) \frac{q_0 r_0^4}{64} + C_5 \frac{r_0^2}{4} \right) + \frac{a_5}{64(a_6^2 - a_5 a_8)} q_0 r_0^4 - C_{10} \frac{r_0^2}{4}.$$

Таким образом, решение (11) с константами (12) описывает перемещения в трехслойной пластине с легким сжимаемым заполнителем в случае шарнирного опирания ее контура.

3. Численные результаты. Параметрический анализ проведен для шарнирно опертой по контуру пластины единичного радиуса $r_0 = 1$ м. Величина интенсивности поверхностной нагрузки – $q_0 = -0,5$ МПа; линейные перемещения и геометрические параметры слоев, отнесенные к радиусу пластины, $c = 0,23$, $h_1 = 0,02$, $h_2 = 0,02$.

На рис. 2 проведены расчетные прогибы пластин со сжимаемым (1, 2) и несжимаемым (3) заполнителями: 1 – прогиб верхнего слоя; 2 – нижнего; 3 – при несжимаемом заполнителе. Материалы слоев дюралюминий–фторопласт–4–дюралюминий. Максимальное отличие прогибов составляет около 42 %, что существенно сказывается на всем напряженно-деформированном состоянии пластины.

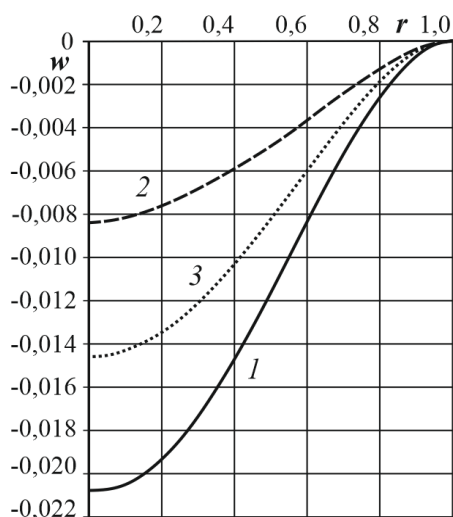


Рис. 2. Прогибы пластин со сжимаемым (1, 2) и несжимаемым (3) заполнителями

Рис. 3 показывает график изменения деформации обжатия $\varepsilon_z^{(3)}$ в заполнителе вдоль радиуса пластины. Деформация постоянна по толщине, поэтому одинакова во всех плоскостях заполнителя. Она достигает максимума в центре пластины, оставаясь в силу граничных условий нулевой на контуре.

Сдвиговая деформация в заполнителе $\varepsilon_{rz}^{(3)}$ зависит от координаты z , графики ее изменения на поверхностях заполнителя показаны на рис. 4: 1 – $z = c$; 2 – $z = -c$. Максимальное значение достигается на нижней поверхности слоя, оно примерно в 2,5 раза больше аналогичного значения на верхней плоскости.

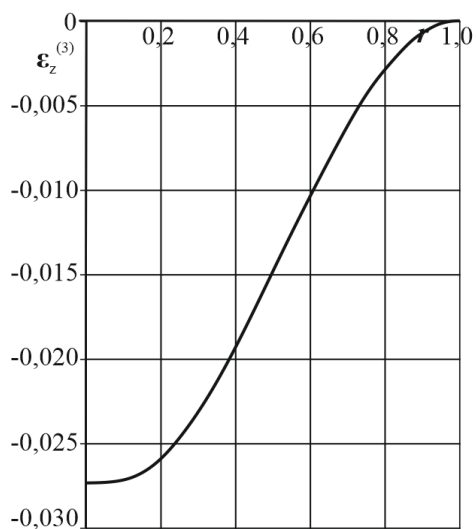


Рис. 3. Изменение деформации обжатия $\varepsilon_z(r)$ вдоль радиуса

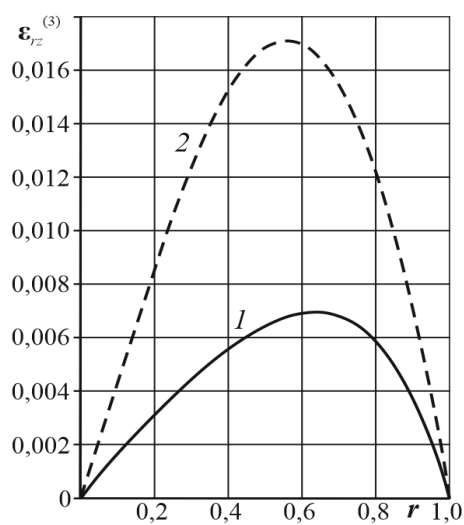


Рис. 4. Изменение деформаций $\varepsilon_{rz}(r)$ вдоль радиуса на поверхностях слоя 3

Выводы. Принятие кинематических гипотез для каждого слоя в отдельности, учет сжимаемости заполнителя позволяют существенно уточнить напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин. Предположение о линейности функции сжимаемости заполнителя в достаточной степени адекватно отражает реальное деформирование. Применение вариационных методов позволяет получать уточненную систему уравнений равновесия. Сведение дифференциального уравнения четвертого порядка для прогиба к двум дифференциальным уравнениям второго порядка позволило получить ана-

литическое решение задачи об изгибе круговой трехслойной пластины с легким заполнителем при равномерно распределенной нагрузке. Численное исследование показало, что в принятых условиях максимальное отличие прогибов у пластин со сжимаемым и несжимаемым заполнителями отличаются на 42 %.

Таким образом, предложенная математическая модель позволяет исследовать НДС упругих трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем при любых осесимметричных нагрузках. Учет сжимаемости заполнителя приводит к существенному уточнению НДС рассматриваемой трехслойной пластины. Полученное аналитическое решение может служить для проведения соответствующих численных экспериментов при проведении расчетов композитных элементов конструкций в строительстве и машиностроении.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект T20P-047).

ЛИТЕРАТУРА

1. Головки, К. Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К. Г. Головки, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш // Киев: Киевский ун-т. – 2012. – С. 541.
2. Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan // Singapore – London: World Scientific Publishing. – 2015. – P. 376.
3. Журавков, М. А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов // Минск: БГУ. – 2011. – С. 543.
4. Старовойтов, Э. И. Колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде Винклера при резонансе / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Ю. М. Плещачевский // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 4(22). – С. 70–73.
5. The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. – 2015. – № 133. – P. 1127–1136.
6. Grover, N. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates / N. Grover, B. N. Singh, D. K. Maiti // Aerospace Science and Technology. – 2016. – № 52. – P. 41–51.
7. Василевич, Ю. В. Метод расчета эффективности виброизоляции однослойного и многослойного ограждений в твердой упругой среде / Ю. В. Василевич, В. В. Неумержицкий // Механика машин, механизмов и материалов. – 2009. – № 1(1). – С. 56–58.
8. Старовойтов, Э. И. Термоупругое деформирование трехслойной круглой пластины поверхностными нагрузками различных форм / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – № 1(42). – С. 81–88.
9. Zenkour, A. M. Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads / A. M. Zenkour, N. A. Alghamdi // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2010. – Vol. 17, № 6. – P. 419–432.
10. Нестерович, А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.
11. Нестерович, А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.
12. Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. – БелГУТ. – Гомель. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.
13. Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels / L. Yang [et al.] // Materials Sciences and Applications. – 2013. – Vol. 4, № 8. – P. 471–477.

14. Захарчук, Ю. В. Влияние сжимаемости заполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.
15. Старовойтов, Э. И. Нелинейное деформирование трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Механика машин, механизмов и материалов. – 2019. – № 3(48). – С. 26–33.

Поступила: 02.02.2021

НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

Нестерович А. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. В настоящее время в различных областях машиностроения и строительства, судостроения широко используются многослойные элементы конструкций. Поэтому, для прочностных расчетов актуальным становится создание соответствующих механико-математических моделей. Постановки соответствующих краевых задач и методы расчета приведены в монографиях [1, 2]. Результаты, связанные с осесимметричными колебаниями круговых элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [3, 4]. Аналитические решения получены методом разложения в ряд по собственным функциям. Постановки и методики решения краевых задач об изотермическом квазистатическом деформировании, в том числе циклическом, упругопластических слоистых оболочек, стержней и пластин приведены в [5–8]. Термосиловое нагружение трехслойных пластин и оболочек исследовалось в работах [9–11]. Кинематика моделей основана на гипотезе ломаной линии. Аналитические результаты по неосесимметричному деформированию упругих круговых трехслойных пластин в своей плоскости приведены в статьях [12–16].

Здесь приведена постановка краевой задачи о термосиловом деформировании упругопластической трехслойной пластины в своей плоскости при неосесимметричном нагружении.

1. Постановка задачи. Рассматривается физически нелинейная трехслойная круговая пластина с несжимаемым наполнителем. Постановка задачи и ее решение проводится в полярной системе координат r, φ, z , которая связывается со срединной плоскостью наполнителя. К срединной плоскости наполнителя приложена непрерывно распределенная неосесимметричная нагрузка, проекции которой на соответствующие оси координат: $p_r(r, \varphi), p_\varphi(r, \varphi)$. Предполагается, что в процессе деформирования материалов несущих слоев могут проявлять упругопластические свойства, наполнитель – нелинейно упругий. Учтено воздействие температурного поля. Под действием нагрузки в пластине возникают радиальные $u_r(r, \varphi)$ и тангенциальные $u_\varphi(r, \varphi)$ перемещения.

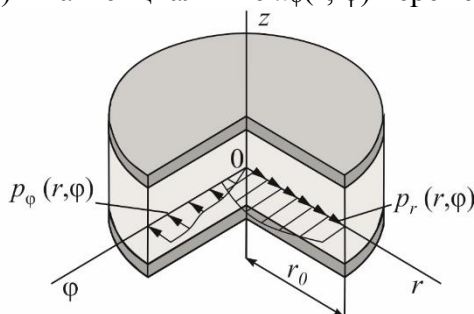


Рис. 1. Расчетная схема деформирования пластины

Физические уравнения состояния соответствуют теории малых упругопластических деформаций Ильюшина с учетом температурного воздействия [1]:

$$\begin{aligned}
 s_{\alpha\beta}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \left(1 - \omega_k(\varepsilon_{ii}^{(k)}, T_k) \right) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}, \\
 \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k) \left(\varepsilon^{(k)} - \alpha_0^{(k)} T_k \right) \quad (\alpha, \beta = r, \varphi; k = 1, 2, 3),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где $s_{\alpha}^{(k)}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций, k – номер слоя; $s_{\alpha\beta}^{(k)}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – термозависимые сдвиговой и объемный модули упругости материалов; $\alpha_0^{(k)}$ – коэффициент линейного температурного расширения; T_k – приращение температуры в k -м слое; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$ – функции пластичности и физической нелинейности материалов несущих слоев, которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ необходимо положить равными нулю; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -ом слое ($k=1, 2$); $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материалов несущих слоев.

В рассматриваемом случае будет справедлива система уравнений равновесия во внутренних усилиях [16], т. к. при их выводе не были использованы физические уравнения связи напряжений с деформациями:

$$\begin{cases} T_{rr,r} + \frac{1}{r}(T_{r\varphi,\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) = -p_r, \\ T_{r\varphi,r} + \frac{1}{r}(T_{\varphi\varphi,\varphi} + 2T_{r\varphi}) = -p_{\varphi}, \end{cases} \quad (2)$$

где $T_{\alpha\beta}$ – обобщенные внутренние усилия ($\alpha, \beta = r, \varphi$); запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Выразив обобщенные усилия в (2) через деформации с помощью уравнений (1), а затем деформации через перемещения, получим систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений. Ее точное решение получить не представляется возможным, поэтому необходимо применять численные или приближенные методы.

Алгоритм решения основан на методе упругих решений Ильюшина, который позволяет на каждом шаге приближения сводить рассматриваемую задачу для физической нелинейной пластины к соответствующей краевой задаче для упругой пластины.

Для реализации метода выделим линейную (индекс «e»), нелинейную (индекс «n») и температурную (индекс «t») составляющие в компонентах тензора напряжений (1):

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\alpha n}^{(k)} - \sigma_t^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\beta n}^{(k)}. \quad (3)$$

Составляющие напряжений в (3) выражаются через деформации следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} &= 2G_k(T_k)\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha\alpha n}^{(k)} = 2G_k(T_k)\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)}, \\ \sigma_{r\varphi e}^{(k)} &= s_{r\varphi}^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{r\varphi}^{(k)}, \quad \sigma_{r\varphi n}^{(k)} = s_{r\varphi}^{(k)} = 2G_k(T_k)\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)\varepsilon_{r\varphi}^{(k)}, \\ \sigma_t^{(k)} &= 3K_k(T_k)\alpha_0^{(k)}T_k, \quad (\alpha, \beta = r, \varphi; k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4)$$

Внутренние силы в пластине, используя соотношения (4), также представим в виде разности линейной, нелинейной и температурной частей:

$$T_{\alpha\beta}^{(k)} = \int_{h_k} \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} dz - \int_{h_k} \sigma_{\alpha\alpha n}^{(k)} dz - \int_{h_k} \sigma_t^{(k)} dz = T_{\alpha\beta e}^{(k)} - T_{\alpha\beta n}^{(k)} - T_t^{(k)}\delta_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = r, \varphi), \quad (5)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символы Кронекера.

Составляющие внутренних усилий в (5) определяются следующим образом

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &\equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta n}^{(k)} - \delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^3 T_t^{(k)} = T_{\alpha\beta e} - T_{\alpha\beta n} - \delta_{\alpha\beta} T_t = \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta n}^{(k)} dz - 3\delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} K_k(T_k)\alpha_0^{(k)}T_k dz. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив усилия (6) в уравнения равновесия (2), получим систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях физически нелинейной круговой трехслойной пластины:

$$\begin{cases} T_{rre,r} + \frac{1}{r}(T_{r\varphi e,\varphi} + T_{rre} - T_{\varphi\varphi e}) = -p_r + p_{r\omega}; \\ T_{r\varphi e,r} + \frac{1}{r}(T_{\varphi\varphi e,\varphi} + 2T_{r\varphi e}) = -p_\varphi + p_{\varphi\omega}. \end{cases} \quad (7)$$

В левой части уравнений (7), которая содержит линейные составляющие обобщенных внутренних усилий, нижний индекс «e» в дальнейшем писать не будем для удобства. Нелинейные добавки вынесены вправо (индекс «ω»), температурные добавки отсутствуют:

$$\begin{aligned} p_{r\omega} &= T_{rr\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\varphi\omega,\varphi} + T_{rr\omega} - T_{\varphi\varphi\omega}), \\ p_{\varphi\omega} &= T_{r\varphi\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{\varphi\varphi\omega,\varphi} + 2T_{r\varphi\omega}). \end{aligned} \quad (8)$$

На контуре пластины $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$T_{rr} = T_{rr}^0 + T_{rr\omega} + T_t, \quad T_{r\varphi} = T_{r\varphi}^0 + T_{r\varphi\omega}.$$

где $T_{rr}^0, T_{r\varphi}^0$ – заданные внешние контурные усилия.

2. Уравнения равновесия в перемещениях. Система дифференциальных уравнений в перемещения для круговой физически нелинейной трехслойной пластины при неосесимметричном нагружении в своей плоскости следует из (7), после подстановки в нее линейных внутренних усилий, выраженных через перемещения [16]:

$$\begin{aligned} L_2(u_r) + \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r,\varphi\varphi} + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi,\varphi x} - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi,\varphi} &= \frac{r_0^2}{a_1} (-p_r + p_{r\omega}), \\ L_2(u_\varphi) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r,x\varphi} + \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r,\varphi} &= \frac{r_0^2}{a_3} (-p_\varphi + p_{\varphi\omega}), \end{aligned} \quad (9)$$

где a_i – коэффициенты, определяющиеся через геометрические и упругие характеристики материалов слоев

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left(K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) dz, \quad a_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left(K_k(T_k) - \frac{2}{3} G_k(T_k) \right) dz, \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k(T_k) dz;$$

L_2 – дифференциальный оператор

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{x} (xg)_{,x} \right)_{,x} \equiv g_{,xx} + \frac{g_{,x}}{x} - \frac{g}{x^2};$$

x – безразмерная радиальная координата, определяемая отношением радиуса в i -той точке к радиусу пластины

$$x = r/r_0.$$

Краевая задача для круговой физически нелинейной трехслойной пластины при неосесимметричном нагружении замыкается добавлением к уравнениям (9) силовых (7) или кинематических граничных условий на контуре ($x = 1$) – радиальные и тангенциальные перемещения равны нулю и условий ограниченности решения в центре пластины ($x = 0$).

Заметим, температура в явном виде в уравнения (9) не входит, она учитывается своим влиянием на величину модулей упругости материалов слоев и содержится в граничном условии.

В силу физических уравнений состояния (1) система дифференциальных уравнений (9) является нелинейной. В связи с этим получить ее аналитическое решение в конечном виде не представляется возможным. Для решения системы (9) необходимо применить приближенные или численные методы.

В нашем случае, применим метод последовательных приближений, опирающийся на метод упругих решений Ильюшина. Он позволяет на каждом шаге итерации сводит решение нелинейной системы дифференциальных уравнений к решению соответствующей линейной системы с дополнительными «внешними» нагрузками.

Система (7) согласно методу упругих решений переписывается в итерационном виде

$$L_2(u_r^{(n)}) + \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r,\varphi\varphi}^{(n)} + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi,\varphi x}^{(n)} - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi,\varphi}^{(n)} = \frac{r_0^2}{a_1} (-p_r + p_{r\varphi\omega}^{(n-1)}),$$

$$L_2(u_\varphi^{(n)}) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r,x\varphi}^{(n)} + \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi,\varphi\varphi}^{(n)} + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r,\varphi}^{(n)} = \frac{r_0^2}{a_3} (-p_\varphi + p_{\varphi\omega}^{(n-1)}),$$

где n – номер приближения; $p_{r\varphi\omega}^{(n-1)}$, $p_{\varphi\omega}^{(n-1)}$ – дополнительные «внешние» нагрузки, которые на первом шаге итерации принимаются равными нулю, в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения с помощью (8)

$$p_{r\varphi\omega}^{(n-1)} = T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} r + \frac{1}{r} (T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} r_\varphi + T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\varphi\omega}^{(n-1)}),$$

$$p_{\varphi\omega}^{(n-1)} = T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} r_\varphi + \frac{1}{r} (T_{\varphi\varphi\omega}^{(n-1)} r_\varphi + 2T_{r\varphi\omega}^{(n-1)}).$$

Здесь

$$T_{\alpha\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\alpha\omega}^{(k)(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)(n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k(T_k) \omega_k(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T_k) \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)(n-1)} dz,$$

$$T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{r\varphi\omega}^{(k)(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{r\varphi\omega}^{(k)(n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k(T_k) \omega_k(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T_k) \varepsilon_{r\varphi}^{(k)(n-1)} dz.$$

Таким образом, на каждом шаге приближения имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными «внешними» нагрузками.

Выводы. Предложенная постановка краевой задачи позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойной физически нелинейной круговой пластины под действием неосесимметричных нагрузок, действующих в ее плоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T19PM-089).

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавков, М. А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – С. 540.
2. Старовойтов, Э. И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск: Бел. Навука, 2017. – С. 275.
3. Горшков, А. Г. Гармонические колебания трехслойной цилиндрической вязкоупругопластической оболочки / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая // Прикладная механика. – 2001. – № 9. – С. 100–107.
4. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

5. Москвитин, В. В. Деформация и переменные нагрузки двухслойных металлополимерных пластин / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // *Механика композитных материалов*. – 1985. – № 3. – С. 267–273.
6. Старовойтов, Э. И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2001. – № 4. – С. 37–40.
7. Козел, А. Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, заземленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2018. – Вып. 33. – С. 318–323.
8. Старовойтов, Э. И. Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2018. – № 4. – С. 88–97.
9. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2016. – № 1. – С. 91–97.
10. Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1989. – № 5. – С. 114–119.
11. Нестерович, А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.
12. Нестерович, А. В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А. В. Нестерович // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 2(27). – С. 54–61.
13. Нестерович, А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.
14. Нестерович, А. В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.
15. Нестерович, А. В. Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2020. – № 1(42). – С. 85–90.
16. Нестерович, А. В. Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2020. – Вып. 35. – С. 266–272.

Поступила: 02.02.2021

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОВЕСНОГО ВИНТОВОГО НАНОДВОЙНИКА В ДЕФОРМИРОВАННОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

¹Василевич Ю. В., ²Остриков О. М.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель

Введение. Теория дислокаций в механике деформируемого твердого тела используется для математического описания ряда состояний твердых тел, обусловленных, например, трещинами [1, 2]. В работе [3] теорию дислокаций предложено использовать для расчета напряженно-деформированного состояния твердых тел с остаточными механическими двойниками. На современном этапе исследования физико-механических свойств двойникующихся материалов, материалов с памятью формы представляет интерес изучение такого явления, как нанодвойникование [4–7].

Целью данной работы стало выяснение возможности существования остаточного винтового нанодвойника в деформированном твердом теле после снятия нагрузки, в условиях отсутствия сил неупругой природы, препятствующих движению двойникующих дислокаций.

Постановка задачи. Из-за громоздкости математических выкладок в данной работе ограничимся рассмотрением винтового нанодвойника. Винтовой нанодвойник состоит только из винтовых дислокаций [8], либо величина краевой составляющей вектора Бюргерса такого двойника близка к нулю. Также для уменьшения объема математических соотношений выберем минимальное число двойникующих дислокаций, образующих нанодвойник. Пусть это число будет равно пяти.

В плоскости XOY (рис. 1) положение каждой двойникующей дислокации зададим координатами (x_i, y_i) . Учитывая, что в вершине двойника находится одна двойникующая дислокация, i принимает значения от нуля до четырех. Линии двойникующих дислокаций параллельны оси OZ , вдоль которой направлен и вектор Бюргерса дислокаций винтового нанодвойника.

В данной работе рассмотрим возможность существования равновесного винтового нанодвойника при отсутствии напряжений, обусловленных концентратором напряжений и дислокаций устья двойника (рис. 1). Дислокации устья двойника имеют противоположный знак по сравнению с дислокациями двойниковых границ, так как клиновидная форма рассматриваемого двойника является производной от его линзовидной формы, образованной дислокациями противоположных знаков.

Результаты и их обсуждение. В процессе развития двойника каждая его двойникующая дислокация перемещается только в одной плоскости. Следы этих плоскостей на рис. 1 параллельны оси OX , а сами плоскости, в которых осуществляется движение двойникующих дислокаций, перпендикулярны плоскости XOY (рис. 1). Поэтому при решении поставленной задачи не будем рассматривать составляющую силы взаимодействия двойникующих дислокаций, направленную вдоль оси OY , ввиду отсутствия перемещения дислокаций в этом направлении. Тогда составляющая этой силы, направленная вдоль оси OX , согласно [9], может быть найдена из соотношения

$$F_x = b_b \sigma_{yz}, \quad (1)$$

где b_B – модуль винтовой составляющей вектора Бюргера двойнивающей дислокации; σ_{yz} – сдвиговые напряжения, создаваемые всеми двойнивающими дислокациями, за исключением дислокации, по отношению к которой рассматривается действие сил, обусловленных этими напряжениями.

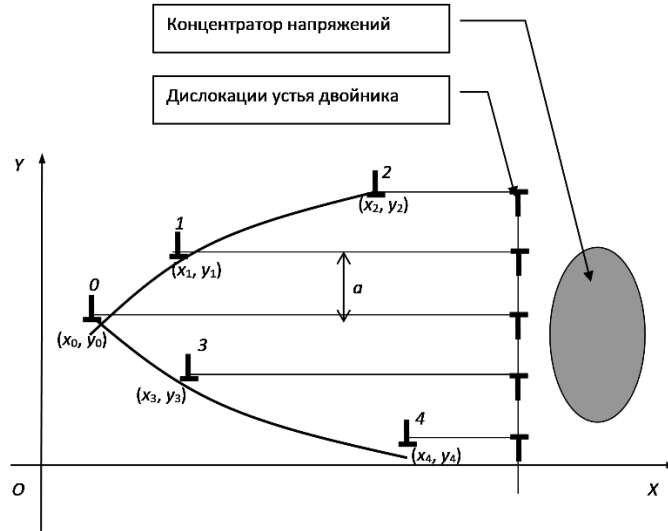


Рис. 1. Схематическое изображение системы «клиновидный нанодвойник – дислокации устья и концентратор напряжений» при произвольном расположении дислокаций на двойниковых границах

Каждая из пяти рассматриваемых двойнивающих дислокаций границ нанодвойника, находящаяся в точке с координатами (x_i, y_i) , создает поле сдвиговых напряжений, которое можно задать функциями

$$\begin{aligned} \sigma_{zy}^{(0)} &= \sigma_{zy}^{(0)}(x - x_0, y - y_0); & \sigma_{zy}^{(1)} &= \sigma_{zy}^{(1)}(x - x_1, y - y_1); & \sigma_{zy}^{(2)} &= \sigma_{zy}^{(2)}(x - x_2, y - y_2); \\ \sigma_{zy}^{(3)} &= \sigma_{zy}^{(3)}(x - x_3, y - y_3); & \sigma_{zy}^{(4)} &= \sigma_{zy}^{(4)}(x - x_4, y - y_4). \end{aligned} \quad (2)$$

Действующая на i -ую двойнивающую дислокацию вдоль оси OX составляющая силы, обусловленная этими напряжениями, может быть найдена из соотношений:

$$\begin{aligned} F_0 &= b_B \left(\sigma_{zy}^{(1)}(x_0 - x_1, y_0 - y_1) + \sigma_{zy}^{(2)}(x_0 - x_2, y_0 - y_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{zy}^{(3)}(x_0 - x_3, y_0 - y_3) + \sigma_{zy}^{(4)}(x_0 - x_4, y_0 - y_4) \right) = 0; \\ F_1 &= b_B \left(\sigma_{zy}^{(0)}(x_1 - x_0, y_1 - y_0) + \sigma_{zy}^{(2)}(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{zy}^{(3)}(x_1 - x_3, y_1 - y_3) + \sigma_{zy}^{(4)}(x_1 - x_4, y_1 - y_4) \right) = 0; \\ F_2 &= b_B \left(\sigma_{zy}^{(0)}(x_2 - x_0, y_2 - y_0) + \sigma_{zy}^{(1)}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{zy}^{(3)}(x_2 - x_3, y_2 - y_3) + \sigma_{zy}^{(4)}(x_2 - x_4, y_2 - y_4) \right) = 0; \\ F_3 &= b_B \left(\sigma_{zy}^{(0)}(x_3 - x_0, y_3 - y_0) + \sigma_{zy}^{(1)}(x_3 - x_1, y_3 - y_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{zy}^{(2)}(x_3 - x_2, y_3 - y_2) + \sigma_{zy}^{(4)}(x_3 - x_4, y_3 - y_4) \right) = 0; \\ F_4 &= b_B \left(\sigma_{zy}^{(0)}(x_4 - x_0, y_4 - y_0) + \sigma_{zy}^{(1)}(x_4 - x_1, y_4 - y_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{zy}^{(2)}(x_4 - x_2, y_4 - y_2) + \sigma_{zy}^{(3)}(x_4 - x_3, y_4 - y_3) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что (1) может быть представлена в виде [9]

$$F_x = \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (4)$$

соотношения (3) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_0 - x_1}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} + \frac{x_0 - x_2}{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_0 - x_3}{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2} + \frac{x_0 - x_4}{(x_0 - x_4)^2 + (y_0 - y_4)^2} \right\} = 0; \\ F_1 &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_1 - x_0}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_1 - x_3}{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} + \frac{x_1 - x_4}{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2} \right\} = 0; \\ F_2 &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_2 - x_0}{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} + \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_2 - x_3}{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \frac{x_2 - x_4}{(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2} \right\} = 0; \\ F_3 &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_3 - x_0}{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2} + \frac{x_3 - x_1}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_3 - x_2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} + \frac{x_3 - x_4}{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2} \right\} = 0; \\ F_4 &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \left\{ \frac{x_4 - x_0}{(x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2} + \frac{x_4 - x_1}{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_4 - x_2}{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2} + \frac{x_4 - x_3}{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c_{01} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_1}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}; & c_{02} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_2}{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}; \\ c_{03} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_3}{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}; & c_{04} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_4}{(x_0 - x_4)^2 + (y_0 - y_4)^2}; \\ c_{10} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_0}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}; & c_{12} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}; \\ c_{13} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_3}{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}; & c_{14} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_4}{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}; \\ c_{20} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_2 - x_0}{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}; & c_{21} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
c_{23} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_2 - x_3}{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}; & c_{24} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_2 - x_4}{(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2}; \\
c_{30} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_3 - x_0}{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2}; & c_{31} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_3 - x_1}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}; \\
c_{32} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_3 - x_2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}; & c_{34} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_3 - x_4}{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}; \\
c_{40} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_4 - x_0}{(x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2}; & c_{41} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_4 - x_1}{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}; \\
c_{42} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_4 - x_2}{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2}; & c_{43} &= \frac{\mu b_B^2}{2\pi} \frac{x_4 - x_3}{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}.
\end{aligned}$$

Из (6) очевидно, что

$$\begin{aligned}
c_{01} = -c_{10}, \quad c_{02} = -c_{20}, \quad c_{03} = -c_{30}, \quad c_{04} = -c_{40}, \quad c_{12} = -c_{21}, \quad c_{13} = -c_{31}, \quad c_{14} = -c_{41}, \\
c_{23} = -c_{32}, \quad c_{24} = -c_{42}, \quad c_{34} = -c_{43}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Принятые обозначения (6) позволяют преобразовать (5) в систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases}
c_{01} + c_{02} + c_{03} + c_{04} = 0; \\
c_{10} + c_{12} + c_{13} + c_{14} = 0; \\
c_{20} + c_{21} + c_{23} + c_{24} = 0; \\
c_{30} + c_{31} + c_{32} + c_{34} = 0; \\
c_{40} + c_{41} + c_{42} + c_{43} = 0;
\end{cases} \tag{8}$$

которая с учетом (7) преобразуется в систему

$$\begin{cases}
c_{01} + c_{02} + c_{03} + c_{04} = 0; \\
c_{01} - c_{12} - c_{13} - c_{14} = 0; \\
c_{02} + c_{12} - c_{23} - c_{24} = 0; \\
c_{03} + c_{13} + c_{23} - c_{34} = 0; \\
c_{04} + c_{14} + c_{24} + c_{34} = 0.
\end{cases} \tag{9}$$

Как видно, в данной системе уравнений больше, чем неизвестных. Ввиду этого система (9) без дополнительных условий неразрешима. В связи с этим примем, что у каждой двойнивающей дислокации на одной границе нанодвойника имеется парная дислокация на его другой границе. Эти парные дислокации находятся в одной плоскости, перпендикулярной плоскости XOY . На рис. 2 следы этих плоскостей в плоскости XOY показаны пунктирными линиями. Таким образом, пусть в одной плоскости находятся дислокации 1 и 3, 2 и 4, соответственно (рис. 2). Тогда из (6) следует, что

$$c_{01} = c_{03}, \quad c_{02} = c_{04}, \quad c_{12} = c_{34}, \quad c_{14} = c_{23}. \tag{10}$$

Здесь учтено, что

$$\begin{aligned}
|y_0 - y_1| &= |y_1 - y_0| = |y_0 - y_3| = |y_3 - y_0| = a; \\
|y_1 - y_2| &= |y_2 - y_1| = |y_3 - y_4| = |y_4 - y_3| = a; \\
|y_0 - y_2| &= |y_2 - y_0| = |y_0 - y_4| = |y_4 - y_0| = 2a; \\
|y_1 - y_4| &= |y_4 - y_1| = |y_2 - y_3| = |y_3 - y_2| = 3a; \\
|y_1 - y_3| &= |y_3 - y_1| = 2a; \quad |y_2 - y_4| = |y_4 - y_2| = 4a.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь a – межплоскостное расстояние в плоскости, перпендикулярной плоскости двойникования.

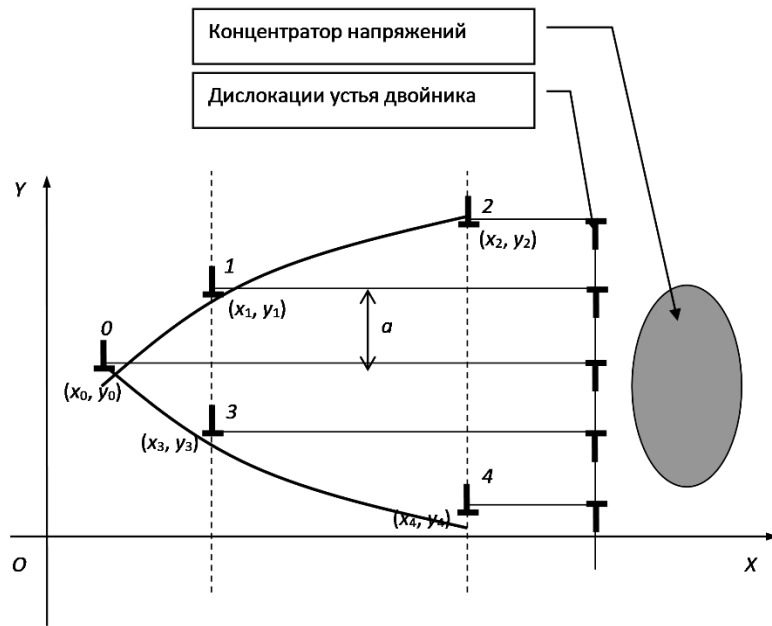


Рис. 2. Схематическое изображение системы «клиновидный нанодвойник – дислокации устья двойника и концентратор напряжений» при расположении дислокаций на двойниковых границах парами в плоскостях, следы которых в плоскости XOY параллельны оси OY

В силу принятых допущений (9) сводится к системе

$$\begin{cases} c_{01} + c_{02} = 0; \\ c_{01} - c_{12} = 0; \\ c_{02} + c_{12} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Следует отметить, что в (12) количество уравнений равно количеству неизвестных. Принимая во внимание (11), можно записать

$$\begin{aligned} c_{01} &= \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_1}{(x_0 - x_1)^2 + a^2}; \\ c_{02} &= \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{x_0 - x_2}{(x_0 - x_2)^2 + a^2}; \\ c_{12} &= \frac{\mu b^2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть

$$d_{01} = x_0 - x_1, \quad d_{02} = x_0 - x_2, \quad d_{12} = x_1 - x_2. \quad (14)$$

Тогда (12) с учетом (13) и (14) примет вид

$$\begin{cases} \frac{d_{01}}{d_{01}^2 + a^2} + \frac{d_{02}}{d_{02}^2 + 4a^2} = 0; \\ \frac{d_{01}}{d_{01}^2 + a^2} - \frac{d_{12}}{d_{12}^2 + a^2} = 0; \\ \frac{d_{02}}{d_{02}^2 + 4a^2} + \frac{d_{12}}{d_{12}^2 + a^2} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Преобразования (15) дают

$$\begin{cases} d_{01}(d_{02}^2 + 4a^2) + d_{02}(d_{01}^2 + a^2) = 0; \\ d_{01}(d_{12}^2 + a^2) - d_{12}(d_{01}^2 + a^2) = 0; \\ d_{02}(d_{12}^2 + a^2) + d_{12}(d_{02}^2 + 4a^2) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Очевидно, что

$$d_{01}^2 + a^2 \neq 0, \quad d_{02}^2 + 4a^2 \neq 0, \quad d_{12}^2 + a^2 \neq 0. \quad (17)$$

Из (15) следует, что

$$\frac{d_{01}}{d_{01}^2 + a^2} = \frac{d_{12}}{d_{12}^2 + a^2}. \quad (18)$$

Выполнение этого условия возможно, когда

$$d_{01} = d_{12}. \quad (19)$$

Из рис. 2 следует, что

$$x_0 - x_2 = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2). \quad (20)$$

Принимая во внимание (14), (20) можно представить в виде

$$d_{02} = d_{01} + d_{12}. \quad (21)$$

Из (19) и (21) следует, что

$$d_{02} = 2d_{01} = 2d_{12}. \quad (22)$$

Тогда первое уравнение в (16) можно преобразовать следующим образом:

$$d_{01}(d_{02}^2 + 4a^2) + d_{02}(d_{01}^2 + a^2) = d_{01}(4d_{01}^2 + 4a^2) + 2d_{01}(d_{01}^2 + a^2) = 6d_{01}(d_{01}^2 + a^2) = 0. \quad (23)$$

Учитывая (17), из (23) получаем одно имеющее физический смысл решение уравнения (23):

$$d_{01} = 0. \quad (24)$$

Из (22) и (23) следует, что и

$$d_{02} = 0, \quad d_{12} = 0. \quad (25)$$

Из построения рис. 2 очевидно следует

$$d_{03} = d_{01}, \quad d_{04} = d_{02}, \quad d_{14} = d_{23} = d_{34} = d_{12}. \quad (26)$$

Тогда для равновесия винтового нанодвойника также должно выполняться

$$d_{03} = d_{04} = d_{14} = d_{23} = d_{34} = 0. \quad (27)$$

Решения (24), (25) и (27) задачи о равновесии винтового нанодвойника говорят о том, что равновесие такого двойника возможно, когда дислокации двойниковых границ выстраиваются в стенку. Известно [9], что такое равновесие не является устойчивым. Если учесть наличие дислокаций противоположного знака, формирующих устье двойника и малую длину нанодвойника, то при малой величине или отсутствии сил неупругой природы, препятствующих движению дислокаций, при сближении разноименных дислокаций высока вероятность аннигиляции двойникующих дислокаций у устья двойника и исчезновения последнего. При значительной величине сил неупругой природы тормозящих движение дислокаций и сил отталкивания со стороны концентратора напряжений, породившего двойник и находящегося у его устья (рис. 2), вероятность аннигиляции двойникующих дислокаций у устья понижается.

Выводы. Таким образом, в результате силового анализа выполнен расчет равновесных параметров винтового нанодвойника. Установлено, что двойникующие дислокации границ такого нанодвойника стремятся выстроиться в стенку. Такое равновесие нанодвойника не является устойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пестриков, В. М. Механика разрушения твердых тел / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. – СПб.: Профессия, 2002. – С. 320.
2. Астафьев, В. И. Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара: Издательство «Самарский университет», 2001. – С. 562.
3. Остриков, О. М. Механика двойникования твердых тел / О. М. Остриков // Монография. – Гомель: Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2008. – С. 301.
4. Остриков, О. М. Нанодвойникование монокристаллов висмута / О. М. Остриков // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2002. – № 3. – С. 51–52.
5. Рущиц, С. В. Нанодвойникование мартенситных кристаллов и теория адаптивных фаз / С. В. Рущиц, В. Л. Ильичев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Металлургия». – 2008. – Выпуск 11, № 24(124). – С. 44–46.
6. Остриков, О. М. Дислокационная модель нанодвойника / О. М. Остриков // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 5. – С. 124–129.
7. Ovid'ko, I. A. Effect of twin boundary migration on fracture toughness of nanotwinned metals / I. A. Ovid'ko, A. G. Sheinerman // Materials Physics and Mechanics. – 2014. – Vol. 21, № 21. – P. 248–258.
8. Финкель, В. М. Разрушение кристаллов при механическом двойниковании / В. М. Финкель, В. А. Федоров, А. П. Королев // Ростов-на-Дону, 1990. – С. 172.
9. Миркин, Л. И. Физические основы пластической деформации / Л. И. Миркин // М.: МГУ, 1968. – С. 538.

Поступила: 26.01.2021

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ В АНИЗОТРОПНЫХ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

¹Поленов В. С., ²Чигарев А. В.

¹ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Москва, Россия

²Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

Взаимопроникающее движение упругой компоненты и жидкости будем рассматривать как движение жидкости в деформируемой анизотропной пористой среде. Будем предполагать, что размеры пор малы по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики движения. Это позволяет считать, что обе среды сплошными и в каждой точке пространства будет два вектора смещения: $\vec{U}^{(1)}(\vec{r}, t)$ – вектор смещения упругой компоненты (скелета пористой среды) и $\vec{U}^{(2)}(\vec{r}, t)$ – вектор смещения жидкости $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

Акустическая эмиссия (АЭ) в двухкомпонентных анизотропных пористых средах возникает в результате быстрых структурных изменений в некоторых областях упругой компоненты (при пластическом сдвиге, двойникновании, изменении атомной структуры, появлении микротрещин и т. п.). Такие области в анизотропной пористой среде будем называть очагами эмиссии (ОЭ). Наличие очагов эмиссии (ОЭ) в сплошной упругой компоненте пористой среды порождает поле смещения элементов среды $\vec{U}^{(1)}(\vec{r}, t)$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, которое можно разделить на спонтанное $\vec{U}^{(1)(s)}$ и упругое $\vec{U}^{(1)(e)}$ [1–4].

$$\vec{U}^{(1)} = \vec{U}^{(1)(s)} + \vec{U}^{(1)(e)}, \quad (1)$$

где $\vec{U}^{(1)(s)}(\vec{r}, t)$ поле спонтанных перемещений, которое является характеристикой структурного превращения в ОЭ или поле дисторсий, записанное в виде

$$u_{ik}^{(1)(s)}(r, t) = \frac{\partial U_i^{(1)(s)}(r, t)}{\partial x_k}. \quad (2)$$

Из (1) $U_i^{(1)(e)} = U_i^{(1)} - U_i^{(1)(s)}$ и подставим в упругую дисторсию

$$u_{ik}^{(1)(e)} = \frac{\partial U_i^{(1)(e)}}{\partial x_k} = \frac{\partial (U_i^{(1)} - U_i^{(1)(s)})}{\partial x_k} = \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial x_k} - u_{ik}^{(1)(s)}. \quad (3)$$

По повторяющимся индексам здесь и в дальнейшем проводится суммирование от 1 до 3.

В случае пластической деформации тензор $u_{ik}^{(1)(s)}$ можно поставить в соответствие локальному значению тензора плотности дислокации $\rho_{ik}(\vec{r}, t)$, а изменение компонент $u_{ik}^{(1)(s)}$ во времени выразить через дислокационные потоки [4]. При решеточном или магнитном фазовом переходе можно установить связь спонтанной деформации $u_{ik}^{(1)(s)}$ с локальным значением характеризующего превращение параметра порядка $\eta(\vec{r}, t)$. Таким образом, физическое описание ОЭ сводится к заданию функционала

$$u_{ik}^{(1)(s)}(\vec{r}, t) = u_{ik}^{(1)(s)}[\rho(\vec{r}, t); \eta(\vec{r}, t)]. \quad (4)$$

Для анизотропной двухкомпонентной пористой среды тензор упругих перемещений и перемещений жидкости связан с тензором напряжений и упругой дисторсией обобщенным законом Гука [5, 6]:

– полный тензор напряжений в скелете при наличии жидкости в порах

$$T_{ij} = \Lambda_{ijkl} u_{kl}^{(1)(e)} + A_{ij} u_{rr}^{(2)} = \Lambda_{ijkl} \left(\frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial x_l} - u_{ki}^{(1)(s)} \right) + A_{ij} \frac{\partial U_r^{(2)}}{\partial x_r}; \quad (5)$$

– и силой, действующей на жидкость, отнесенной к единице площади поперечного сечения пористой среды

$$N = A_{ij} u_{ij}^{(1)(e)} + Q u_{rr}^{(2)} = A_{ij} \left(\frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial x_j} - u_{ij}^{(1)(s)} \right) + Q \frac{\partial U_r^{(2)}}{\partial x_r}. \quad (6)$$

Запишем уравнения движения пористой среды [7, 8]

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 U_i^{(2)}}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}; \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 U_i^{(2)}}{\partial t^2} &= \frac{\partial N}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (7)$$

Система (5)–(7) приводит к основным уравнениям задачи акустической эмиссии

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 U_i^{(2)}}{\partial t^2} - \Lambda_{ijkl} \left\{ \frac{\partial^2 U_l^{(1)}}{\partial x_k \partial x_j} \right\} - A_{ij} \frac{\partial^2 U_r^{(2)}}{\partial x_r \partial x_j} = -\Lambda_{ijkl} \left\{ \frac{\partial u_{kl}^{(1)(s)}}{\partial x_j} \right\}; \quad (8)$$

$$\rho_{12} \frac{\partial^2 U_i^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 U_i^{(2)}}{\partial t^2} - A_{ij} \left\{ \frac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial x_r \partial x_j} \right\} - Q \frac{\partial^2 U_r^{(2)}}{\partial x_i \partial x_r} = -A_{ij} \frac{\partial u_{kj}^{(1)(s)}}{\partial x_k}. \quad (9)$$

Решение (8) и (9) будем искать в виде монохроматической волны [9]

$$U_j^{(1)} = C_j^{(1)} \exp i(q_k x_k - i\omega t), \quad U_j^{(2)} = C_j^{(2)} \exp i(q_k x_k - \omega t), \quad (10)$$

где $C_j^{(1)}$, $C_j^{(2)}$ – амплитуды колебаний соответствующих компонент среды; q_k – координаты волнового вектора \vec{q} ; ω – частота.

Упругую дисторсию зададим следующим образом

$$u_{kj}^{(1)(s)} = u_{kj0}^{(1)(s)} \exp i(q_k x_k - \omega t). \quad (11)$$

Здесь $u_{kj0}^{(1)(s)}$ – значение тензора дисторсии при $t = 0$.

Подставим (10) и (11) в выражения (8) и (9), и учитывая, что дифференцирование по времени приводит к умножению на $-i\omega$, а дифференцирование по x_k приводит к умножению на $i q_k$, получим неоднородную систему уравнений относительно $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$:

$$\begin{aligned} (S_{ik} - \rho_{11} \omega^2 \delta_{ik}) C_k^{(1)} + (\beta_{ik} - \rho_{12} \omega^2 \delta_{ik}) C_k^{(2)} &= -\Lambda_{ijkl} u_{kj0}^{(1)(s)} i q_l; \\ (\beta_{ik} - \rho_{12} \omega^2 \delta_{ik}) C_k^{(1)} + (\gamma_{ik} - \rho_{22} \omega^2 \delta_{ik}) C_k^{(2)} &= -A_{ij} u_{kj0}^{(1)(s)} i q_l; \end{aligned} \quad (12)$$

$$S_{ik} = \Lambda_{ijkl} q_j q_l, \quad \beta_{ik} = A_{ij} q_k q_j, \quad \gamma_{ik} = Q q_i q_k.$$

где δ_{ik} – символ Кронекера.

Система (12) состоит из шести уравнений с неизвестными $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$ ($k = 1, 2, 3$).

Решения системы находим по формулам Крамера [10]

$$\begin{aligned} C_j^{(\alpha)} &= \frac{D_j^{(\alpha)}}{D} \quad (\alpha = 1, 2; j = \overline{1, 6}); \\ D &= \begin{vmatrix} S_{1k} - \rho_{11} \omega^2 \delta_{ik} & \beta_{1k} - \rho_{12} \omega^2 \delta_{ik} \\ \beta_{1k} - \rho_{12} \omega^2 \delta_{ik} & \gamma_{1k} - \rho_{22} \omega^2 \delta_{ik} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь D – определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$. $D_j^{(\alpha)}$ – определители, получающиеся из D заменой i -го столбца столбцом из свободных членов системы (12). В эти столбцы входит значение тензора дисторсии.

Для вычисления определителей D и D_j справедлива формула разложения данного определителя по элементам i -го столбца [10]

$$D = \sum_{i=1}^6 (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad (j = \overline{1,6}), \quad (14)$$

где i – номер столбца; j – номер строки; a_{ij} – элемент определителя, стоящий на пересечении i -ой строки и j -го столбца; M_{ij} – минор элемента a_{ij} матрицы шестого порядка.

Зная коэффициенты $C_j^{(\alpha)}$, вычисленные по формулам (13), можно по формулам (10) и (11) определить смещения компонент среды и упругую дисторсию АЭ.

В случае отсутствия ОЭ в пористой среде ($u_{kj0}^{(1(s))} = 0$), и полагая $\lambda_k^{(1)} = C_k^{(1)}$, $\lambda_k^{(2)} = C_k^{(2)}$, система (12) принимает вид

$$\begin{aligned} (S_{ik} - \rho_{11}\omega^2\delta_{ik})\lambda_k^{(1)} + (\beta_{ik} - \rho_{12}\omega^2\delta_{ik})\lambda_k^{(2)} &= 0; \\ (\beta_{ik} - \rho_{12}\omega^2\delta_{ik})\lambda_k^{(1)} + (\gamma_{ik} - \rho_{22}\omega^2\delta_{ik})\lambda_k^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Задача сводится к решению системы (15) для определения собственных векторов $\lambda_k^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2$) ($k=1,2,3$) и собственных значений тензоров $\Lambda_{ijkl}q_jq_l$, $A_{ij}q_kq_j$, Qq_iq_k .

Условие существования нетривиальных решений системы (15), однородной относительно $\lambda_k^{(1)}$ и $\lambda_k^{(2)}$ определяет в общем случае шесть скоростей и, следовательно, шесть типов акустических волн в насыщенной жидкостью анизотропной пористой среде, которые находятся из определителя шестого порядка, составленного из коэффициентов при неизвестных $\lambda_k^{(1)}$ и $\lambda_k^{(2)}$ системы (15)

$$D = \begin{vmatrix} S_{ik} - \rho_{11}\omega^2\delta_{ik} & \beta_{ik} - \rho_{12}\omega^2\delta_{ik} \\ \beta_{ik} - \rho_{12}\omega^2\delta_{ik} & \gamma_{ik} - \rho_{22}\omega^2\delta_{ik} \end{vmatrix} = 0, \quad (i=1,2,3; k=1,2,3). \quad (16)$$

При выполнении этого условия остаются линейно-независимыми только три первых уравнения системы (15). Они являются следствием трех уравнений второй системы (15). Тогда последние три уравнения можно отбросить. Выбирая в качестве свободных неизвестных величины $\lambda_k^{(2)}$ ($k=1, 2, 3$), а первую систему уравнений запишем в виде

$$(S_{ik} - \rho_{11}\omega^2\delta_{ik})\lambda_k^{(1)} = (\rho_{12}\omega^2\delta_{ik} - \beta_{ik})\lambda_k^{(2)}, \quad (k=1,2,3). \quad (17)$$

Запишем систему (17) в матричной форме

$$B\lambda^{(1)} = C\lambda^{(2)}, \quad (18)$$

$$B = (S_{ik} - \rho_{11}G^2\delta_{ik}), \quad C = (\rho_{12}G^2\delta_{ik} - \beta_{ik}), \quad \lambda^{(\alpha)} = (\lambda_k^{(\alpha)}), \quad \alpha=1,2.$$

Здесь B – матрица размера 3×3 , состоящая из коэффициентов при неизвестных $\lambda_k^{(1)}$, C – матрица размера 3×3 , состоящая из коэффициентов при свободных неизвестных $\lambda_k^{(2)}$; $\lambda^{(1)}$ – матрица-столбец неизвестных $\lambda_k^{(1)}$; $\lambda^{(2)}$ – матрица-столбец свободных неизвестных $\lambda_k^{(2)}$.

Для нахождения неизвестных $\lambda_k^{(1)}$ умножим слева обе части равенства (18) на обратную матрицу B^{-1} , получим

$$\lambda^{(1)} = B^{-1}C\lambda^{(2)}, \quad B^{-1} = \frac{1}{\Delta_1} B^*, \quad (19)$$

где $\Delta_1 = |S_{ik} - \rho_{11} G^2 \delta_{ik}| \neq 0$ – определитель матрицы B ; B^* – присоединенная матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы B^T , транспонированной к матрице B .

Запишем (19) в развернутом виде

$$(\lambda_k^{(1)}) = \frac{1}{\Delta_1} (B_{ji})(c_{ij})(\lambda_k^{(2)}), \quad (k = 1, 2, 3). \quad (20)$$

Здесь B_{ji} – алгебраические дополнения присоединенной матрицы B^* ; c_{ij} – элементы матрицы C .

Из соотношений (20) находим неизвестные величины $\lambda_k^{(1)}$, выраженные через свободные $\lambda_k^{(2)}$.

В случае отсутствия связи между фазами ($\rho_{12} = 0, A_{ij} = 0$), систему (15) перепишем в виде

$$(\Lambda_{ijkl} q_j q_l - \rho_{11} \omega^2 \delta_{ik}) \lambda_k^{(1)} = 0, \quad \Delta_1 = |\Lambda_{ijkl} q_j q_l - \rho_{11} \omega^2 \delta_{ik}| = 0; \quad (19)$$

$$(Q q_i q_k - \rho_{22} \omega^2 \delta_{ik}) \lambda_k^{(2)} = 0, \quad \Delta_2 = |Q q_i q_k - \rho_{22} \omega^2 \delta_{ik}| = 0. \quad (20)$$

Выводы. Из системы (19) следует, что амплитуда $\lambda_k^{(1)}$ первой фазы, удовлетворяющая уравнению (19), является главным вектором, а $\rho_{11} c_1^2, \rho_{11} c_2^2, \rho_{11} c_3^2$ – определяют при заданном q_i действительные главные значения симметричного тензора второго ранга $\Lambda_{ijkl} q_j q_l$, а из системы (20) следует, что амплитуда $\lambda_k^{(2)}$ второй фазы, удовлетворяющая уравнению (20), является главным вектором, а $\rho_{22} c_i^2$ ($i = 1, 2, 3$) при заданном q_i определяют поперечные акустические волны распространяющиеся со скоростью $c_t = \sqrt{Q / \rho_{22}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко, В. С. Элементарные дислокационные механизмы акустической эмиссии / В. С. Бойко, В. Д. Нацик // Элементарные процессы пластической деформации металлов. – Киев. 1978. – С. 159–189.
2. Нацик, В. Д. Теория элементарных механизмов акустической эмиссии / В. Д. Нацик, К. А. Чишко // Акустическая эмиссия материалов и конструкций. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета. – 1989. – С. 10–18.
3. Нацик, В. Д. Звуковое излучение дислокаций, движущихся у поверхности кристалла / В. Д. Нацик, К. А. Чишко // ФТТ. – 1978. – Т. 20. Вып. 2. – С. 457–465.
4. Косевич, А. М. Дислокации в теории упругости / А. М. Косевич // Киев. – 1978. – С. 220.
5. Biot, M. A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid / M. A. Biot // Journal of Applied Phisic. – 1955. – Vol. 26. № 2. – P. 182–185.
6. Biot, M. A. Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media / M. A. Biot // Journal of Applied Phisic. – 1962. – Vol. 33. № 4. – P. 1483–1498
7. Био, М. А. Механика деформирования и акустическое распространение в пористых средах / М. А. Био // Журнал «Прикладная физика». – Т. 33. № 4. – 1962. – С. 1483–1498.
8. Поленов, В. С. Распространение волн в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде / В. С. Поленов, А. В. Чигарев // ПММ. – 2010. – Т. 74. Вып. 2. – С. 276–284.

9. Поленов, В. С. Распространение упругих волн в насыщенной вязкой жидкостью пористой среде / В. С. Поленов // ПММ. – 2014. – Т. 78. Вып. 4. – С. 501–507.
10. Ландау, Л. Д. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц // М.: Наука, 1965. – С. 202.
11. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк // М.: Мир, 1984. – С. 204.

Поступила: 26.01.2021

ПРИБЛИЖЕННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ФРОНТА ЖИДКОГО СЛОЯ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

Абрамович А. Е., Авдейчик Е. В., Конон П. Н.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Существуют технологические процессы, использующие движение слоя жидкости на вращающейся поверхности диска. Во многих случаях эти процессы основаны на явлениях неустойчивости свободной поверхности слоя жидкости. Например, производство минеральных и металлических волокон из высокотемпературных расплавов при центробежном способе состоит в переработке расплава в волокно вращающимися дисками либо цилиндрами [2]. В других технологических процессах требуются минимальные возмущения поверхности слоя жидкости. Это достигается при определенных умеренных угловых скоростях вращения диска. Подобного рода течения встречаются при нанесении покрытий и смазок на горизонтальные поверхности вращением. Ряд экспериментов показывает, что при медленном вращении в некоторых случаях движение диска и слоя можно рассматривать как единое целое [3]. Исследованию форм равновесия капли на диске посвящены работы [8–11]. Некоторые вопросы движения слоя и его устойчивости на вращающемся диске рассмотрены в работах [4–7].

Постановка задачи и вывод уравнений движения. Исследуется движения жидкой капли на горизонтальном вращающемся диске. В полной постановке рассматриваемая задача сложна и относится к течениям с неизвестной границей области. Образуется такой тип пленочного течения, когда жидкость стекает в виде множества струек. Фотографии проведенных экспериментов [3] показаны на рис. 1. Такое течение принято называть ручейковым или ривулетным течением, а отдельную струйку, ограниченную двумя контактными линиями – ривулетом [1].

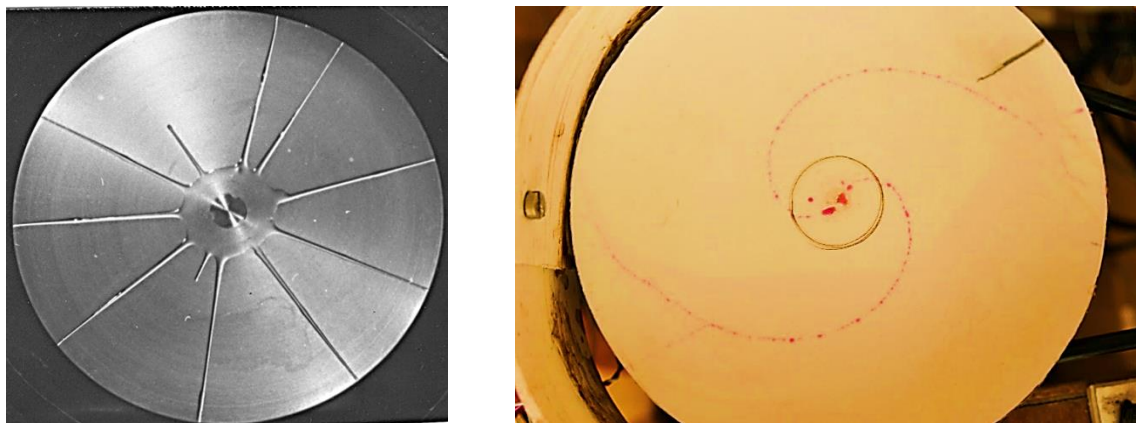


Рис. 1. Ривулетное течение слоев глицерина (слева) и воды (справа) на вращающемся диске

Построим приближенную модель движения капли. Будем исследовать движения капли с вязким трением как материальной частицы постоянной массы m по поверхности вращающегося с угловой скоростью ω горизонтального диска. Примем, что в дальнейшем термины материальная точка, частица, капля, фронт слоя, струйки, ривулеты являются заменимыми в употреблении.

В плоскости ее движения введем абсолютную полярную систему координат (r, φ) и относительную полярную систему координат (r_0, φ_0) , вращающуюся вместе с диском

и совпадающую с системой (r, φ) в начальный момент времени. Пусть движение капли в абсолютной системе координат описывается законом

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad (1)$$

где t — время, а в относительной системе координат —

$$r_0 = r_0(t), \quad \varphi_0 = \varphi_0(t). \quad (2)$$

Законы движения (1) и (2) в данных системах связаны соотношениями

$$r_0(t) = r(t), \quad \varphi_0(t) = \varphi(t) - \omega t. \quad (3)$$

В абсолютной системе координат на каплю, кроме силы тяжести, направленной вертикально вниз, действует только одна сила — сила вязкого трения \bar{F} о поверхность вращающегося горизонтального основания. Введем следующие предположения относительно этой силы:

1) сила трения $\bar{F}(t)$ в каждый момент времени t направлена противоположно вектору относительной скорости $\bar{v}(t)$ капли в этот момент времени, где

$$\bar{v}(t) = \dot{r}(t)\bar{e}_r + r(t)(\dot{\varphi}(t) - \omega)\bar{e}_\varphi, \quad (4)$$

где $\bar{e}_r, \bar{e}_\varphi$ — орты системы (r, φ) ;

2) сила трения \bar{F} в каждый момент времени зависит только от скорости \bar{v} в данный момент времени, $\bar{F} = \bar{F}(\bar{v})$;

3) при небольших значениях величины v относительной скорости зависимость модуля F силы трения от v близка к прямой пропорциональности, т. е.

$$F = k_1 v, \quad [k_1] = \text{кг/с}; \quad (5)$$

4) при больших значениях величины v относительной скорости зависимость модуля F силы трения от v^2 близка к прямой пропорциональности, т. е.

$$F = k_2 v^2, \quad [k_2] = \text{кг/м}. \quad (6)$$

Точка вверху, как обычно, обозначает производную по времени. Вектор абсолютного ускорения $\bar{w}(t)$ определяется по формуле [12]

$$\bar{w} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\bar{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\bar{e}_\varphi. \quad (7)$$

Таким образом, уравнения движения в неподвижной системе координат принимают вид

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= -\dot{r} \frac{F(v)}{v}, \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= r(\omega - \dot{\varphi}) \frac{F(v)}{v}. \end{aligned} \quad (8)$$

В системе (8) величина скорости определяется формулой

$$v = \sqrt{r^2(\omega - \dot{\varphi})^2 + \dot{r}^2}. \quad (9)$$

Начальные условия для системы (8) имеют вид

$$r(0) = r_{10} > 0, \quad \varphi(0) = \varphi_{10}, \quad \dot{r}(0) = r_{11}, \quad \dot{\varphi}(0) = \varphi_{11}. \quad (10)$$

С помощью замены

$$a = \frac{\dot{r}}{r}, \quad b = \dot{\varphi}. \quad (11)$$

можно понизить порядок дифференциальных уравнений (8):

$$\dot{a} + a^2 - b^2 = -a \frac{F(v)}{mv}, \quad (12)$$

$$\dot{b} + 2ba = (\omega - b) \frac{F(v)}{mv}.$$

Начальные условия для системы (11), (12) имеют вид

$$r(0) = r_{10} > 0, \quad \varphi(0) = \varphi_{10}, \quad a(0) = \frac{r_{11}}{r_{10}} = a_{10}, \quad b(0) = \varphi_{11}. \quad (13)$$

Модуль относительной скорости находится по формуле

$$v = r \sqrt{(\omega - b)^2 + a^2}. \quad (14)$$

Рассмотрим случай медленного и умеренного движения, когда выполняется соотношение (5). Для практических расчетов важно знать величину коэффициента трения k_1 . Его можно определить экспериментально. Предлагается также новый теоретический способ определения. Величину силы трения свяжем с коэффициентом кинематической вязкости жидкости, используя следующие соображения. Выделим из фронта движущейся вытянутой капли элемент приблизительно в виде прямоугольного параллелепипеда высоты h , длины l и ширины d , центр масс которого движется со скоростью v .

Скорость частиц жидкости рассматриваемого элемента на твердой поверхности в подвижной системе координат равна 0, а на верхнем слое высотой h равна v_{\max} . По гидромеханическому закону Ньютона, чтобы обеспечить такое движение, к верхнему слою необходимо приложить касательное напряжение τ , равное [11]

$$\tau = \nu \rho \frac{v_{\max}}{h}, \quad v = \frac{v_{\max}}{2}. \quad (15)$$

Здесь ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, ρ – ее плотность. Тогда величина сила трения единицы массы равна

$$\frac{F(v)}{m} = \frac{\tau dl}{\rho dlh} = \frac{2\nu}{h^2} v. \quad (16)$$

С учетом (16) система уравнений движения с начальными условиями (13) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= b^2 - a^2 - a \frac{2\nu}{h^2}, \\ \dot{b} &= (\omega - b) \frac{2\nu}{h^2} - 2ba, \\ \dot{r} &= ar, \quad \dot{\varphi} = b. \end{aligned} \quad (17)$$

Если форма движущегося слоя близка к сфере с радиусом R , то можно принять высоту слоя $h = 2R$. В уравнение (17) при определении силы вязкого трения входит толщина движущегося слоя h . Из уравнений следует, чем толще слой, тем меньшее ускорение он получает, что логически верно.

Анализ уравнений движения. Система (17) имеет нелинейный вид и вместе с граничными условиями (13) определяет задачу Коши. Исследуем ее решения численным методом. Расчеты проведены для движения фронта слоев глицерина и воды, имеющих существенно различные вязкости. При температуре 20°C кинематическая вязкость глицерина принята равной $\nu = 680 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, вязкость воды – $\nu = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Расчеты проведены при различных угловых скоростях ω . Высота слоя h принималась равной

0,002 м или 0,005 м. При интегрировании системы (17) необходимо задать начальное отклонение $r_{10} \neq 0$. Все другие начальные значения в (13) равны нулю. В результате решения определялись законы движения фронта слоя в абсолютной $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ и относительной $r_0 = r_0(t)$, $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ системах координат, а также траектории движения в этих двух системах координат.

На рис. 2, а, б представлены траектории жидких фронтов слоев глицерина и воды в относительной системе координат при угловой скорости вращения диска $\omega = \pi$ рад/с. Видно, что движение частиц воды и глицерина проходит по существенно различным траекториям. Вследствие значительно меньшего трения о поверхность диска и существенного влияния силы Кориолиса в относительном движении траектории фронтов струек воды имеют вид хорошо закрученных спиралей. Относительные траектории фронта струек глицерина близки к прямолинейным.

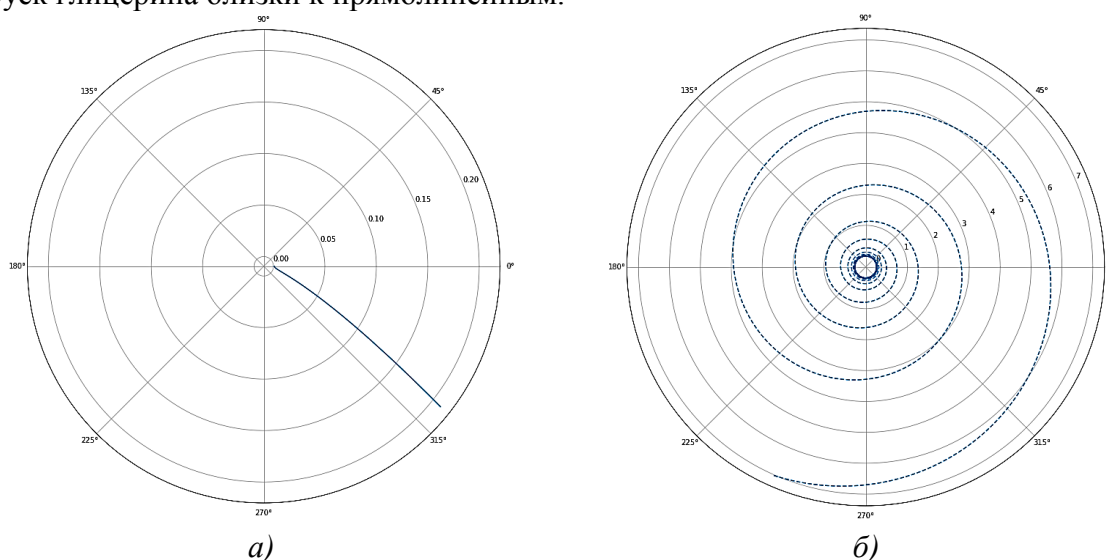


Рис. 2. Траектория фронтов капель а) глицерина и б) воды в относительной системе координат при угловой скорости $\omega = \pi$ рад/с

На рис. 3 даны траектории жидких фронтов слоев воды в относительной системе координат при различных угловых скоростях вращения. С ростом угловой скорости траектории быстрее «раскручиваются» по спиральям больших радиусов и за одинаковое время фронт струйки воды проходит большее расстояние, чем глицерина. Качественно траектории согласуются с проведенными экспериментами [3].

Движение струи по радиусу в ряде экспериментов [3] объясняется довольно малым влиянием этой силы Кориолиса по сравнению с силой инерции. Свяжем подвижную радиальную ось, вращающуюся жестко с диском, с центром диска и предполагаемым направлением движения материальной частицы по радиусу. Без учета силы Кориолиса движение будет прямолинейным и определяться уравнением относительного движения

$$\ddot{r}_0 + \frac{2v}{h^2} \dot{r}_0 - \omega^2 r_0 = 0. \quad (18)$$

Условия при $t = 0$ определяют начальное положение точки и нулевую начальную скорость

$$r_0(0) = r_{00}, v_0 = \dot{r}_0(0) = 0. \quad (19)$$

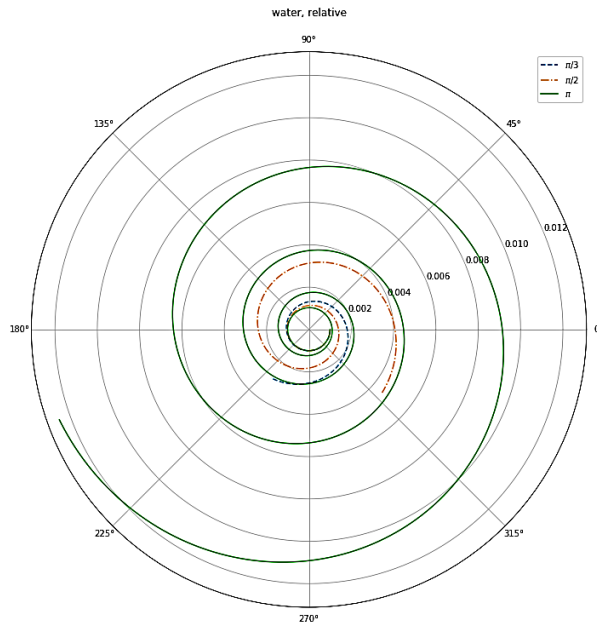


Рис. 3. Траектории фронта слоев воды в относительной системе координат при различных угловых скоростях $\omega = \pi / 3$ рад/с, $\omega = \pi / 2$ рад/с, $\omega = \pi$ рад/с

Решая (18), (19), определяем закон движения жидкой капли аналитической формулой

$$r_0(t) = \frac{r_{00}}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}), \quad (20)$$

$$\lambda_1 = -\frac{v}{h^2} + \frac{1}{h^2} \sqrt{v^2 + h^4 \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{v}{h^2} - \frac{1}{h^2} \sqrt{v^2 + h^4 \omega^2}.$$

На рис. 4 изображен закон относительного движения $r_0(t)$ фронта каплей глицерина при $r_{00} = 0,01$ м, $h = 0,002$ м, $v = 680 \cdot 10^{-6}$ м²/с и разных значениях угловой скорости $\omega_1 = 2\pi$ рад/с, $\omega_2 = \pi$ рад/с, $\omega_3 = \pi / 2$ рад/с.

Время T достижения капли границы диска R_0 можно точно рассчитать, решая трансцендентное уравнение

$$\frac{r_{00}}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 T} - \lambda_1 e^{\lambda_2 T}) = R_0. \quad (21)$$

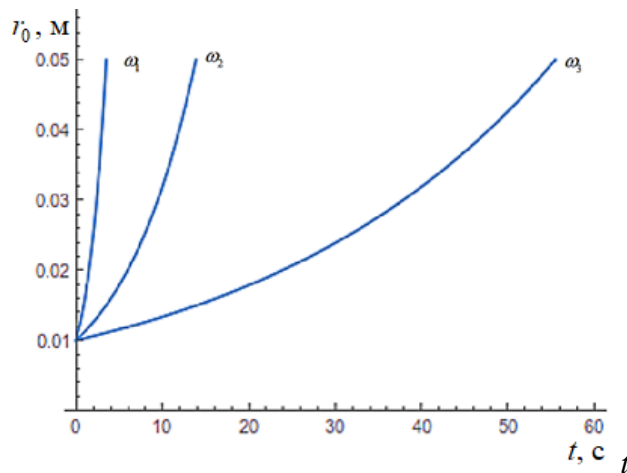


Рис. 4. Закон относительного движения $r_0(t)$ фронта каплей глицерина при различных угловых скоростях вращения диска

Для сильновязких жидкостей, например, для глицерина, $e^{\lambda_2 t} \ll 1$ почти все время движения. Тогда из последнего уравнения можно получить

$$T = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{R_0}{r_{00}}. \quad (22)$$

Из соотношения (20) определяем скорость капли при движении с трением

$$v_0(t) = \dot{r}_0(t) = \frac{\omega^2 h^4}{\sqrt{v^2 + \omega^2 h^4}} \cdot r_{00} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (23)$$

Видно, что для сильновязких жидкостей скорость очень мала по абсолютной величине, но растет со временем и с удалением от оси вращения.

Оценим влияние действия силы Кориолиса на движение капли. Найдем отношение величины силы Кориолиса F_c к силе инерции F_i , предполагая изначально, что относительное движение близко к прямолинейному

$$\frac{F_c}{F_i} = \frac{2m\omega v(t)}{m\omega^2 r_0(t)} = \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\omega} \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}. \quad (24)$$

Для жидкостей с большой вязкостью $e^{\lambda_2 t} \ll 1$, если $t > t_0$, где t_0 – достаточно малое время. Тогда формула (24) преобразуется к виду

$$\frac{F_c}{F_i} = \frac{2\lambda_1}{\omega}. \quad (25)$$

Вычисления для движения капли глицерина толщиной $h = 0,002$ м на диске, вращающемся с угловой скоростью $\omega = 2\pi$ рад/с позволяют получить величины $\lambda_1 = 0,116$ с⁻¹, $\lambda_2 = -320,12$ с⁻¹. Тогда отношение сил равно $F_c/F_i = 0,037$, т. е. сила Кориолиса составляет менее 4 % от силы инерции, что объясняет почти прямолинейную возможность движения капли по радиусу диска для сильновязких жидкостей. С ростом угловой скорости вращения влияние силы Кориолиса увеличивается.

Выводы. В результате исследований построена приближенная модель движения фронта жидкого слоя на вращающемся диске, выведены уравнения движения капли как материальной точки с вязким трением. Предложен метод, позволяющий связать закон сопротивления капли при движении с коэффициентом кинематической вязкости жидкости. Проведено численное решение уравнений движения как задачи Коши, найдены абсолютные и относительные законы движения и траектории фронтов жидких слоев для различных жидкостей при разных угловых скоростях. Показано, что в случае ривулетного движения сильновязких жидкостей, как глицерин, при умеренных угловых скоростях относительные траектории близки к прямым линиям, а для жидкостей с небольшой вязкостью, как вода, они имеют вид хорошо развитых спиралей. Проведена оценка влияния силы Кориолиса на движение, для сильновязких жидкостей получено аналитическое решение уравнений движения, удобное для инженерных расчетов. Качественное сравнение результатов с экспериментами подтверждает возможность проведенного приближенного моделирования. Результаты работы могут быть использованы для оценки параметров ручейковых течений на вращающемся диске, использующихся для смазок горизонтальных поверхностей, нанесении покрытий вращением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Актершев, С. П. Волновое течение вертикального ривулета / С. П. Актершев, С. В. Алексеенко // Письма в ЖТФ. – 2015. – Том 41, вып. 1.

2. Yepikhin, V. Perturbed motion of a viscous fluid layer on the surface of a rotation cylinder / V. Yepikhin, P. Konon, V. Shkadov // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 1994. – № 66(6). – P. 615–621.
3. Конон, П. Н. Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске / П. Н. Конон [и др.] // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». – Минск. – Вып. 31. – 2016. – С. 87–94.
4. Сисоев, Г. М. Течение пленки вязкой жидкости по поверхности вращающегося диска / Г. М. Сисоев, А. Ф. Тальдик, В. Я. Шкадов // ИФЖ. – 1986. – Т. 51, № 4. – С. 571–575.
5. Raucher, J. W. An asymptotic solution for laminar flow of a thin film on rotating disk / J. W. Raucher, R. E. Kelly, J. D. Cole // Journ. Of Appl. Mtch. – 1973. – Vol. 40, No. 1. – P. 45–51.
6. Шилаев, М. И. Асимптотический профиль свободной поверхности пленки на вращающемся диске / М. И. Шилаев, В. Э. Борзых, А. В. Толстых // Теплофизика и аэромеханика. – 1995. – Т. 2, № 4. – С. 361–366.
7. Королинская, С. И. Об изменении сферической формы капли вязкого вещества под действием переменной силы с учетом поверхностного натяжения / С. И. Королинская // МЖГ. – 1967. – № 3 – С. 56–60.
8. Конон, П. Н. Равновесные формы капли жидкости на вращающемся диске / П. Н. Конон, Е. И. Могилевский, Г. Н. Сицко, В. Я. Шкадов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. Изд-во Моск. Университета (М.). – 2020. – № 4. – С. 43–50.
9. Audzeichyk, E. V. Analytical and numerical research of the forms of equilibrium of a liquid limited volume on a rotating horizontal base / E. V. Audzeichyk, P. N. Konon, E. I. Mogilevskiy // Механика машин, механизмов и материалов. – Минск. – 2020. – № 2(51). – С. 91–96.
10. Audzeichyk, Y. V. Analytical and numerical investigation of the equilibrium of a limited volume of liquid on a rotating horizontal base / Y. V. Audzeichyk, P. N. Konon // VII All-russian conference with foreign participants – Free boundary problems: theory, experiment and applications. – Krasnoyarsk. – July 1–4, 2020. – P. 38–39.
11. Шкадов, В. Я. Течения вязкой жидкости / В. Я. Шкадов, З. Д. Запрянов // Издательство: М.: Изд-во МГУ. – С. 200.
12. Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики. Часть 1. / Н. Н. Бухгольц // М.: Наука. – 1965. – С. 468.

Поступила: 01.02.2021

FEA-AUDIT AND LOCAL REDESIGN OF PRACTICE-PROVED LABORATORY CENTRIFUGE MACHINE

¹Dounar S., ¹Iakimovitch A., ¹Shirvel P., ²Jakubowski A., ²Chybowski L.,
³Tanishq J. M., ¹Penkina A.

¹Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

²Maritime University of Szczecin, Szczecin, Poland

³AcculightUSA, Elk Grove Village, U.S.A

Centrifuge is a good knew type of machines for liquid separation [1]. Given work touches the compact, high-speed biological centrifugal machine, designed before FEA [2] epoch, but permanently produced and exploited till now. So some kind of FEA-audit of old, intuitive design is provided here. FEA-simulation was based on the experience gained at rotating technological machines [3–5].

Proportions of centrifuge *load-bearing system* (LBS) are optimized and proved by long-term practice (more than 20 years of production, first examples are still in service). The system was designed a long time ago, but collapses and partial cracking are not reported for all centrifuges.

Centrifuge refers to the reliable swing-bucket type of rotor [6]. It works in the quasi-static mode with long time loading by constant centrifugal forces caused by stable rotation at the speed $N_c = 4000 \text{ min}^{-1}$. Quantity of loading cycles (due to speeding up and running out) is not large for all service life. So static strength and, possibly, ratcheting [7] (accumulation of plastic deformation in the stress concentrators during low-cycle fatigue) are the main issues.

Technological limitations exert minimal influence on the design. All structural parts for years are machined at the 5-axis CNC machine tools. Only high-grade materials in the monolithic form are used for structural parts machining. Shakedown procedure during very first rotation is accomplished for all centrifuges. Solid weight is used instead of envelope with the liquid to process. It caused 15 % increasing of centrifugal forces. All centrifuges steady survives shakedown with no faults.

Shakedown of any LBS make sense while local plastic deformations are expected in the stress concentrators [8]. It creates residual stresses preventing further plastic deformation at the next load cycles. Such reinforcing effect is known as autofrettage [9]. In case of excessive cycle loading places of autofrettage became the ratcheting spots. It leads to low-cycle fatigue fracture.

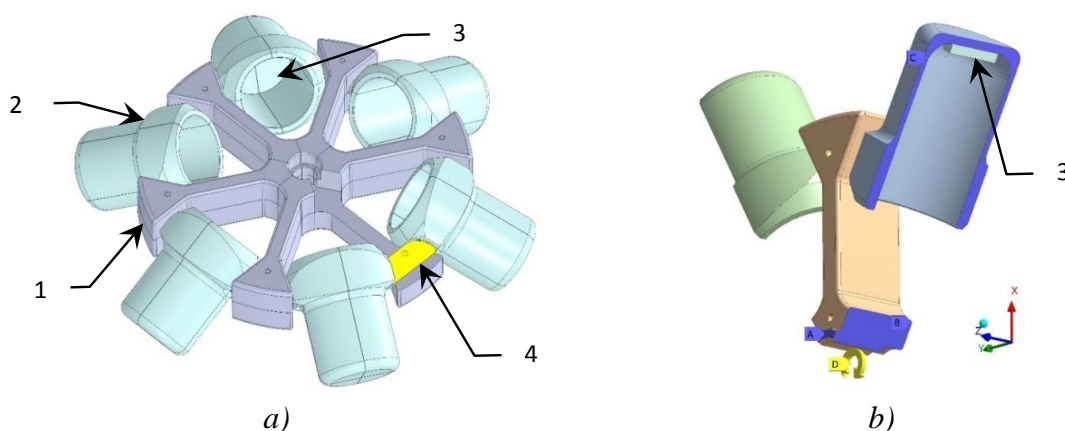


Fig. 1. Rotated load-bearing system (LBS) of the centrifuge (a) and symmetrical 1/6-part of the model (b): 1 – rotor; 2 – bucket; 3 – weight; 4 – pin. A, B, C – slick unmovable rests; D – angular velocity applying

Some specific terms are proposed in that work here below:

Critical point of surviving (CPS) – severe stress concentrator possesses features: a) almost inevitable in the design sense; b) haven't got a reservation if cracked; c) shortage of effective parameters to control the level of stress in it. CPS are tied to different inner corners and fillets.

Fillet radius management (FRM) – need to vary fillet radius for CPS smoothing, causing no indirect damages and harmful consequences for nearby design.

Contact spot control (CSC) – design approach aiming to reduce nominal contact interface to dimensions of expected virtual contact spot. It gives room for e. g. CPS smoothing.

Fig. 1, a gives an outer view of the centrifuge's load-bearing system (LBS). Fig. 1, b depicts 1/6 portion of the full symmetrical model. The section view on the rotating structural parts is given in fig. 2. The set of parts consists of the aluminum rotor 1 (outer diameter $\varnothing 205$ mm; six spokes 1S protruded radially from the hub 1H) and six aluminum buckets 2 (height 162 mm), containing processed liquids in the flexible envelopes (not showed). In that work envelopes are replaced by weights 3, secured to the bucket bottoms. There is lug 1L at the end of each spoke. Lug holds pin 4.

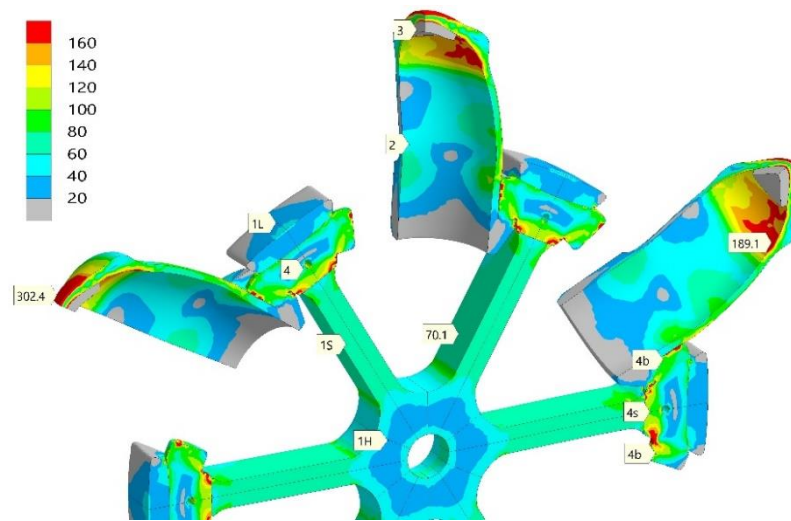


Fig. 2. Section view of the symmetrical $\frac{1}{2}$ -part of the model with the distribution of the equivalent stresses σ_e (MPa), caused by angular velocity $\omega = 420$ rad/s. Only quarters of buckets 2 and weights 3 are shown. Marks 1L, 1S, 1H relate to the rotor 1; marks 4b, 4s – to the pin 4. EL, BC

Two neighboring pins 4 hold the bucket 2 between spokes with the possibility of local rocking. Every pin possesses three cylindrical steps. The central step of $\varnothing 32$ mm (call it – stem – 4S) is inserted into spoke lug (1L) and fixed. End steps (bosses – 4B; $\varnothing 30$ mm) stay in frictional contact with buckets 2. Axes of the bosses inclined at 30 degrees to the axis of the stem in the rotational plane (fig. 3).

That work conservatively describes just shakedown procedure, where instead of envelope the weights 3 of the same mass (0.9 kg) is simulated.

FE model building was provided focusing on the surface layers precise meshing. The critical region of centrifugal LBS is the pin with mating them rotor lug and bucket slot (fig., 3 a, b). Axes of the pin stem St and pin boss B are inclined to each other at 30° . So special shoulder Sh is necessary. Shoulder conjugates with boss by fillet F. Current (existing) fillet radius is stated by drafts as $r_f \leq 1$ mm. That design will be referenced below as *Des1*.

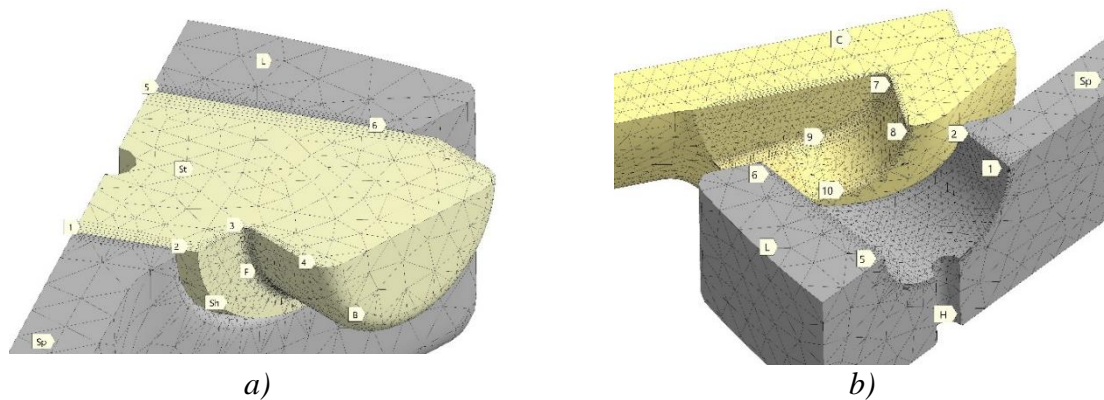


Fig. 3. Geometry and mesh for pin and mating parts: bucket slot C showed only (b); pin (stem St plus boss B is visible (a)

Contact surface 1-2-6-5 is shown as the lug L hole in fig.3, b. Small hole H is aimed at the pin fixation. There is slot in the bucket L (fig. 3, b). It's surface 7-8-9-10 mates with the pin boss. Both parts are pressed to each other by centrifugal forces. Bucket slot is paved by 5 thin FE layers. Lug and rotor spoke Sp is simulated by the common mesh with relatively rare meshing of inner volumes.

Pin is made from hardened stainless steel 14X17H2 (GOST analog of AISI 431; yield stress $\sigma_y = 810$ MPa). Rotor and buckets are from the aluminum alloy B95 (yield stress 420 MPa).

Allowable stresses may be taken from respectable German standard DIN 15018, dealing with technological machine strength. Static (and quasi-static) loading needs working stresses σ_{th} to be lower than yield stress σ_y according to formula $\sigma_{th} \leq \sigma_y/1.5$. It touches spacy stresses (frequently called *nominal stresses*). Appropriated level of local stresses into concentrators is not too evident.

The task is treated as fully static. Only centrifugal forces are applied by rotational velocity $\omega = 420$ s⁻¹. Speeding-up nor run-out is simulated. The geometrical model is taken as fully symmetrical. Only 1/24 – part of the model is sufficient to represent a situation. Constraint conditions are represented only by slippy rests due to only symmetrical parts of model were modelled.

The simulation was provided for a bunch of models and variants. Survey (introducing) variants are fully linear, elastic (EL), with one-step loading. All contact pairs in that cases were switched to the bonded status (BC). Final simulations included an accounting of geometry non-linearities (always), plastic deformation (mark it PL), and frictional contact effects (FC). A standard small-step loading procedure was provided. Technic of “weak springs” is used to insure convergence of iteration procedure at very beginning of loading.

All frictional contact pairs were initially adjusted to touch, without inner gaps or pre-stress. Friction coefficient $\mu = 0.2$ was appointed for all pairs. Contact sliding was tracked during loading. Sliding distance was not exceed several dozen of micrometers. Contact spot changes were noticed.

Contact force reaches 43.3 kN at the every pin boss. It is causes by centrifugal forces applied to the weight (0.9 kg) and to the bucket (1.24 kg). Contact forces evoke radial tension inside every rotor spoke. However rotor strength is quite sufficient in general. Fig. 2 shows according picture of the equivalent stress σ_e for the linear model with bonded contact pairs.

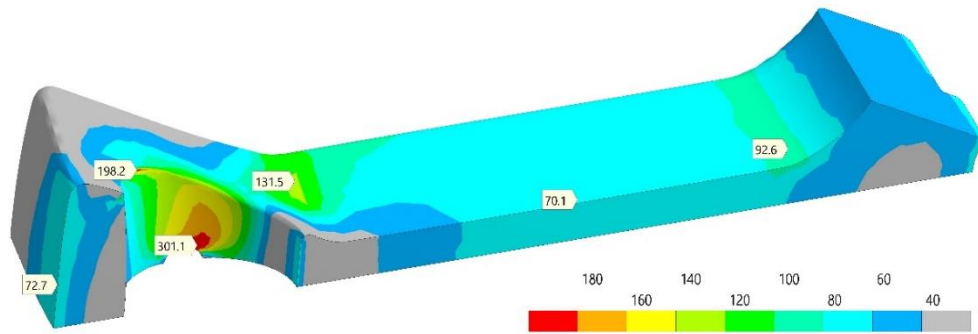


Fig. 4. Distribution of the equivalent stresses σ_e (MPa) in the rotor spoke with adjacent lug (at the left) and hub (at the right) (one-quarter model; FC, EL). Angular velocity $\omega = 420 \text{ rad/s}; \times 50$

All stresses are relatively low in the rotor. Every spoke (1S) undergoes moderate, near-uniform tension (mark 70.1 MPa). It is much lower, than assigned yield stress of the aluminum alloy (420 MPa). Stress concentrators in the centrifuge LBS are all tied to pins and to bottoms of buckets.

Fig. 4 depicts the distribution of σ_e in the rotor itself for simulation with friction contacts (FC). The situation is caused at whole by radial tension. Only slight stress concentration is revealed on the spoke-hub junction (92.6 MPa instead 70.1 MPa in the middle of spoke). Transient rounding between spoke and lug is stressed a little bit more – 131.5 MPa (concentration in 1.87 times). Attention should be paid to the edge of the pin-hole (198.2 MPa). However, really dangerous place is a small auxiliary hole (for pin fastening), where σ_e reaches 301.1 MPa. Such stress level is hardly approvable in comparison with yield stress $\sigma_y^{al} = 420 \text{ MPa}$.

Centrifuge stresses accumulate mostly in the pin regions. Let's name (fig. 5, a) contact pair "pin – bucket" as interface **CI-1** (mark 463.5), and contact pair "pin – rotor spoke" as **CI-2** (marks 214.2 – 16.6 – 0). Contact interface **CI-2** is partially opened (mark 0) from the side of the centrifuge axis. Contact pressure concentrates on the edge of pin hole (mark 214.2). Pressure is just low in the middle of the spoke lug (mark 16.6 at the fig. 5, a and mark 2 at the fig 5, b).

Contact interface **CI-1** is more stressful. Its feature is linear virtual contact (through mark 463.5 at the fig. 5, a). That line corresponds to the edge 1 (fig. 5, a) on the pin boss.

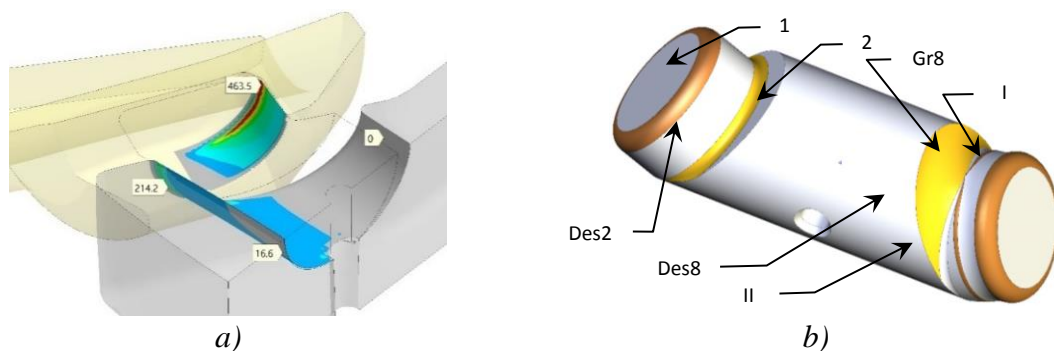


Fig. 5. Compressing stresses (a) in the contacts "pin (shown separately on b) – bucket slot" (up to 463.5 MPa) and "pin stem – spoke lug" (up to 214.2 MPa). EL, FC

Linear-like contact **CI-1** reflects by narrow strips on the pictures of bucket stress state (fig. 6). Tension stress concentrator (mark 215.27) is visible (fig. 6, a) in the bucket slot on the σ_1 distribution. Strip of high compression (mark 332.65 on the fig. 6, b) is depicted on the σ_3 picture. The last strip precisely coincides with linear **CI-1** contact. Tension strip is place of centrifugal force collecting.

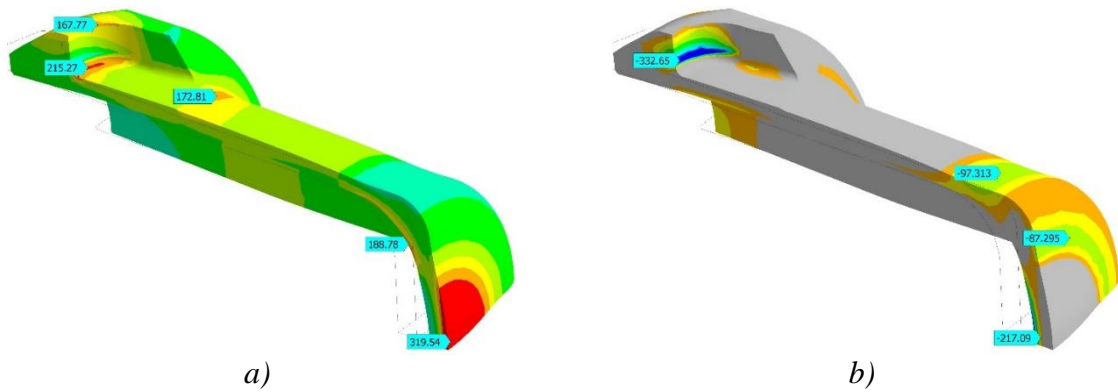


Fig. 6. Stress state in the bucket (1/4 part) during rotation with angular velocity = 420 rad/s : *a* – distribution of maximal principal stress σ_1 ; *b* – picture of the minimal stress σ_3 . EL, FC, MPa, $\times 20$

Fig. 6 pointed out overstress of the bucket bottom. There are two regions of strong bending – at the center of the bottom (marks 319.54 – –217.09) and on the transition “bottom – shell” (marks 188.78 – –87.295). Surface plastic deformations are near to start at the bottom center.

The strongest stress concentration is revealed on the pin fillet F (fig. 3). Elastic solution for frictional contacts (fig. 7, *a*) shows equivalent stress (mark 1222) exceeding one and half times yield stress. Two-axial tension governs on the fillet surface ($\sigma_1 = 1351$ MPa, $\sigma_2 = 343$ MPa, $\sigma_3 = 0$).

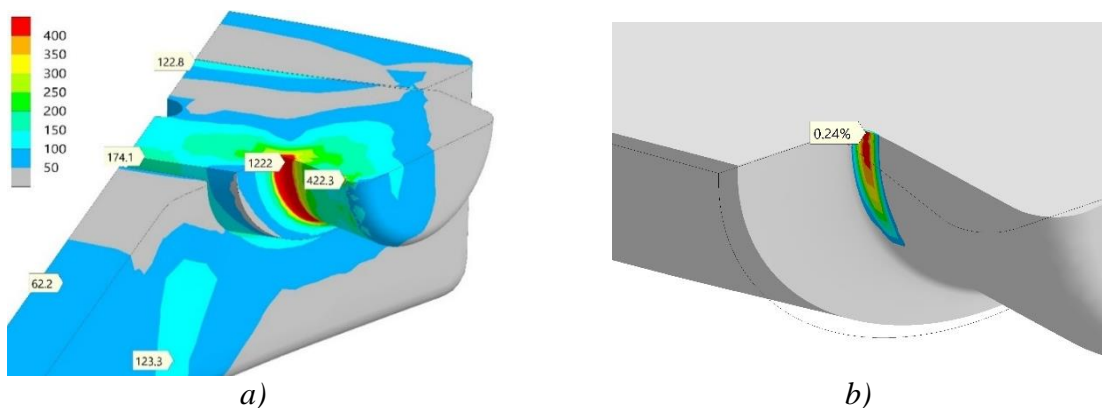


Fig. 7. Distribution of the equivalent stresses σ_e (MPa) in the pin ($r_f \leq 1$ mm) and rotor lug (*a* – EL, FC) and plastic deformation focus on the pin fillet surface (*b* – PL, FC). $\omega = 420$ rad/s; $\times 50$

Elastic-plastic solution (fig. 7, *b*) reveals significant plastic deformation on the fillet (mark 0.25 %). It is unsafe situation due to preliminary steel hardening. Local plastic overloading of the hardened pin may leads to the brittle fracture.

Fillet F should be taken as a specific object – critical points of surviving – CPS. One could see strong imminent stress concentration, on the one hand. On the other hand, long service life of centrifugal machine gives evidence of material surviving into fillet region. It is possible, qualitative steel possesses durability resources even in the hardened state. Feasible issue may be autofrettage effect, when overloading causes plastic deformation and residual stresses. That stresses could envelope CPS and compensate partially working stresses. Plastic deformation of the hardened pin fillet points out at the uninvestigated marginal field of the steel strength. Looks like hardened steel is able to withstand some local plastic flow in the repeatable manner. Though condition and safety frames of such surviving are really unclear.

Discussion about optimization. Pin fillet CPS needs to be smoothed out. Full CPS excluding is hardly possible. It is caused by logic of the console beam (pin boss) loading. Hardness and ductility should be brought to the problem area at the same time [10]. Obviously, pin should be accomplished from functional gradient material (FGM) [11]. High hardness of surface layers would be sufficient to confine fillet region in the fully elastic conditions. However, FGM approach needs time, sustained pin production and cost. Nearby solutions are shot peening [12] and laser treatment [13] in the synergetic way.

Both technologies are effective for relatively opened features at the processed part. For example, blasted shot flow hardly reaches small rounds in the inner corners (discussed case). Thus, pin should be redesigned with more exposed fillet.

Filling the step between stem and boss at the pin was provided by *fillet radius management* (FRM) approach (fig. 3, *a*). Initial fillet F radius value $r_f = 1$ mm (**Des1**) was changed to the 2, 4, 8 mm (design variants Des2, Des4, Des8 respectively). It is necessary to find the room for Des4, Des8 solution. Technics CSC could do it by contact interface CI-1 decreasing (fig. 5, *b* – right end).

Double increasing of fillet radius lowers peak tension stress. Stress σ_1 decreases from 1351 MPa ($r_f = 1$ mm; fig. 7, *a*) to 883 MPa ($r_f = 2$ mm; fig. 8, *b*). Small plastic deformations $\varepsilon_{pl}^{ac} < 0.015$ are revealed on fillet. So larger radius relieves danger of surface fracture.

CSC technics proposes (fig. 8, right pin ends) to increase fillet radius up to limit and exclude the pin step completely. Step would be overrode by complex surface Sm8. Radius 8 mm is achieved in the point C. Such overriding leads to the significant weakening of tension. Mark 470.99 points out moderate σ_1 stress. It is two times lower as for Des2 (left pin ends on fig. 8 – mark 883.27). CSP is smoothed out. Possibility cracking becomes weak.

Room for larger fillet was found by shrinkage of “pin – bucket” contact spot (interface **CI-1**). Initial cylindrical boss was ultimately overrode by fillet itself and groove Gr8 (fig. 8, *b*). That groove is shallow. Gr8 profile is incorporated inside smoothing arc CA (fig. 8, *a*). Groove Gr8 is the extension of the fillet and take part in the stress alleviation. Approach FRM collaborates here with CSC.

As for design Des8, pin can interact with the bucket only along R3 toroidal surface (fig. 8, *c*), conjugated with Gr8 and having 3 mm radius. Mean R3 contact place as primary contact spot.

Ledge C4 may be optionally shaped on the pin boss. Here ledge is rounded by radius 4 mm. Possibility of free rotation is preserved for “pin – bucket” joint. Ledge C4 may be named as secondary contact spot. Both spots are clearly visible on the fig. 8, *c* (right side). Every pin end possess one primary spot and two secondary ones. It brings reliable three-point basing of bucket upon the pin.

Ultimate pin step smoothing brings the problem of high contact pressure (fig. 9). Standard shape of contact spot is visible on the left side of picture ($r_f = 2$ mm, Des2). Triangle spot with vertexes O-0, O-1 and O-2 shows moderate pressure concentration, slightly exceeded 300 MPa level.

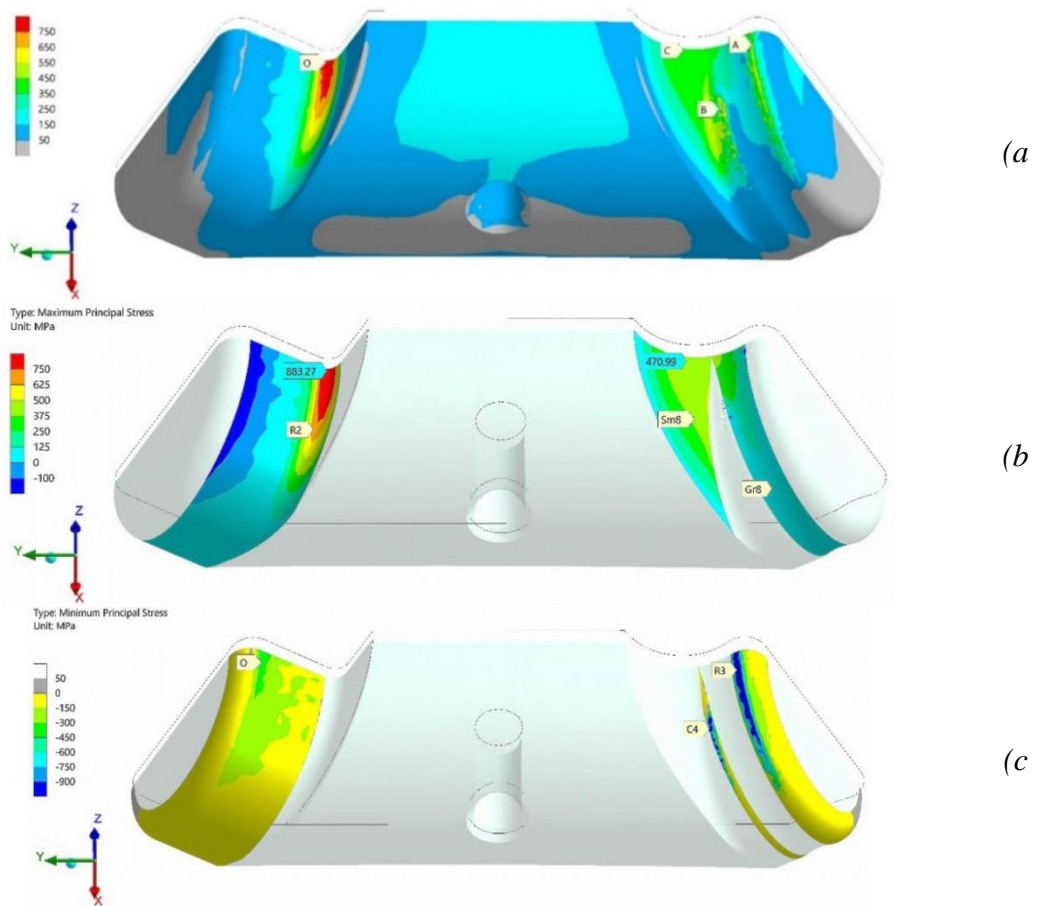


Fig. 8. Design variants Des2 ($r_f = 2$ mm, left) and Des8 ($r_f = 8$ mm, right) for pin: *a* – picture of equivalent stress σ_e ; *b* – distribution of maximal principal stress σ_1 (tension); *c* – dispersion of minimal principal stress σ_3 (compression). EL, FC, MPa; angular velocity $\omega = 420$ rad/s; $\times 15$

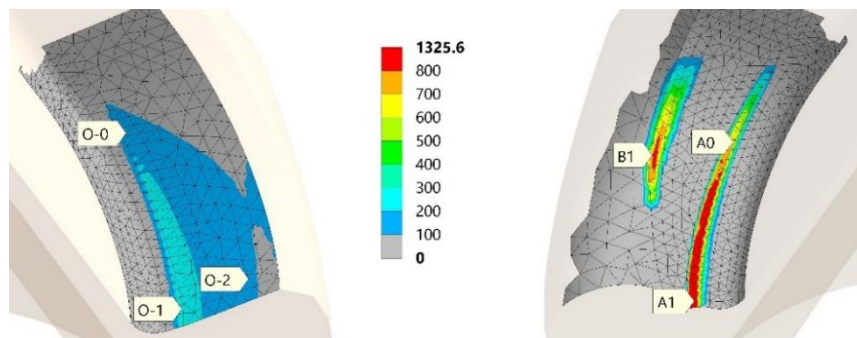


Fig. 9. Contact pressure (MPa) distribution in the bucket slot for Des2 (left) and Des8 (right) pin design variants (EL, FC). $\times 15$

Pressure level increases threefold and more for 3-point basing according to Des8 variant (fig. 10, right, $r_f = 8$ mm). Primary spot A0 – A1 and secondary one B1 are both clearly observable. Spot B1 bears about one third part of the full contact force. Small squares of spots may cause local plastic squeezing. Bucket contact surface should be treated e. g. by laser hardening.

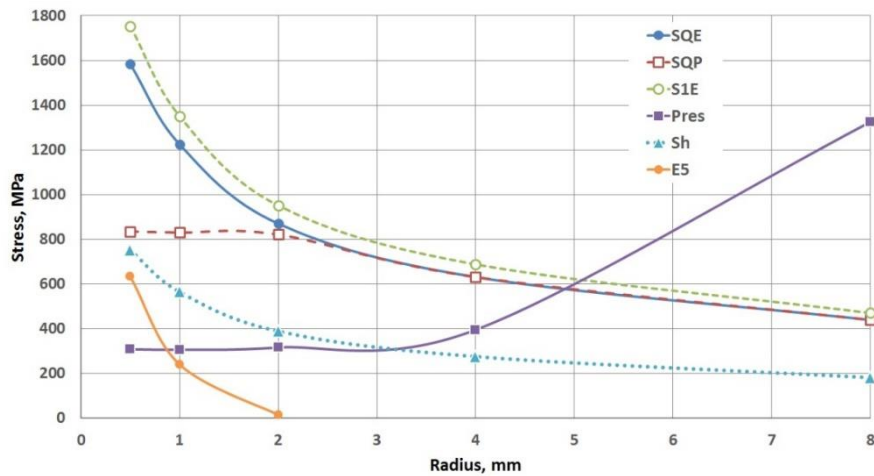


Fig. 10. Stress parameters (see above) and accumulated plastic deformation E5 on the pin fillet depending on radius

Centrifuge simulations (FC) were provided for the range of pin fillet radiuses. Results are collected in the tab. 1. Related graphs are showed on the fig. 10. Here designation *SQE* relates with fully elastic FEM-solution (EL). It is maximal equivalent stress on the pin fillet. Designation *SIE* discloses peak value of maximal principal stress σ_1 just here.

Table 1 – Stresses and plastic deformation on the pin fillet depending on radius produced

Design variant	<i>Des0</i>	<i>Des1</i>	<i>Des2</i>	<i>Des4</i>	<i>Des8</i>
Fillet radius r_f , mm	0.5	1	2	4	8
<i>SQE</i> (MPa)	1584	1225	870	631	439
<i>SQP</i> (MPa)	835	830	821	631	439
<i>SIE</i> (MPa)	1754	1351	951	688	470
<i>Pres</i> (MPa)	308	306	316	395	1325
<i>Sh</i> (MPa)	752	565	389	275	181
<i>E5</i> (% , 10^{-3})	634	240	14.8	0	0

Designation *SQP* refers to equivalent stress σ_e distribution, revealed after elastic-plastic (PL) solution. Stress σ_e is limited here from above by yield stress of steel. It is accompanied by plastic deformation ε_{pl}^{ac} accumulation on the fillet surfaces (parameter *E5* scaled in 10^5 times). Designation *Sh* describes hydrostatic stress. Large *Sh* value points out volume tension state. It is dangerous for brittle fracture initiation. Designation *Pres* is the maximal contact pressure at the *CI-I* (“pin – bucket”) interface. Structural stresses (by curves *SQE*, *SQP*, *SIE*, *Sh* on fig. 10) relatively rapidly go down as fillet radius increases from 0.5 to 4 mm. Stress decreasing decelerates after level $r_f = 4$ mm passing by. Plastic deformations (*E5*) are revealed at the fillet only for $r_f = 2$ mm and lower.

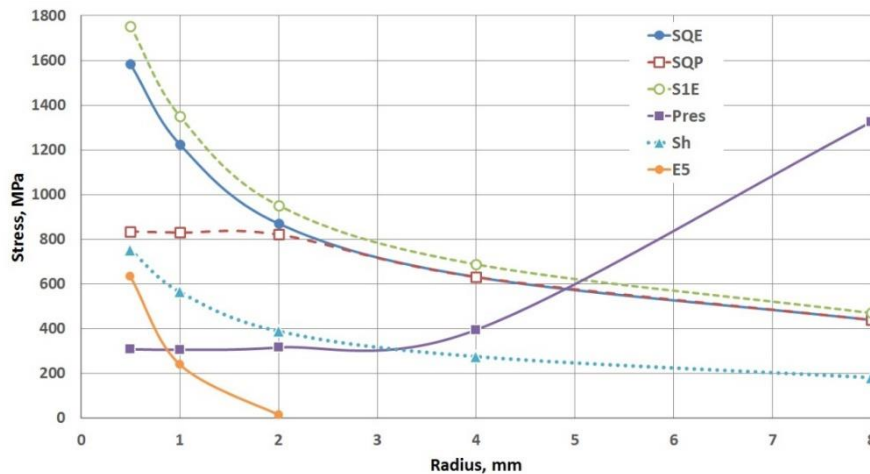


Fig. 10. Stress parameters (see above) and accumulated plastic deformation E5 on the pin fillet depending on radius

Contact pressure (*Pres*) begins to increase for $r_f = 4$ mm and higher. Thus fig. 10 analysis points out radius $r_f = 4$ mm (**Des4**) as optimal design solution for presented materials. Here structural stresses as contact ones are limited at the same time. Implementation of the *Des8* variant ($r_f = 8$ mm) needs to improve bucket slot durability due to high contact stresses. Laser treatment may be fulfilled for centrifuge safety accomplishing.

Conclusions. 1. Set of critical surviving points (CSP) is revealed in the centrifuge load-bearing system (LBS). They are placed at the pin fillets.

2. Hardened steel undergoes localized plastic deformation in the CSP on the pin fillets. However pins preserve strength as long-year exploit practice prove. Such kind of surviving needs special investigation. It may be due to autofrettage effect.

3. It is proposed to smooth out (blur, smear) pin CSP by fillet radius increasing. Stress concentrator smoothing is possible. Hence, in the limited design room it brings the contact pressure growing caused by contact spot shrinkage.

4. Pin fillet radius $r_f = 4$ mm is the optimal one. Equivalent stress is lowered in 1.94 times in comparison with $r_f = 1$ mm with no significant contact pressure increasing (29 % only). Simultaneously, hydrostatic pressure is declined in 2.05 times. It improves pin fillet protection from the brittle fracture.

5. Rising of the pin fillet radius is rather moderate instrument to decrease stress concentration. 8-times radius increasing lowers the tension stresses in 2.78 times only.

6. Contact spot control (CSC) demands precise finishing provided by 5-axis machine tools with grinding tooling. Conjunction of grinding and 5-axis machines points out to the new branch.

7. Fillet radius enlargement smooth the pin profile out. It is the step to the bionic design.

REFERENCES

1. Harrison, R. G. Bioseparations / R. G. Harrison [et al.] // Science and Engineering. Oxford University Press. – 2003.
2. Zienkiewicz, O. C. The finite element method / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor // Basis. Oxford: Butterworth-Heinemann. – 2000. – Vol. 1.
3. Vasilevich, Yu. V., Finite element analysis of centreless-lunette turning of heavy shaft / Yu. V. Vasilevich, S. S. Dounar // Science & Technique. – 2017. – Vol. 16(3). – P. 196–205.
4. Vasilevich, Yu. V. finite element analysis of concrete filler influence on dynamic rigidity of heavy machine tool portal / Yu. V. Vasilevich, S. S. Dounar, I. A. Karabaniuk // Science & Technique. – 2016. – Vol. 15(3). – P. 233–241.

5. Dounar, S., Finite Element Method analysis of the deformation of the shaft and supports of the large, precise lathe – Cutting force excitation / S. Dounar, A. Iakimovitch, A. Jakubowski // Scientific Journals of the Maritime University of Szczecin. – 2020. – Vol. 62(134). – P. 91–98.
6. Rickwood, D. Biological Centrifugation / D. Rickwood, J. M. Graham // Springer Verlag; ISBN:0387915761. – 2001.
7. Yong, Z. 3 Parametric Nonlinear Finite Element Analysis of Strain Ratcheting in Pressurized Elbows Based on Random Vibration / Z. Yong, J. D. Stevenson, H. T. Tang // Shock and Vibration. – 1996. – Volume 3. – Article ID 978073.
8. Konig, J. A. Shakedown of Elastic-Plastic Structures / J. A. Konig // Elsevier. – 1987.
9. Dixit, U. Autofrettage Processes / U. Dixit, S. Kamal, R. Shufen // Boca Raton: CRC Press. – 2020.
10. Lu, K. Making stronger materials ductile with gradients / K. Lu // Science. – 2014. – Vol. 345, No. 6203. – P. 1455–1456.
11. Suresh, S. Fundamentals of Functionally Graded Materials / S. Suresh, A. Mortensen // IOM3, Maney Publishing. – London, UK. – 1998.
12. Ho, H. S. Shot Peening Effects on Subsurface Layer Properties and Fatigue Performance of Case-Hardened 18CrNiMo7-6 Steel / H. S. Ho [et al.] // Advances in Materials Science and Engineering. – 2018. – P. 11.
13. Lv, Y. Influence of different combined severe shot peening and laser surface melting treatments on the fatigue performance of 20CrMnTi steel gear / Y. Lv, L. Q. Lei, L. N. Sun // Materials Science and Engineering A. – 2016. – Vol. 658, P. 77–85.

Поступила: 19.01.2021

ОБЪЕМНАЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ СИСТЕМЫ КОЛЕСО/РЕЛЬС С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ИЗГИБА РЕЛЬСА

¹Щербаков С. С., ²Вэнь З., ¹Шемет Л. А., ¹Подгайская Д. А., ¹Кирик С.В.

¹Белорусский государственный университет, Минск
²Юго-западный университет Цзяотун, Чэнду

При исследовании напряженно-деформированного состояния системы колесо/рельс решались граничные задачи в трех основных постановках:

1) традиционная трибологическая постановка задачи заключается в определении локальных характеристик контактного взаимодействия колеса и рельса и соответствующего напряженно-деформированного состояния при действии на колесо контактной силы F_N , прижимающей колесо к рельсу, у которого перемещения основания S_u равны 0 (условие жесткой заделки);

2) модификация трибологической постановки задачи, заключающаяся в том, что нижняя поверхность рельса S_u принимается лежащей на упругом основании;

3) трибофатическая постановка задачи, учитывающая как локальное контактное взаимодействие колеса и рельса, лежащего на упругом основании, так и изгиб рельса другими колесами состава (см. рис. 1).

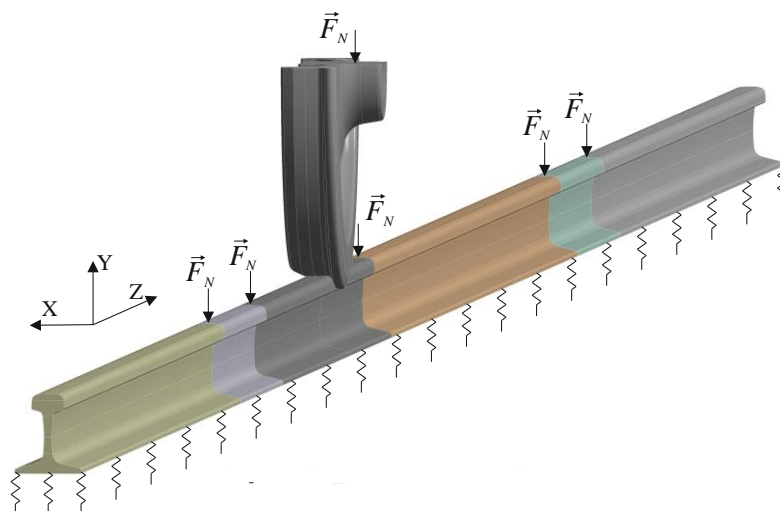


Рис. 1. Расчетная схема трибофатической задачи для условий контактного взаимодействия колеса и рельса, а также изгиба рельса составом

Для трибофатической постановки задачи граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_m|_S &= p(F_N, S), \quad \sigma_{nt}|_S = fp(F_N, S), \\ ku_n|_{S_u} &= r(S_u), \quad Q_l = F_N, \end{aligned} \quad (1)$$

где Q – поперечные силы, моделирующие действие других колес поезда; $l = x_1, \dots, x_n$ – точки приложения сил Q ; n – количество соседних колес, существенно влияющих на рассматриваемую пару колесо/рельс. Коэффициент постели $k = 75$ МПа/м для винклеровского основания в расчетах был выбран характерным для щебня.

Вагоны принимались как равные по своим габаритам, но различные по нагрузке. Весь вес вагона распределялся равномерно на две двуосные тележки, следовательно, каждое колесо принимало на себя 1/8 часть общего веса вагона, далее нагрузки указаны уже с перерасчетом для одного колеса [1–5].

Для различных величин нагрузок, условий нагружения, материалов рельса и колеса (см. табл. 1–3) проведено исследование напряженно-деформированного состояния моделей системы колесо/рельс.

Таблица 1 – Механические характеристики материалов

Характеристики	Материалы	
	Сталь	Моника
Е, ГПа	200	165
Коэффициент Пуассона	0,3	0,3
Коэффициент трения	0,3	0,3

Таблица 2 – Используемые нагрузки с расшифровкой

Название	Нагрузка	Обозначение
Пустой товарный вагон	26,968 кН	FE
Пустой пассажирский вагон	73,550 кН	PE
Груженный пассажирский вагон	122,6 кН	PL
Груженный товарный вагон	147,0 кН	FL

Таблица 3 – Кодификация расчетов для модели с длинным отрезком рельса на упругом основании

Пары материалов	Тип вагона			
	Товарный пустой	Товарный груженный	Пассажирский пустой	Пассажирский груженный
Стальное колесо – стальной рельс	EL SS FE	EL SS FL	EL SS PE	EL SS PL
Колесо из Моника – стальной рельс	EL IS FE	EL IS FL	EL IS PE	EL IS PL
Стальное колесо – рельс из Моника	EL SI FE	EL SI FL	EL SI PE	EL SI PL
Колесо из Моника – рельс из Моника	EL II FE	EL II FL	EL II PE	EL II PL

В результате моделирования были получены распределения напряжений в области контакта. На рис. 2, 3 и табл. 4 представлены полученные результаты. При сравнении моделей из различных пар материалов с парами сталь-сталь видно, что закономерности по убыванию максимальных величин эквивалентных напряжений в области контактного взаимодействия сохраняются для всех расчетов и для всех пар материалов системы в следующем порядке: стальное колесо – стальной рельс, колесо из Моника – стальной рельс, стальное колесо – рельс из Моника и колесо из Моника – рельс из Моника соответственно.

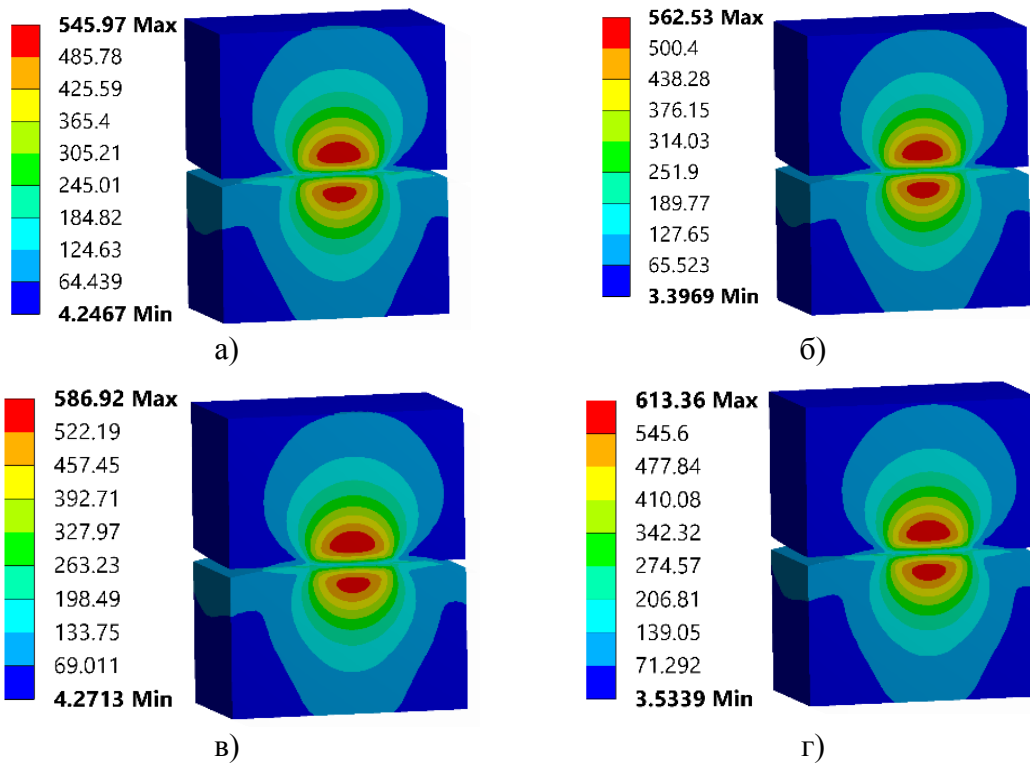


Рис. 2. Распределение эквивалентных напряжений σ_{int} в области контакта при субмоделировании в расчетах: а) EL II PL; б) EL SI PL; в) EL IS PL; г) EL SS PL

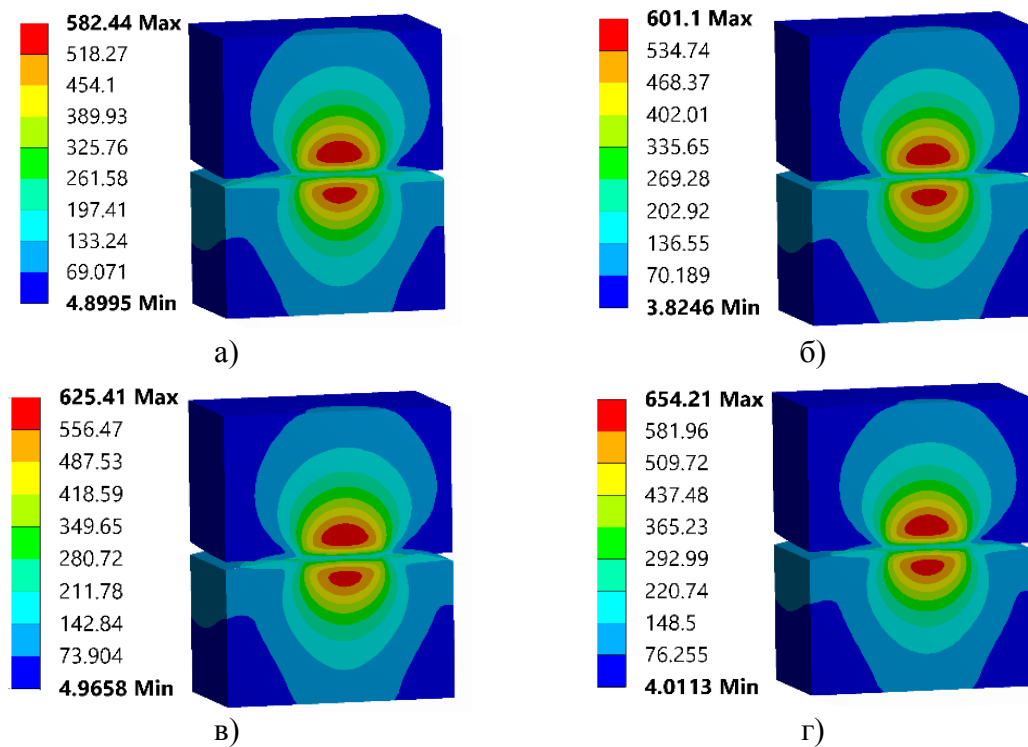


Рис. 3. Распределение эквивалентных напряжений σ_{int} в области контакта при субмоделировании в расчетах: а) EL II FL; б) EL SI FL; в) EL IS FL; г) EL SS FL

Таблица 4 – Интенсивность напряжений σ_{int} по отношению к модели со стальными рельсом и колесом для пустого товарного вагона

Пары материалов	Тип вагона			
	Товарный пустой	Товарный груженный	Пассажирский пустой	Пассажирский груженный
Стальное колесо – стальной рельс	100 % (355,54 МПа)	184,0 %	143,8 %	172,5 %
Колесо из Моники – стальной рельс	96,3 %	175,9 %	137,8 %	165,1 %
Стальное колесо – рельс из Моники	91,0 %	169,1 %	131,3 %	158,2 %
Колесо из Моники – рельс из Моники	89,2 %	163,9 %	127,8 %	153,6 %

В рамках проведенных расчетов эквивалентные напряжения рассчитывались в соответствии с четвертой теорией прочности [6–9]:

$$\sigma_{IV} = \sigma_{\text{int}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (2)$$

С учетом (2) функции локальной повреждаемости единицы объема примут вид:

$$\psi_{IV} = \sigma_{IV} / \sigma_{IV}^{(\text{lim})}. \quad (3)$$

Тогда формулы для расчета опасных объемов и интегральной повреждаемости будут следующими:

$$V_{IV} = \int_{\psi_{IV}(V) \geq 1} dV, \quad (4)$$

$$\Psi_{IV} = \int_{\psi_{IV}(V) \geq 1} \psi_{IV}(V) dV.$$

Критерий интенсивности напряжений выбирался исходя из следующих соображений. Предел усталости (максимальное контактное давление при предельном состоянии) для стали и Моники:

$$p_f (HB = 390) = 1123,1 \text{ МПа}.$$

Связь между максимальным контактным давлением и максимальной интенсивностью напряжений выражается зависимостью:

$$\sigma_{\text{int}}^{\text{max}} = 0,62 p_0 = 0,62 p_f.$$

Допускаемая интенсивность напряжений для визуализации опасных объемов при коэффициенте запаса $n = 2,5$:

$$[\sigma] = 0,62 p_f / n = \sigma_{\text{int}}^{(\text{lim})} = \sigma_{IV}^{(\text{lim})} = 278,5 \text{ МПа}.$$

На рис. 4 представлены опасные объемы, возникающие в системе колесо/рельс для модели с длинным отрезком рельса, когда учитывается влияние упругого основания под рельсом, а также неконтактный изгиб рельса шестью соседними колесами состава.

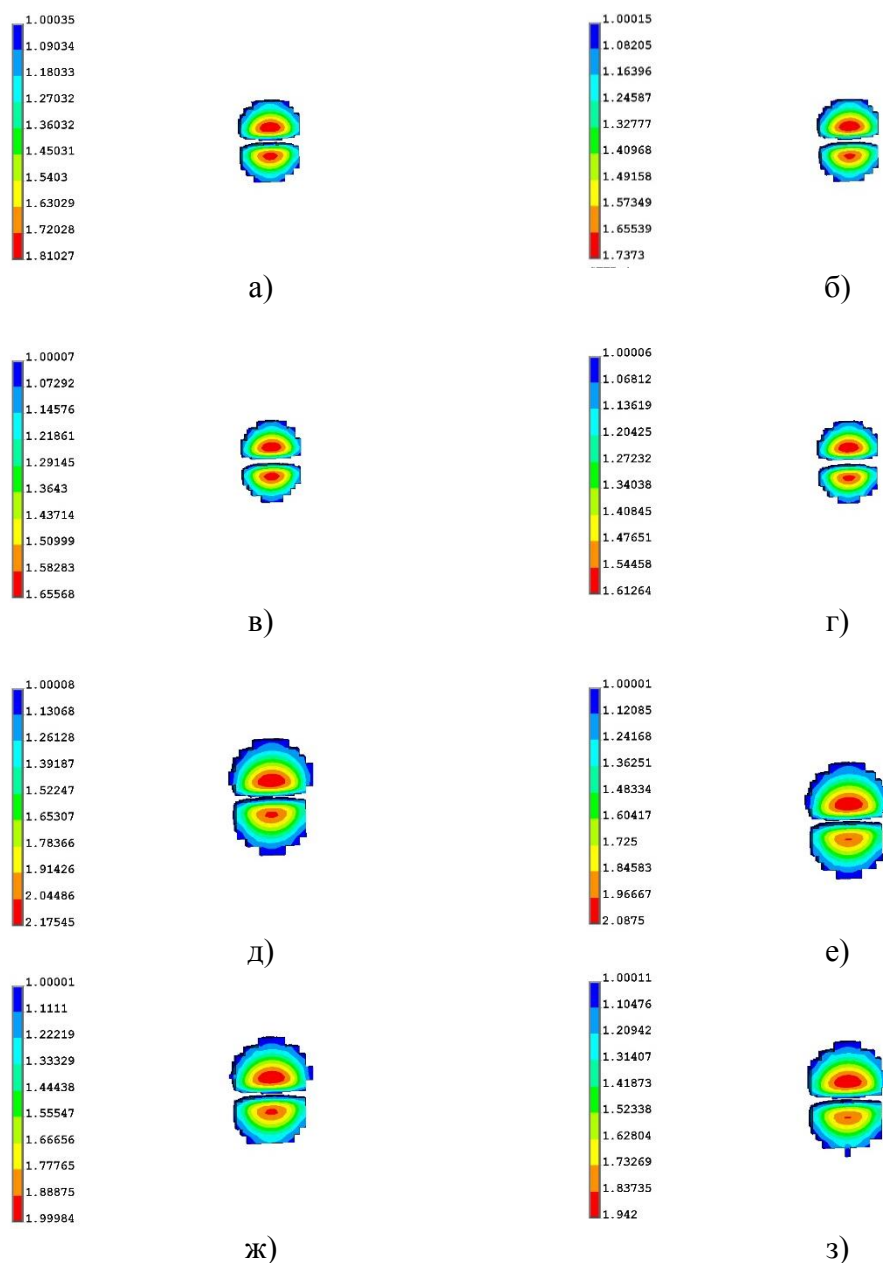


Рис. 4. Октаэдрические опасные объемы в расчетах: а) EL SS PE; б) EL IS PE; в) EL SS PE; г) EL II PE; д) EL SS PL; е) EL IS PL; ж) EL SI PL; з) EL II PL

В табл. 5 и 6 приведены данные по величинам октаэдрических опасных объемов V_{int} , возникающих в исследуемой системе. Максимальные по величине опасные объемы образуются в паре колеса и рельса груженого товарного поезда для пары сталь – сталь как для модели с длинным отрезком рельса, так и для модели с коротким отрезком рельса.

В табл. 5 представлены значения относительной погрешности опасных объемов, которые вычислялись по формуле:

$$e = \frac{|V_{\text{int}}^l - V_{\text{int}}^s|}{V_{\text{int}}^l} \cdot 100 \%, \quad (5)$$

где V_{int}^s – опасный объем для модели с коротким отрезком рельса, V_{int}^l – опасный объем для модели с длинным отрезком рельса.

Видно, что опасный объем для модели с коротким отрезком рельса значительно меньше, чем для модели с длинным отрезком рельса для всех рассматриваемых пар материалов. Максимальная разница в величинах наблюдается для пустого товарного вагона, а минимальная – для груженого товарного вагона.

Таблица 5 – Опасные объемы V_{int} для модели с длинным отрезком рельса на упругом основании ($мм^3$)

Пары материалов	Тип вагона			
	Товарный пустой	Товарный груженный	Пассажирский пустой	Пассажирский груженный
Стальное колесо – стальной рельс	193,51	6240,44	1830,14	4535,36
Колесо из Моники – стальной рельс	157,25	6093,64	1828,76	4480,42
Стальное колесо – рельс из Моники	100,80	5653,47	1573,16	4090,48
Колесо из Моники – рельс из Моники	89,44	5550,48	1539,19	3983,97

Таблица 6 – Опасный объем V_{int} для модели с коротким отрезком рельса на упругом основании ($мм^3$)

Пары материалов	Тип вагона			
	Товарный пустой	Товарный груженный	Пассажирский пустой	Пассажирский груженный
Стальное колесо – стальной рельс	86,51	5096,32	1460,08	3670,92
Колесо из Моники – стальной рельс	34,29	5022,83	1334,43	3513,55
Стальное колесо – рельс из Моники	7,39	4660,16	1178,50	3288,67
Колесо из Моники – рельс из Моники	0	4561,77	1075,40	3201,18

Таблица 7 – Относительная погрешность опасных объемов (%)

Пары материалов	Тип вагона			
	Товарный пустой	Товарный груженный	Пассажирский пустой	Пассажирский груженный
Стальное колесо – стальной рельс	55,3	18,3	20,2	19,1
Колесо из Моники – стальной рельс	78,2	17,6	27,0	21,6
Стальное колесо – рельс из Моники	92,7	17,6	25,1	19,6
Колесо из Моники – рельс из Моники	100	17,8	30,1	19,7

В рамках оценки повреждаемости системы колесо/рельс были рассчитаны опасные объемы в данной системе для рельса, лежащего на упругом основании. Рассматривался как короткий отрезок рельса в окрестности контактного взаимодействия, так и длинный

с учетом влияния неконтактного изгиба рельса шестью соседними колесами состава. Показано, что вследствие неконтактного изгиба рельса опасный объем в нем увеличивается не менее чем на 17,6 %.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № Т19КИТГ-012.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саргасян, А. Е. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов: учебник / А. Е. Саргасян [и др.]; под ред. А. Е. Саргасян. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 2000. – С. 416.
2. Шахунянец, Г. М. Железнодорожный путь / Г. М. Шахунянец // Москва: «Транспорт», 1987. – С. 479.
3. Колеса цельнокатаные. Технические условия: ГОСТ 10791-201. – Москва, 2011.
4. Рельсы железнодорожные. Общие технические указания: ГОСТ Р 51685-2000. – Москва, 2020.
5. Сосновский, Л. А. Исследование напряженного состояния простейшей модели системы колесо/рельс / Л. А. Сосновский [и др.] // Вестник БелГУТа. – 2005. – № 2. – С. 18–41.
6. Щербаков, С. С. Методы анализа напряженного состояния лабораторной модели системы колесо/рельс / С. С. Щербаков // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2007. – № 11. – С. 32–40.
7. Сосновский, Л. А. Основы трибофатики / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2003. – Т. 1. – С. 246.; – Т. 2. – С. 234.
8. Сосновский, Л. А. Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – С. 434.
9. Щербаков, С. С. Механика трибофатических систем / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – С. 407.

Поступила: 04.02.2021

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОКРЫТИЙ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

¹Можаровский В. В., ²Кушнир Р. М., ²Гачкевич А. Р., ³Кукареко В. А.,
³Кушнеров А. В.

¹Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель

²Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача
НАН Украины

³Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, Минск

Введение. Применение в мировой практике высокоскоростного и надежного промышленного транспорта (автомобилей, электропогрузчиков, подвесных канатных дорог, эскалаторов метро и др.), а также усовершенствование новых способов передачи движений требует создания новых армирующих материалов и инженерных методик расчета. Например, при исследовании контактного взаимодействия упругих тел из композитов возникает необходимость создавать новые методики расчета прочности и износа зубьев зубчатых колес. В связи с этим разрабатываются новые математические модели и компьютерные программы расчета напряжений при контакте индентора с упругим телом (или покрытием) из композита при различных физических параметрах взаимодействия. Следует отметить, что до настоящего времени недостаточно изучено влияние конструктивной анизотропии и функционально-градиентных свойств материалов на напряженно-деформированное состояние, а также влияние источников тепла на температурное поле в покрытиях при силовом квазистатическом воздействии, что не позволяет обосновать практику их проектирования. Кроме того, существует мало сравнимых по эффективности методов расчета и их компьютерной реализации, методик создания алгоритмов поведения конструкций из композитов, особенно из функционально – градиентных материалов.

Анализ применения функционально – градиентных материалов (ФГМ) нельзя проводить без учета их взаимодействия с другими телами сопряжения, а также материала матрицы и армирующих элементов, геометрии компонентов и структуры, и расположения компонентов, по сути, важно учитывать также и метод изготовления материала, что является весьма сложной и многопараметрической задачей.

В связи с этой концепцией, возникает цель исследований – описать и сделать некоторый обзор экспериментально-теоретических исследований для покрытий из функционально-градиентных материалов и наметить пути создания эффективных математических моделей и построения алгоритмов расчета температуры и напряженно-деформированного состояния покрытий при силовом воздействии.

1. Экспериментально-теоретическое исследование покрытий из функционально-градиентных материалов. Известно, что слоистые материалы нашли широкое применение в качестве конструкционных материалов и были разработаны эффективные инженерные методы оценки поведения этих материалов и конструкций. Но в тоже время, пока существует проблема разработки математических моделей для описания термомеханического поведения конструкционных элементов механических и трибологических систем из функционально-градиентных и термочувствительных материалов с физико-механическими характеристиками, зависимыми от температуры, при совместном действии локальных силовых и температурных нагрузений. Контактное фрикционное взаимодействие, лежащее в основе таких явлений как трение и изнашивание, в значительной степени определяет работоспособность ответственных деталей и узлов современных

машин. В связи с этим создание новых конструкционных материалов, обладающих высоким уровнем сопротивления разрушению при трении, является актуальной проблемой современного физического материаловедения. Одним из наиболее перспективных путей решения указанной проблемы является создание материалов с модифицированными поверхностными слоями, обладающими повышенными физико-механическими свойствами и стойкостью к разрушению в процессе фрикционного взаимодействия (износостойкостью) [1–4]. Поскольку процессы фрикционного взаимодействия материалов сопровождаются резким повышением температуры, интенсивным пластическим деформированием и структурно–фазовыми превращениями в тонких поверхностных слоях, то разработка математических моделей, определяющих значение температур и температурного поля, как в покрытии, так и в основании, представляет собой актуальную задачу, имеющую большое практическое значение. В работе [1] представлены результаты исследования структуры, микротвердости и данные триботехнических испытаний образцов стали 12Х18Н10Т, подвергнутой обработке ионами азота при различных температурах. Показано, что при ионном азотировании стали образуются упрочненные слои толщиной от 3 до 18 мкм, характеризующиеся повышенной твердостью (до 1400 HV 0,05) и содержащие азотистый аустенит γ'_N , а также нитридные фазы γ'_N и CrN (рис. 1). Установлено, что в процессе трения образцов стали с упрочненным слоем, происходит переход от стадии постепенного медленного изнашивания азотированного слоя к его ускоренному износу при уменьшении толщины слоя до 3–5 мкм.

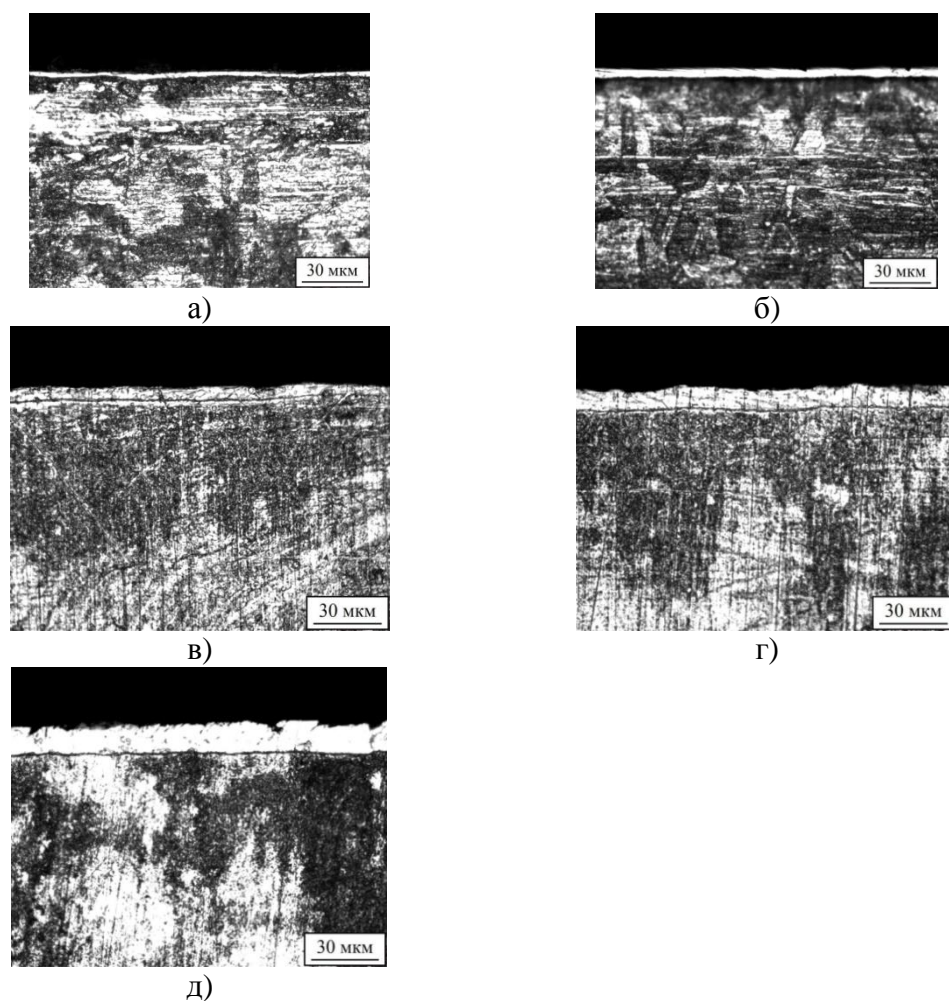


Рис. 1. Микроструктура модифицированной ионами азота стали 12Х18Н10Т: а – обработка при 620 К; б – то же при 670 К; в – то же при 690 К; г – то же при 720 К; д – то же при 770 К [1]

Процесс создания модифицированного поверхностного слоя с функционально-градиентными свойствами может быть различным. Одним из имеющихся перспективных направлений создания функциональных, прочных и износостойких покрытий является высокоэнергетическое воздействие, такое как, ионное азотирование, электродуговое с использованием принципов термодинамики и электромагнитотермомодифузии, и построение математической модели с применением теории размерностей и подобия, как это представлено в исследованиях [2]. В этой работе акцентируется точка зрения о эффективном процессе создания упрочненных слоев с градиентной структурой с помощью электромагнитного воздействия на смеси, содержащие нитриды железа и хрома. В качестве экспериментальной модели выбрана пластинка с покрытием из порошковой смеси. Нагрев осуществляется высокочастотными индукционными токами. Имеются значительные мировые достижения в области разработки технологии повышения прочностных свойств элементов конструкций, а также создания новых математических моделей, которые адекватно описывают расчет и работу функционально-градиентных материалов. В тоже время, для внедрения разработанных математических моделей, применяющихся к решению краевых задач, в инженерную практику, возникает необходимость создания детальной компьютерной реализации. Так, весьма актуально решение краевой задачи, определяющее температуру слоистой упругой среды в зависимости от граничных условий (с учетом движения индентора). Для исследования влияния физических свойств функционально-градиентных материалов на изменение температурного поля в покрытии в случае движения индентора по поверхности покрытия используются разработанные теоретические подходы, отраженные в работах [5–7]. Составляется алгоритм расчета, строятся графические зависимости изменения температуры в покрытии для различных параметров из функционально-градиентных материалов.

2. Теоретические положения о решении задачи определения температуры и теплового потока в покрытии из функционально-градиентного материала на жестком основании. Для анализа результатов и исследования влияния параметров теплопроводности необходимо найти изменения температуры в покрытии полагая, что температура возникает в области контакта индентор – покрытие. При этом в области контакта $(-a, a)$ действует постоянное напряжение $\sigma_{yy} = const$ или напряжение, изменяющееся по определенному закону. Согласно работам [5–7] температурное поле в покрытии T должно удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

и граничным условиям:

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial y} = -f(x), |x| < a,$$

где $f(x)$ – функция, зависящая от нормального напряжения, коэффициента трения, скорости движения индентора по поверхности. Считаем, что температура для $y = h$ равна $T(x, h) = 0$. Решая уравнение (1) с помощью преобразования Фурье, при заданных граничных условиях, получим [5–7] в виде:

$$T(x, y) = 1/\pi \int_0^\infty (A_1 e^{\lambda_1 y} + A_2 e^{\lambda_2 y}) \cos(\beta x) d\beta,$$

$$T = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{\lambda_1 y} e^{\lambda_2 h} - e^{\lambda_2 y} e^{\lambda_1 h}}{\lambda_1 e^{\lambda_2 h} - \lambda_2 e^{\lambda_1 h}} \cdot \tilde{f}(\beta) e^{-i\beta x} d\beta,$$

где $\lambda_1(\beta) = -\frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \beta^2}$, $\lambda_2(\beta) = -\frac{\delta}{2} - \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \beta^2}$, $\tilde{f}(\beta) = -\int_{-a}^a \frac{f(t)}{k_1} e^{it\beta} dt$.

Здесь принято считать, что изменения теплопроводности в зависимости от глубины, осуществляется по закону теплопроводности $k_2(y) = k_1 e^{\delta y}$, где индекс 1 обозначает коэффициент теплопроводности на поверхности слоя, 2 внутри слоя и обозначим k_3 теплопроводность на границе слой – основание. Считая, что температурный коэффициент на глубине $y = h$ равен k_3 , легко определяем параметр $\delta = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{k_3}{k_1}\right)$ (считаем $f(x) = const$ [5, 7]). Температуру T находим из уравнения

$$T = -\frac{4}{\pi} c_y \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda_1 y} e^{\lambda_2 h} - e^{\lambda_2 y} e^{\lambda_1 h}}{\lambda_1 e^{\lambda_2 h} - \lambda_2 e^{\lambda_1 h}} \cdot \frac{\sin a \beta}{\beta} \cos \beta x d\beta.$$

Для наглядной иллюстрации представим результаты решения на графиках (рис. 2, 3), расчеты производились при изменении различных параметров δ для $\frac{a}{h} = 1$. Из анализа графических зависимостей (рис. 2, 3), следует, что изменения свойств теплопроводности влияет на характер изменения температуры покрытия.

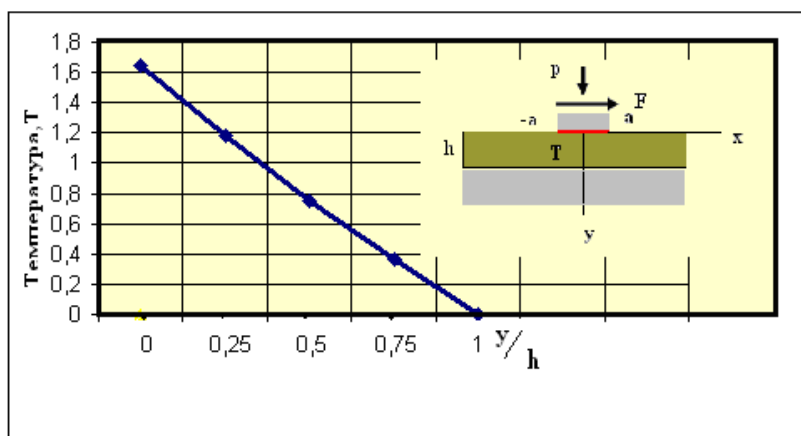


Рис. 2. Качественный характер изменения приведенной температуры (в относительных единицах) по толщине покрытия при $x = 0$, для однородного материала $\delta = 0$

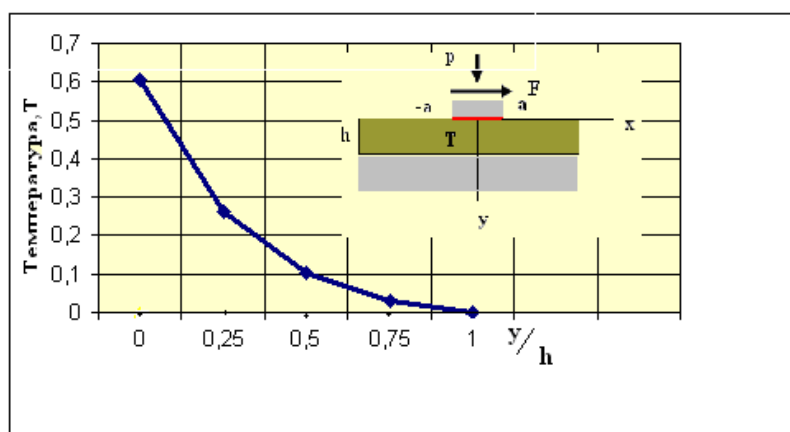


Рис. 3. Качественный характер изменения приведенной температуры по толщине покрытия при $x = 0$, для однородного материала $\delta = 3$

Так скорость падения температуры с толщиной покрытия уменьшается по сравнению с материалами, в которых теплопроводность одинакова для всех толщин покрытия. Такое свойство дает возможность, более замедленно остывать покрытие и поддерживает температуру. Более подробно описание изменения температуры в покрытии приведено

в работе [7]. Как показали расчеты характер изменения температуры по глубине (по оси Oy) зависит от соотношения коэффициентов теплопроводности на поверхности и на границе основания. В одном случае кривая изменения температуры (рис. 3) является вогнутой, если $k_3 > k_1$ и выпуклой [7], если $k_3 < k_1$. Эти изменения температуры в зависимости от геометрических и физических параметров материала слоя дают возможность подбирать материал с функционально-градиентными свойствами, которые необходимы для создания эксплуатационно-надежных покрытий в трибологических системах.

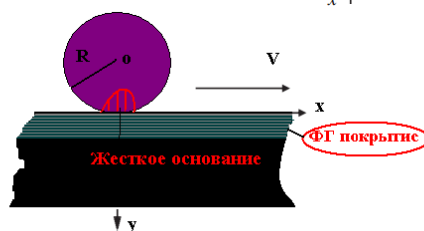


Рис. 4. Схема теплового контакта цилиндрического индентора с покрытием

Для случая контакта цилиндрического индентора (см. рис. 4) нужно подставить закон распределения давления (определяется при решении контактной задачи численно или аналитически). Например, если принять (как показала практика для тонких покрытий) $f(x) = -\mu\nu p_0 = c_y$, при действии нормальной нагрузки, распределенной по параболическому закону $\sigma_{yy} = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ на участке $-a \leq x \leq a$. Тогда с помощью преобразования Фурье легко находим:

$$\tilde{f}(\beta) = -\frac{4a}{(a/h)^3 \beta^3} \left[\sin \beta \frac{a}{h} - \frac{a}{h} \beta \cos \left(\beta \frac{a}{h} \right) \right] c_y;$$

$p_0 = \frac{3P}{4a}$, P – линейная нагрузка, μ – коэффициент трения, ν – скорость движения индентора. После нахождения A_i из граничных условий находим температуру T . Расчеты строятся для различных законов распределения давления на границе. В настоящее время создается программа для реализации расчета температуры в покрытиях при взаимодействии цилиндрического индентора с покрытием. Более сложная задача определение температуры возникает для функционально-градиентного покрытия, скрепленного с упругим основанием. Для реализации расчета для этой задачи можно использовать теоретические подходы, которые были представлены И. А. Прусовым при определении температуры в изотропном покрытии на изотропном основании методом теории функций комплексного переменного [8]. Для тестирования численных расчетов и компьютерной программы используем простое решение, если покрытие моделируем в виде изотропной полосы с граничными условиями $T(x, y) = f_i(\alpha)$, $i = 1, 2$ для верхней и нижней границы $y = h$ и $y = -h$. При $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ решаем граничную задачу для полосы [8], так имеем

$$T(x, y) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\alpha y) f'(\alpha)}{\operatorname{ch}(\alpha h)} \cos(\alpha x) d\alpha,$$

где $f'(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$.

Оригинальный подход решения задачи об определении температуры для композитного покрытия жестко скрепленного с упругим композитным основанием (подложкой) представлен в работе [9]. Пусть на поверхности задана температура (частный случай, сосредоточенная температура обобщается для произвольного распределения температуры):

$$T_2(x, -h) = T_0 \delta(x - x_0)$$

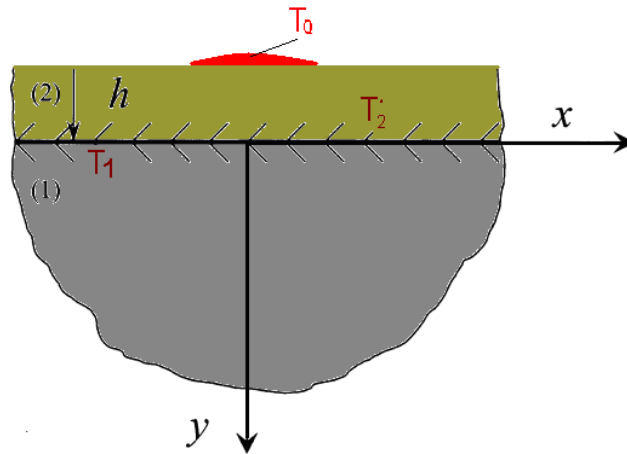


Рис. 5. Схема для определения температуры в покрытии

Необходимо определить температурное поле, как в покрытии, так и основании. Реализацию решения задачи будем осуществлять из позиций теории упругости анизотропного тела на основе работ [8–11]. Для рассматриваемой среды необходимо решить уравнения теплопроводности

$$k_{11}^m \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + 2k_{12}^m \frac{\partial^2 T_m}{\partial y \partial x} + k_{22}^m \frac{\partial^2 T_m}{\partial y^2} = 0, \quad m = 1, 2,$$

при условии равенства температур и тепловых потоков на границе раздела материалов. Решается задача с помощью преобразования Фурье. В окончательном варианте приближенное решения, представляющее формулы в виде рядов будет иметь следующий вид [9]: для основания:

$$T_1 = \frac{2T_0}{\pi(\eta+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1} \right)^n \frac{|q_2^{(1)}y + (2n+1)q_2^{(2)}h|}{[(x-x_0) + (q_1^{(1)}y + q_1^{(2)}h)]^2 + [q_2^{(1)}y + (2n+1)q_2^{(2)}h]^2},$$

для покрытия:

$$T_2 = \frac{T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1} \right)^n \frac{|q_2^{(2)}[y + (2n+1)h]|}{[(x-x_0) + q_1^{(2)}(y+h)]^2 + \{[q_2^{(2)}[y + (2n+1)h]]\}^2},$$

где введены следующие обозначения:

$$q_1 = -\frac{k_{12}}{k_{22}}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}}{k_{22}},$$

где k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материалов, $i, j = 1, 2$. (Более подробно теория и обозначения представлены в статье [9]). В настоящее время разрабатывается компьютерная программа [12, 13] для расчета температур и их распределения, как в покрытии, так и основании для различных материалов. Рассматриваются частные случаи, когда покрытие и основание изотропные, а также другие сочетания тепловых свойств материалов.

3. Математическое моделирование определения температуры для слоя на упругом полупространстве. Для более детального изучения температурного поля в слое, находящемся на упругом полупространстве, на основании работ [7–9, 15], рассмотрим алгоритм расчета потока тепла и значения температур. Можно использовать теорию, данную в книге [14], составляем алгоритм расчета для определения температур и теплового потока [14] и выражения для температуры в слое и полупространстве при различных законах изменения потока тепла q . Считая, что поток тепла проходит через границу полупространства $q(x, y) = q \cos \alpha x \cos \beta y$, то $T(x, y, z) = f(z) \cos \alpha x \cos \beta y$. При действии источника Q_0 , приложенного в точке с координатами $z = 0, r = 0$, имеем:

при $h \geq z \geq 0$,

$$T(r, z) = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} \gamma \left[A(\gamma) ch\gamma z - \frac{q_0}{\lambda_0 \gamma} sh\gamma z \right] J_0(\gamma r) d\gamma, \quad \text{при } \infty > z \geq h,$$

$$T(r, z) = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} \gamma f_1(\gamma, z) B(\gamma) J_0(\gamma r) d\gamma, \quad A(\gamma) = \frac{1}{\gamma q_0} \frac{\lambda_1(h) sh\gamma h \frac{df_1(\gamma, h)}{dz} - \lambda_0 \gamma ch\gamma h f_1(\gamma, h)}{\lambda_1(h) ch\gamma h \frac{df_1(\gamma, h)}{dz} - \lambda_0 \gamma sh\gamma h f_1(\gamma, h)},$$

$$B(\gamma) = \frac{1}{\gamma q_0} \frac{1}{sh\gamma h \cdot f_1(\gamma, h) - \lambda_1(h) \lambda_0^{-1} \gamma^{-1} ch\gamma h \frac{df_1(\gamma, h)}{dz}}.$$

где λ_1 есть коэффициент теплопроводности слоя полупространства, а λ_0 – коэффициент теплопроводности полупространства.

Если слой, так и полупространство являются однородными то [14]

$$A(\gamma) = \frac{1}{\lambda_0 \gamma} \frac{\lambda_1 sh\gamma h + \lambda_0 ch\gamma h}{\lambda_1 ch\gamma h + \lambda_0 sh\gamma h}, \quad B(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\lambda_1 ch\gamma h + \lambda_0 sh\gamma h}.$$

Для инженерного расчета в работе [14] рекомендуется применение мембранной модели. Принимая, что для источника тепла q равномерно распределенного по площади прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$, решение принимает вид

$$T = \frac{4q}{\pi^2} \iint_0^{\infty} \frac{\sin \alpha a \sin \beta b \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta}{\left[\beta_1 + \lambda_1 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \lambda h (\alpha^2 + \beta^2) \alpha \beta \right]}.$$

В частном случае, когда задан точечный источник Q , температура выражается следующим образом [14]:

$$T = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma J_0(\gamma r) d\gamma}{\beta_1 + \lambda_1 \gamma + \lambda h \gamma^2};$$

В этих формулах λ_1 есть коэффициент теплопроводности полупространства, а λ – коэффициент теплопроводности мембраны; $J_0(\gamma r)$ – функция Бесселя. Рассмотрена реализация задачи об определении температуры для композитного покрытия жестко скрепленного с упругим композитным основанием (подложкой) [14].

4. Численная методика расчета напряженного состояния покрытий. Следует отметить, что с позиции механики деформируемого твердого тела решение данной проблемы – создание материалов с упрочненными поверхностными слоями, представляет значительный интерес. С аналитическим и численным подходами к решению аналогичных задач можно ознакомиться, например, в работах [15–18]. При этом следует отметить, что современные исследования показывают существенную зависимость напряженного состояния слоистых тел, в том числе и упругих покрытий с упругой подложкой (основанием), от физико-механических характеристик (значений модулей упругости, коэффициентов

Пуассона, микротвердости и т. д.) как покрытий, так и подложки. Максимальные касательные напряжения, которые способствуют разрушению слоистой системы, в основном, концентрируются на границе раздела «покрытие – основание» или вблизи поверхности и существенно зависят от коэффициента трения, геометрической формы, а также упругих свойствах контртела, вступающего в контакт. Так, например [1], на рис. 6 представлены результаты расчета по методу конечных элементов максимальных напряжений в слоистой среде при контакте цилиндрического индентора [1] параболическому закону:

$$p(x) = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad p_0 = \frac{3P}{4a},$$

действие касательных усилий (при учете трения в контакте), согласно закона Кулона:

$$q(x) = f \cdot p(x),$$

где f – коэффициент трения.

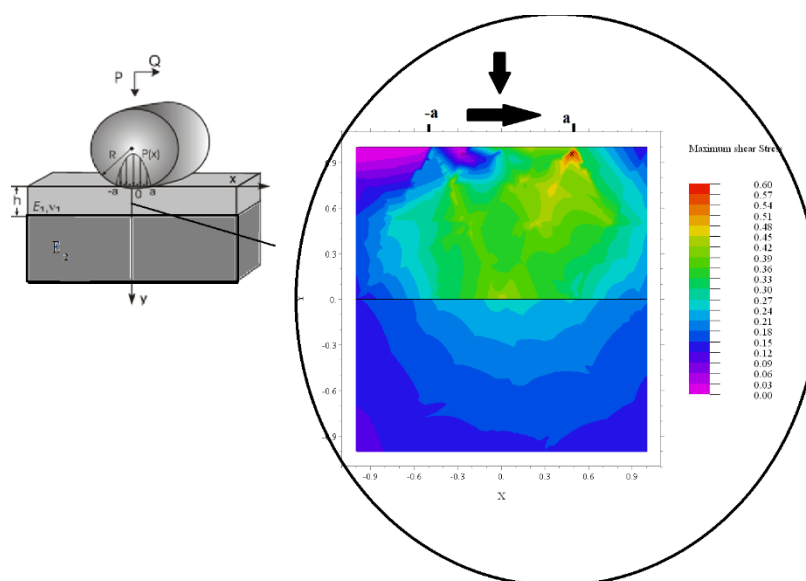


Рис. 6. Распределение полей максимальных напряжений τ_{\max} [1]

Общая картина распределения напряжений представлена изолиниями максимальных напряжений. Максимальные суммарные напряжения достигаются в слое покрытия вблизи поверхности и достигают значения $0,6p$. Для этого примера принимаем, что для материала основания модуль упругости $E_2 = 1,10 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,26$, толщина основания – 100 мкм. Материал покрытия имеет модуль упругости $E_1 = 4,80 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,22$, коэффициент трения индентора по покрытию $f = 0,15$, толщина покрытия $h = 1$ мкм, $a = 0,5$ мкм. Характер распределения максимальных касательных напряжений τ_{\max} в покрытии сходен с распределением их в упругом основании, однако наибольшее значение τ_{\max} и глубина, на которой они действуют, зависит от отношений области контакта контртела упрочненного слоя, приложенного упрочненному слою и его толщины. Для относительно толстых покрытий максимум τ_{\max} напряжений может достигаться внутри покрытия или на границе раздела, а для более тонких – внутри основания.

Выводы. В статье приведен обзор новых подходов по исследованию напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций (покрытий и оснований) из функционально-градиентных материалов с учетом температуры. На основании описания экспериментально-теоретических исследований покрытий из функционально-градиентных

материалов и теоретических положений решения задач определения температуры и теплового потока в покрытиях показана возможность построения алгоритмов реализации определения температурных полей для покрытий из ФГМ. Представленный подход и численная методика расчета напряженного состояния может быть основой для дальнейшего развития решений трибологических задач с учетом температурных явлений.

Работа частично поддержана НАН Беларуси (БРФФИ) - НАН Украины, грант T20УКА-012.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукареко, В. А. Закономерности изнашивания упрочненной ионами азота аустенитной стали 12X18H10T / В.А. Кукареко [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4(39). – С. 37–42.
2. Гачкевич, А. Р. Моделирование механотермодиффузионных процессов в приповерхностном слое элементов конструкций при нанесении эвтектического покрытия с использованием электромагнитного воздействия / А. Р. Гачкевич [и др.] // «Інноваційні технології, моделі управління кібербезпекою ІТМК-2020», Міжнародна наукова конференція, Дніпро. – 2020. – С. 74–76.
3. Белый, А. В. Влияние режимов ионно-лучевого азотирования на структуру, микротвердость и магнитные свойства диффузионного слоя на аустенитной стали / А. В. Белый, В. А. Кукареко, С. Г. Сандомирский // *Металловедение и термическая обработка металлов*. – 2009. – № 3(645). – С. 9–14.
4. Витязь, П. А. Механизм контактного разрушения при трении материалов с модифицированными ионами азота слоями / П. А. Витязь [и др.] // *Актуальные проблемы прочности. Труды XLIII Международной конференции*. Витебск, Беларусь; 27 сентября – 1 октября 2004. – С. 281–291.
5. Peijian, C. Thermo-mechanical contact behavior of a finite graded layer under a sliding punch with heat generation / C. Peijian, C. Shaohua // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. – Vol. 50. – P. 1108–1119; №6. – P. 34–43.
6. Можаровский, В. В. Анализ механико-математических моделей расчета функционально – градиентных материалов, работающих в условиях контактного взаимодействия / В. В. Можаровский, Е. М. Березовская // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2013. – № 3. – С. 14–21.
7. Можаровский, В. В. О расчете напряженного состояния покрытий из функционально-градиентных и термочувствительных материалов / В. В. Можаровский, Е. М. Березовская // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель*. – 2014. – С. 86–92.
8. Прусов, И. А. Термоупругие анизотропные пластинки / И. А. Прусов. – Мн.: БГУ, 1978. – 200 с.
9. Ming-Hsien Hsieh Analytical investigations for heat conduction problems in anisotropic thin-layer media with embedded heat sources / Ming-Hsien Hsieh, Chien-Ching Ma // *I. J. of Heat and Mass Transfer*. – 2002. – № 45. – P. 4117–4132.
10. Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск: Наука, 1988. – 280 с.
11. Можаровский, В. В. Методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании / В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 6. – С. 74–81.
12. Mozharovsky, V. Mathematical modeling of the problem of determining temperature in a layered object in contact for functionally gradient materials / V. Mozharovsky [et al.] // *XI international Skorobohatko mathematical conference; Lviv, Ukraine; October 26–30, 2020*. – P. 77.

13. Можаровский, В. В. Реализация задачи определения температуры и теплового потока в покрытии / В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков, В. А. Кукареко // Материалы X международной научно-практической конференции. Часть 1, под общ. Ред. Ю.И. Кулаженко, «Проблемы безопасности на транспорте». – Гомель. – 26–27 ноября 2020 г. – С. 108–109.
14. Корнев, Б. Г. Задачи теории теплопроводности и термоупругости / Б. Г. Корнев. – М.: Наука, 1980.
15. Горячева, И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
16. Торская, Е. В. Моделирование фрикционного взаимодействия тел с покрытиями / Е. В. Торская // Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. – М. – 2014. – С. 44.
17. Можаровский, В. В. Математическое моделирование контактного взаимодействия цилиндрических тел из композиционных материалов / В. В. Можаровский, С. А. Марьин, Н. А. Марьина // Вычислительная математика и математические проблемы механики: матер. II Междунар. научн. конф., Львов, 31 августа – 4 сентября 2009 г. – Львов: Институт прикладных проблем математики и механики НАН Украины, 2009. – С. 288–290.
18. Бурака, Я. Й. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Р.М. Кушнір, В.С. Попович; під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра // Львів: СПОЛОМ, Термопружність термочутливих тіл. – 2009. – Т. 3. – С. 412.

Поступила: 03.02.2021

ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТЮБИНГОВОЙ КРЕПИ ПРИ ТАМПОНИРОВАНИИ ОКОЛОСТВОЛЬНОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

¹Николайчик М. А., ¹Журавков М. А.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Проходка шахтного ствола и возведение сложной системы его крепления требует решения целого ряда специальных геотехнических задач. При этом, вследствие уникальных особенностей породной толщи, в которой проходят ствол, невозможно выполнить полную «стандартизацию» решаемых задач. В каждом случае проходки ствола возникает большой набор индивидуальных и «уникальных» задач, требующих нестандартного подхода и построения специальных модельных задач. Данные задачи можно условно разделить на два типа: задачи, связанные с оценкой напряженно-деформированного состояния (НДС) системы «крепь ствола – вмещающий массив», а также задачи оценки состояния конструкций крепи в целом или ее отдельных элементов.

В данной статье рассматривается задача исследования напряженно-деформированного состояния тюбинговой крепи на этапе ее возведения. При этом учитывается технологический процесс нагнетания тампонажного раствора в околоствольный массив горных пород.

Постановка задачи. После возведения передовой бетонной крепи, вдоль ствола по направлению «снизу-вверх» возводится тюбинговая крепь, представляющая собой систему из чугунных колец, каждое из которых, в свою очередь, состоит из 15 секторов (рис. 1). В пространство между тюбинговыми кольцами и передовой крепью подается бетон. И затем, через специальные отверстия (шпуры) в околоствольный массив для гидроизоляции производится нагнетание тампонажного раствора (портландцемент).

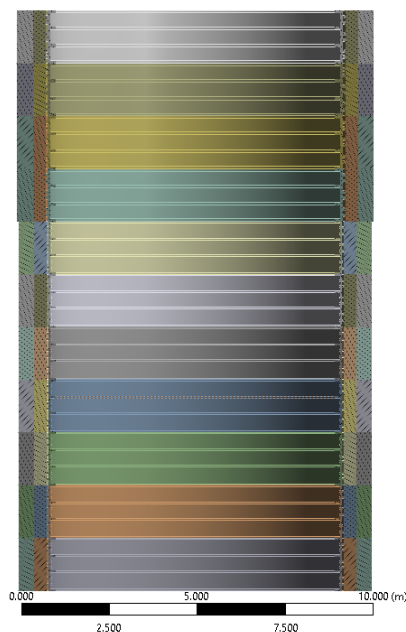


Рис. 1. Сечение ствола с крепью (тюбинговая крепь, передовая бетонная крепь, затюбинговый бетон)

Целью модельных исследований является изучение состояния тубинговой крепи при различных режимах подачи тампонажного раствора.

Свойства затубингового бетона С25/30 и передовой крепи С30/37, а также чугуна СЧ 25 отображены в табл. 1.

Таблица 1 – Физико-механические свойства материалов

Материал	Плотность, кг/м ³	Модуль упругости, ГПа	Коэф. Пуассона	Предел прочности на растяжение, МПа	Предел прочности на сжатие, МПа
Чугун СЧ 25	7200	100	0,22	297	1000
Бетон С25/30	2400	32,5	0,16	1,8	39,3
Бетон С30/37	2430	34,5	0,16	2	45,8

Граничные условия. Итак, основная цель исследований стоит в определении НДС тубинговой крепи и бетона в затубинговом пространстве при нагнетании тампонажного раствора. При этом расчет НДС передовой крепи под воздействием вмещающего массива не производится. Поэтому граничные условия на внешней поверхности затубингового бетона принимаются в виде ограничения нормальных перемещений на данной поверхности. На боковые поверхности тубингов и затубинговый бетон действует давление, которое определяется давлением закачки тампонажного раствора. Учитывается вес тубинговой колонны, а также бетона в затубинговом пространстве. Условная расчетная схема с граничными условиями приведена на рис. 2.

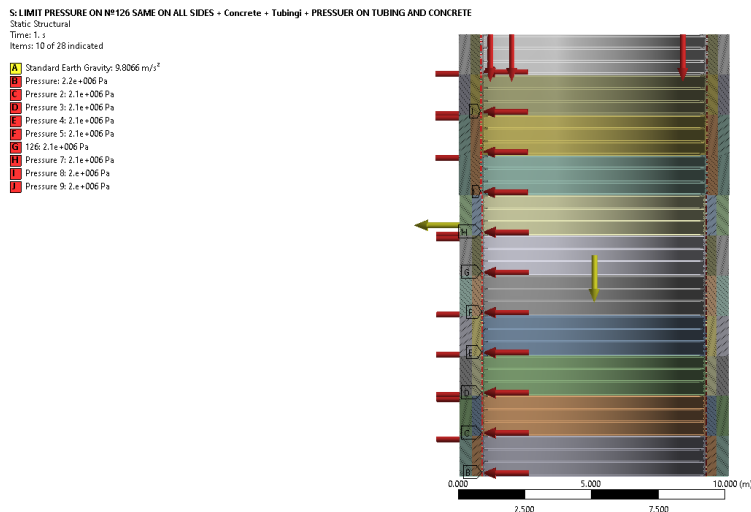


Рис. 2. Расчетная схема с граничными условиями рассматриваемой задачи

Оценка прочности. Обобщенная оценка НДС исследуемой системы выполнялась путем изучения значений коэффициента Надаи-Лодэ μ_σ [1] для каждого элемента конечно-элементной сетки.

Напомним, что параметр Надаи-Лодэ характеризует объемное напряженное состояние в деформируемых телах:

– если $\mu_\sigma \in [-1; -0,5]$ – соответствует состоянию обобщенного растяжения;

– если $\mu_\sigma \in [-0,5; 0,5]$ – соответствует состоянию обобщенного сдвига;

– если $\mu_\sigma \in [0,5; 1]$ – соответствует состоянию обобщенного сжатия.

Далее, в зависимости от вида объемного напряженного состояния, проверяется выполнение следующих критериев прочности [2]:

$$|\sigma_1| < \sigma_{tens}, \quad (1)$$

$$|\sigma_3| < \sigma_{comp}. \quad (2)$$

Здесь σ_1 – первое главное напряжение; σ_3 – третье главное напряжение; σ_{tens} – предел прочности на растяжение; σ_{comp} – предел прочности на сжатие.

В силу того, что рассматриваемые материалы (бетон и чугун) хрупки и имеют низкий предел прочности на растяжение, то данные критерии вполне подходят для оценки прочности.

Далее приведены некоторые результаты комплексных модельных исследований.

Равномерно распределенная нагрузка на тьюбинговую крепь. Исследовалось состояние тьюбинговых колец и затьюбингового бетона при различных уровнях воздействия на них равномерно распределенного давления. На рис. 3 и 4 в качестве примера приведены результаты моделирования при воздействии давления с интенсивностью величиной 3,1 МПа (рабочее давление нагнетания раствора для тьюбингов рассматриваемого типа).

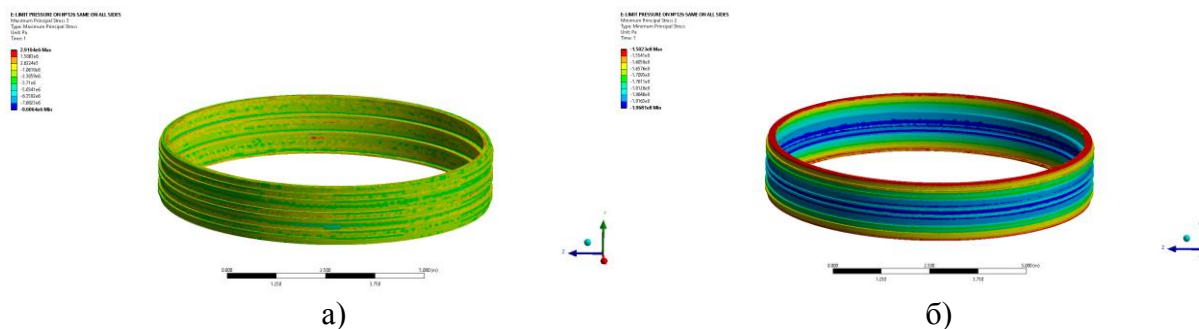


Рис. 3. Распределение главных напряжений в тьюбинговом кольце при равномерно распределенном давлении величиной 3,1 Мпа: а) первое главное напряжение; б) третье главное напряжение

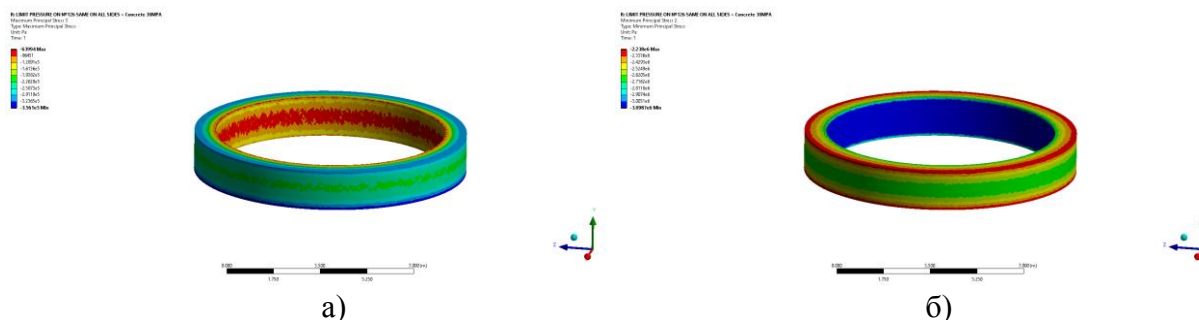


Рис. 4. Распределение главных напряжений в затьюбинговом бетоне при равномерно распределенном давлении интенсивности 3,1 Мпа: а) первое главное напряжение; б) третье главное напряжение

Отметим, что при данном уровне распределенной нагрузки области предельного состояния в тьюбинговых кольцах не формируются.

Выполненные модельные расчеты по определению величины критической нагрузки при которой может иметь место разрушение тьюбингового кольца при равномерном распределении нагрузки по всей его поверхности показали, что интенсивность распределенной нагрузки должна составлять не менее 15 МПа, рис. 5–6. При этом напряжения в затьюбинговом бетоне не достигают критических значений.

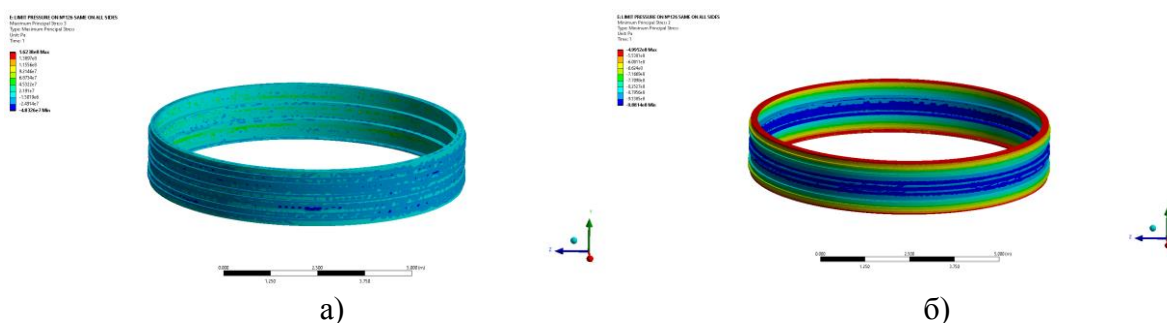


Рис. 5. Распределение главных напряжений в тьюбинговом кольце при равномерно распределенном давлении 15 МПа: а) первое главное напряжение; б) третье главное напряжение

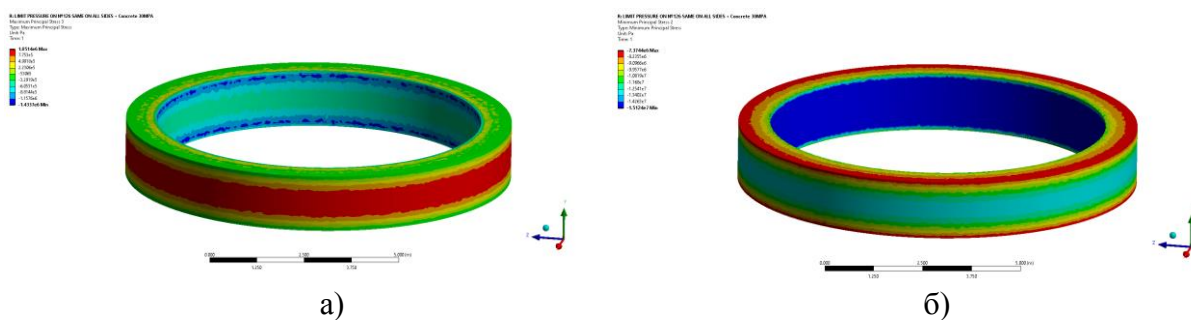


Рис. 6. Распределение главных напряжений в затьюбинговом бетоне при равномерно распределенном давлении 15 МПа: а) первое главное напряжение; б) третье главное напряжение

Неравномерно распределенная нагрузка. Оценим НДС тьюбингового кольца при неравномерном распределении нагрузки, действующей по его граничной поверхности.

Принималась расчетная схема следующего типа: на 14 из 15 тьюбингов в кольце действует равномерно распределенная нагрузка одной интенсивности, а на последний тьюбинг действует нагрузка интенсивности большой величины.

На следующих рис. 7–9 приведены отдельные результаты модельных расчетов при различных уровнях интенсивности действующих нагрузок.

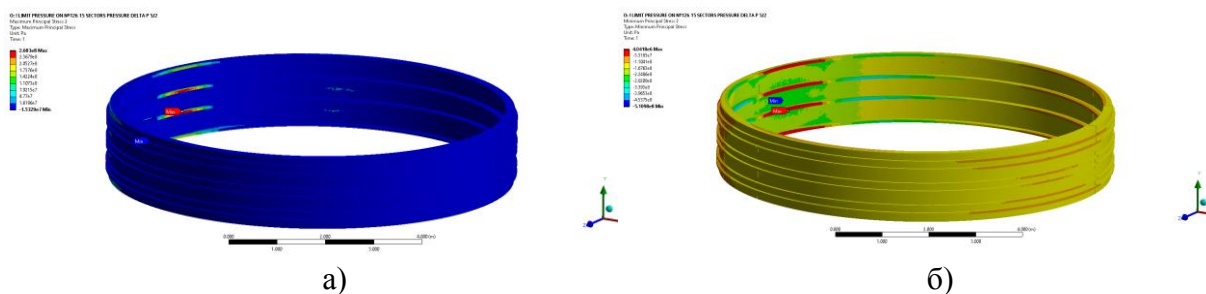


Рис. 7. Напряжения в тьюбинговом кольце при равномерном распределении давления величиной 2 МПа и наличии тьюбинга с давлением интенсивности 5 МПа: а) первое главное напряжение; б) третье главное напряжение

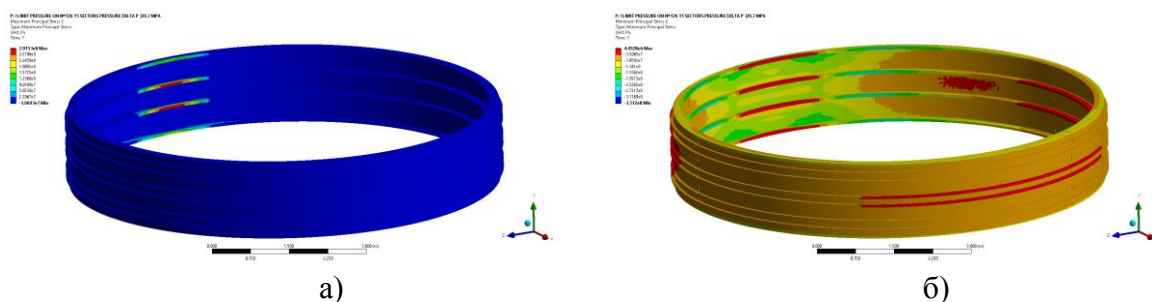


Рис. 8. Напряжения в тубинговом кольце при равномерном распределении давления величиной 0,7 МПа и наличии тубинга с давлением интенсивности 3 МПа: а) первое главное напряжение; б) третье главное напряжение

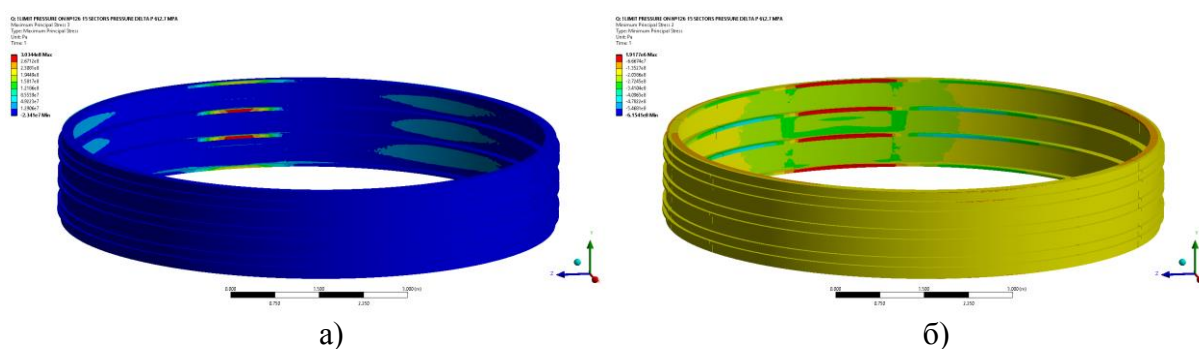


Рис. 9. Напряжения в тубинговом кольце при равномерном распределении давления величиной 2,7 МПа и наличии тубинга с давлением интенсивности 6 МПа: а) первое главное напряжение; б) третье главное напряжение

Как следует из расчетов, практически в каждом из рассмотренных случаев в тубинговом кольце появляются зоны с напряжениями растяжения, превышающими предел прочности, в тоже время, зон с напряжениями сжатия, величина которых превышает предел прочности, не наблюдается. Отметим также, что, помимо упомянутых, расчеты выполнялись для ситуаций при давлениях с интенсивностями 3,5 и 7 МПа, 4 и 8 МПа и других.

В результате анализа и обобщения модельных исследований показано, что вероятность возникновения локальных зон разрушения можно охарактеризовать коэффициентом неравномерности распределения давления по контуру тубингового кольца. С увеличением величины максимального давления на одно из колец, коэффициент неравномерности распределения давления, приводящего к предельному состоянию, уменьшается. Так, например, при давлениях соответственно 0,7 МПа и 3 МПа $k = 3 / 0,7 = 4,29$; при давлениях 2,1 МПа и 5 МПа – $k = 5 / 2,1 = 2,4$; при давлениях 2,7 МПа и 6 МПа – $k = 6 / 2,7 = 2,2$; при давлениях 4 МПа и 8 МПа – $k = 8 / 2 = 2$.

Выводы. Рассмотрена задача исследования прочности тубинговой крепи на этапе ее возведения с учетом тампонирования околоствольного массива. Обобщенная оценка напряженного состояния системы «околоствольный массив-крепление ствола» выполнялась путем изучения значений коэффициента Надаи–Лоде для каждого элемента конечно-элементной сетки. В зависимости от значения данного коэффициента использовался определенный критерий предельного состояния для оценки прочности конструкции.

Результаты исследований показывают, что при обеспечении равномерного распределения давления по поверхности тубинговых колец в процессе нагнетания тампонаж-

ного раствора, предельное состояние в тубинговой крепи наступает при больших значениях давления, значительно превышающих технологически возможное при нагнетании тампонажа.

Вместе с тем, разрушение в тубинговом кольце может наступить при относительно небольших интенсивностях давления в случае неравномерности его распределения по контуру кольца. Численное моделирование позволило определить закономерности наступления предельного состояния в тубинговой крепи в зависимости от разности в величинах интенсивности давлений, действующих на тубинговое кольцо. Для такой оценки введен коэффициент неравномерности распределения давления. Показано, что при повышении максимального давления, действующего на отдельный тубинг, коэффициент неравномерности уменьшается. Соответственно, чем выше максимальное давление на отдельный участок тубингового кольца, тем меньшая разница давлений с соседними тубингами необходима, чтобы возникло предельное состояние в тубинге. Данные результаты могут быть использованы при выборе режима и параметров технологического процесса нагнетания раствора для обеспечения безопасного тампонирования окрестного массива.

***Благодарность.** Работа выполнена в рамках НИР кафедры теоретической и прикладной механики БГУ №756/21 «Разработать математические модели и методы решения новых классов краевых задач механики сплошных сред применительно к актуальным современным проблемам науки и техники», ГПНИ «Конвергенция», задание 1.8.01.1.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров, В. Напряжения, деформации, разрушение / В. Колмогоров // Металлургия, 1970. – 229 с.
2. Васильев, Л. М. Механика образования форм разрушения образцов горных пород при их сжатии / Л. М. Васильев [и др.] // Днепро: ИМА-пресс, 2018. – 176 с.

Поступила: 31.01.2021

РЕАЛИЗАЦИЯ РАСЧЕТА КОНТАКТА ТЕЛ ИЗ АРМИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ, МОДЕЛИРУЮЩИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН

¹Можаровский В. В., ¹Кузьменков Д. С., ¹Коляскин И. И., ²Василевич Ю. В.

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель

²Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение. Решаются контактные задачи применительно к инженерному расчету цилиндрических тел, которые моделируют взаимодействие элементов машин, таких как, например, «колесо – дорога», «железнодорожное колесо – рельс», а также взаимодействие зубьев зубчатых колес и элементов фрикционных передач. Во всех этих случаях, при контактном взаимодействии, возникают сложные граничные условия, которые включают в себя описания элементов качения, скольжения, сцепления, проскальзывания. Нами изучен ряд источников научно-технической информации [2–10], в которой рассмотрена теория контактного взаимодействия изотропных упругих тел, в том числе цилиндрических, но, к сожалению, математический аппарат теории контактного взаимодействия армированных тел с элементами неоднородности разработан недостаточно. Одним из подходов к расчету таких конструкций является метод, базирующийся на основе теории упругости анизотропного тела. В этом случае технические упругие постоянные, характеризующие механические свойства материала определяются из экспериментальных исследований, а затем, используя известный «макроподход» или статистические методы, определяются эффективные модули упругости. Если мы имеем композиционный материал, состоящий из матрицы и армированных элементов – волокон, то тогда нужно найти оптимальный объемный состав волокон такой, чтобы прочность конструкции была достаточная, то есть необходимо создавать математическую модель, где целевой функцией будет прочность с некоторыми ограничениями на объемное содержание и геометрию конструкции.

Известно, что на современном этапе развития расчетных методов, такие сложные конструкции как шина колеса, рассчитываются с помощью различных численных программ, базирующихся на методах конечных элементов. Особенность этих программ состоит в том, что необходимо создавать дискретизацию области, вводить граничные условия, кроме того, могут возникать значительные ошибки расчета, если рассматриваемая область достаточно малая по сравнению с приложенными усилиями, а также в областях с большими концентрациями напряжений. Это также касается упругих тел, взаимодействующих с другими телами, имеющими достаточно тонкое покрытие. Проанализировав как теоретические и численные, так и экспериментально-теоретические методы расчета параметров контакта цилиндрических тел с учетом анизотропии свойств, как созданные нами, так и известные, для взаимодействия системы «автомобильная шина колеса – дорога» пришли к выводу о необходимости создания математических и экспериментальных методик расчета контактного взаимодействия таких инженерных конструкций [10, 11].

В проведенных экспериментальных исследованиях [11] (см. рис. 1, а), получены размеры зоны контакта «шина колеса – плоское основание». Как видно из рис. 1 отпечатка, область контакта является дискретной и давление в зоне контакта распределено неравномерно, что подтверждается численными расчетами, проведенными в работе [10].

1. Численные методы расчета контактного взаимодействия. Нами разработана теория и алгоритм расчета напряженного деформированного состояния, как на поверхности колеса, так и в упругом основании (математическая модель дорожного полотна)

при заданных давлениях, определяющихся экспериментально или численным расчетом. Суть метода состоит в следующем. Рассматривается первая граничная задача о напряженно-деформированном состоянии армированного полупространства под действием произвольно распределенной нагрузки в области контакта. Строятся аналитические зависимости, определяющие компоненты тензора напряжений и деформаций; производится дискретизация зоны контакта, то есть разбивка ее на некоторые граничные элементы (см. рис. 2) считая, что на каждом граничном элементе действует нормальная и касательная нагрузка.

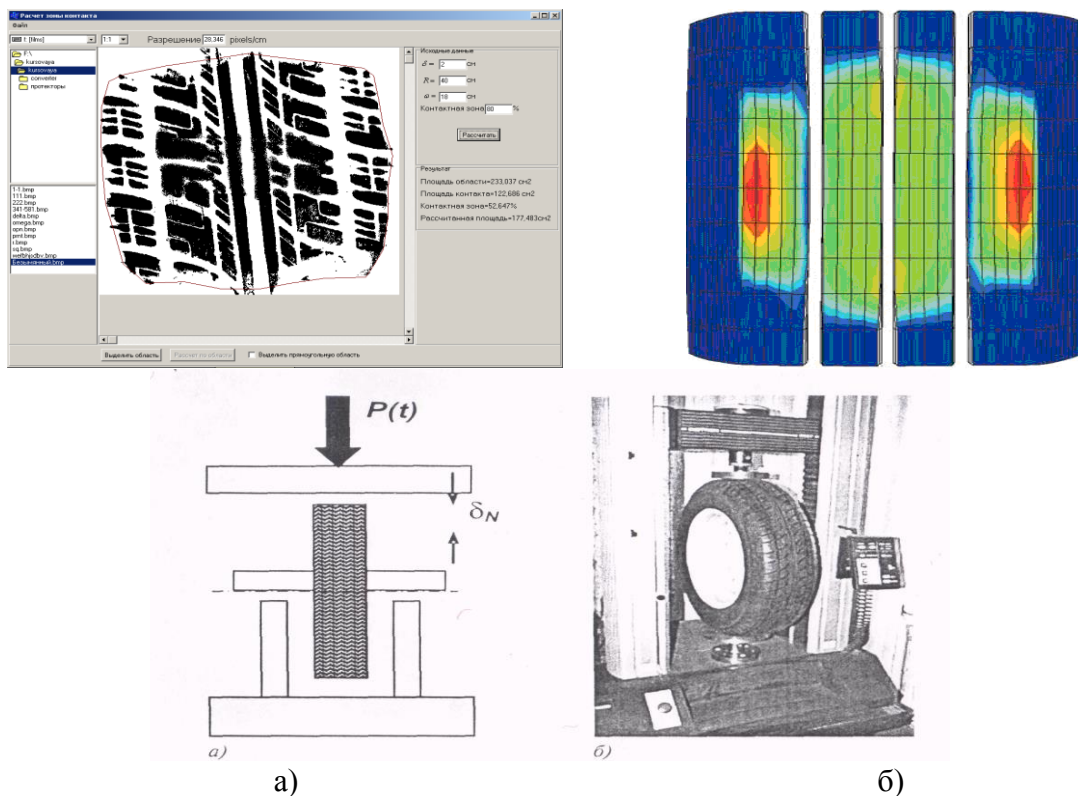


Рис. 1. Схемы испытания: а – экспериментальные результаты; б – численные расчеты

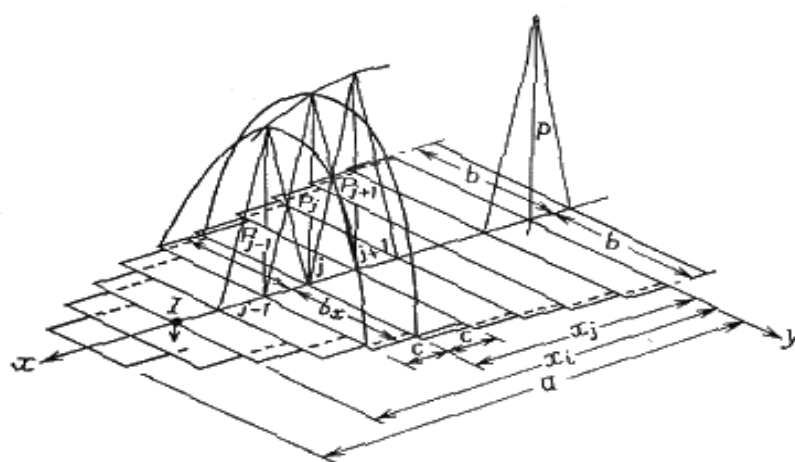


Рис. 2. Разбивка на граничные элементы [12]

В частности, рассмотрен случай для цилиндрических тел для случая плоской деформации, когда зону контакта можно аппроксимировать прямоугольником. Далее используя принцип суперпозиции, определяются напряжения, как в зоне контакта, так и за пределами ее.

Например, как для изотропного случая, в соответствии с решением Буссинеска, под влиянием постоянного давления по элементарному прямоугольнику размерами $2\Delta s$, $2\Delta t$ и с координатами s , t определяется зависимость перемещения при действующем давлении $p(x, y)$ (строится функция Грина) [12]

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi E'} \int_{|x-s|-\Delta s}^{|x-s|+\Delta s} \int_{|y-t|-\Delta t}^{|y-t|+\Delta t} \frac{p(s, t) ds dt}{\sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}}.$$

После интегрирования формула примет вид:

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi E'} p(s, t) \left\{ (|y-t| + \Delta t) \ln \frac{(|x-s| + \Delta s) + \sqrt{(|x-s| + \Delta s)^2 + (|y-t| + \Delta t)^2}}{(|x-s| - \Delta s) + \sqrt{(|x-s| - \Delta s)^2 + (|y-t| + \Delta t)^2}} + \right. \\ \left. + (|x-s| + \Delta s) \ln \frac{(|y-t| + \Delta t) + \sqrt{(|y-t| + \Delta t)^2 + (|x-s| + \Delta s)^2}}{(|y-t| - \Delta t) + \sqrt{(|y-t| + \Delta t)^2 + (|x-s| + \Delta s)^2}} + \right. \\ \left. + (|x-s| - \Delta s) \ln \frac{(|y-t| - \Delta t) + \sqrt{(|y-t| - \Delta t)^2 + (|x-s| - \Delta s)^2}}{(|y-t| + \Delta t) + \sqrt{(|y-t| + \Delta t)^2 + (|x-s| - \Delta s)^2}} \right\}.$$

Здесь ν – приведенный модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости.

Для расчета контакта ортотропных тел (в частности цилиндров) для плоской деформации строим функцию Грина исходя из работы [1]. Упругие постоянные и компоненты перемещения, относящиеся к разным телам, обозначим индексами 1 и 2. Предположим, что напряжения σ_{yy} и τ_{xy} , распределенные на границе полуплоскости, заданы следующим образом:

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} p(x), & -a \leq x \leq a, y = 0; \\ 0 & a < |x|; \end{cases} \\ \tau_{xy} = 0, \quad -\infty \leq x \leq \infty, \quad y = 0.$$

Находим для заданных выше граничных условий перемещение:

$$v^{(1)} = \left\{ -\frac{S_{22}}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \beta_1^2 \int_{-a}^a p(t) \ln \left| \frac{\beta_1}{h} (x-t) \right| dt + \frac{S_{22}}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \beta_2^2 \int_{-a}^a p(t) \ln \left| \frac{\beta_2}{h} (x-t) \right| dt - \right. \\ \left. - \frac{S_{12}}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \ln \frac{\beta_2}{\beta_1} P \right\}.$$

Аналогичное выражение можно написать для перемещения второго тела $v^{(2)}$ с заменой индекса 1 на 2. Сложив $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$, получим интегральное уравнение для определения давления $p(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \left\{ [(\beta_1 + \beta_2) S_{22}]^{(1)} + [(\beta_1 + \beta_2) S_{12}]^{(2)} \right\} \int_{-a}^a p(t) \ln |t-x| dt = f(x) + const.$$

Здесь, согласно [1], коэффициенты $\beta_i = 1/\gamma_i$,

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}}}, \text{ входящие в уравнение коэффициенты при}$$

плоской деформации равны:

$$S_{11} = \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_1}; \quad S_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2};$$

$$S_{12} = \frac{-\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}};$$

при плоском напряженном состоянии: $\nu_{j3} = \nu_{3j} = 0, \quad j = \overline{1,2}$;

$$E_x = E_1, \quad E_y = E_2; \quad \nu_{xy} = \nu_{12}.$$

Здесь E_j, G_{12}, ν – технические постоянные материала.

При контактном взаимодействии жесткого индентора с изотропным покрытием на изотропном основании строим функцию Грина, исходя из асимптотических формул [1]. Так производная от перемещений равна

$$2\mu_1 \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{2\mu_1} \frac{\partial V^\infty}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty} r^{k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{d}_i \int_{-a}^a p(t) \left(\frac{x-t}{h} \right)^{2i-1} dt,$$

где $2\mu_1 \frac{\partial V^\infty}{\partial x} = \frac{\kappa_1 + 1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{p(t)}{h} \left[\frac{1}{x-t} + \sum_{i=1}^{\infty} 2id_i \left(\frac{x-t}{h} \right)^{2i-1} \right] dt.$

Получаем интегральное уравнение в виде [1, с.135] с использованием асимптотических зависимостей:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p(t) k(x-t) dt = \frac{4\mu_1}{\kappa_1 + 1} f'(x),$$

где $k\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{1}{t-x} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2id_i^*}{h^{2i}} x^{2i-1}, \quad d_i^* = \frac{2\pi}{(\kappa_1 + 1)2i} \left[\sum_{k=1}^{\infty} r^{k+1} d_{ki} (-1)^{k+1} \right] + d_i; \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Здесь $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига; $\kappa = 3 - 4\nu, r = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ – отношение модулей сдвига

покрытия и основания (будем рассматривать случай $r < 1$), коэффициенты d_{ki} и d_i вычисляем или находим по таблице согласно [1], где также представлены остальные обозначения.

2. Определение напряжений и перемещений в объемном теле, заданной формы. Согласно опубликованным теоретическим зависимостям в работах [13, 14], перемещения в объемном теле можно записать в виде:

$$u_i = -\frac{1}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_3 \right), \quad i = 1, 2,$$

$$u_3 = -\frac{1}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial V}{\partial x_3} - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} V \right).$$

Полю перемещений отвечают следующие компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{11} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial V}{\partial x_3} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} dx_3,$$

$$\sigma_{22} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial V}{\partial x_3} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} dx_3,$$

$$\sigma_{33} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial V}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{12} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\mu}{2\pi(\lambda + \mu)} \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} dx_3,$$

$$\sigma_{12} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{23} = -\frac{x_3}{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

Данные формулы, выражающие перемещения и напряжения через одну гармоническую функцию $V(x)$, (исходя из решения Буссинеска) были выведены Н.М. Беляевым в 1924 г. Таким образом, перемещения и напряжения в упругом полубесконечном теле могут быть найдены по формулам Беляева, как только будет известна функция $V(x)$

$$V(x) = \iint_{\omega} \frac{p(y)}{R(y, x)} dy,$$

$$W(x) = \iint_{\omega} p(y) \ln(x_3 + R(y, x)) dy,$$

где $R(y, x) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2)^{1/2}$ – расстояние от точки наблюдения M с координатами (x_1, x_2, x_3) до точки приложения сосредоточенной силы.

Функции $V(x)$ и $W(x)$ называются соответственно потенциалом простого слоя и логарифмическим потенциалом (от трех переменных). В свою очередь, потенциал $V(x)$ может быть вычислен, как только будет известна плотность $p(x_1, x_2)$ распределения контактного давления.

Программная реализация. Разработан алгоритм и создана программа, реализующая определение напряжений и перемещений в объемном теле, заданной формы. Программа позволяет изменять размеры параллелепипеда, в котором находится исследуемое тело.

Для решения поставленной задачи был использован и успешно запрограммирован метод конечных элементов. Применялись прямоугольные конечные элементы. Используя метод конечных элементов можно произвести разбиение тела на достаточно маленькие элементы, для этого в программе память под все используемые массивы выделяется динамически.

На рис. 3 изображено главное окно программы, позволяющее задать размеры параллелепипеда, количество узлов, модуль Юнга, коэффициент Пуассона. Вектор шагов по осям вычисляется автоматически на основе размеров параллелепипеда и количества узлов, шаги принимаются равными по величине. На этом же экране производится загрузка исходного изображения для анализа. Оно изображено левее, а справа от него изображены конечные элементы и цвет каждого из них в соответствии с исходным изображением. Для определения давления используется показатель оттенка цвета, яркость и насыщенность не учитываются.

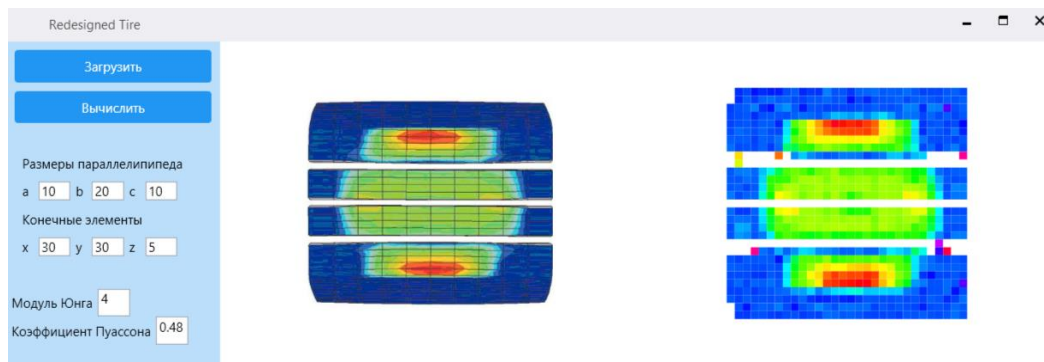


Рис. 3. Главное окно программы

При автоматическом распознавании цветов исходного изображения могут возникнуть неточности, которые можно исправить вручную. Для этого необходимо выбрать конечный элемент смежный с неправильным, и перетащить его цвет с помощью зажатой левой клавиши мыши на элемент, цвет которого нужно изменить. На рис. 4 изображены цвета конечных элементов до и после корректировки. После этого можно приступить к расчету напряжений и перемещений. Время работы программы зависит от количества КЭ и точности вычисления двойных и простых интегралов. Эти точности задаются внутри программы.

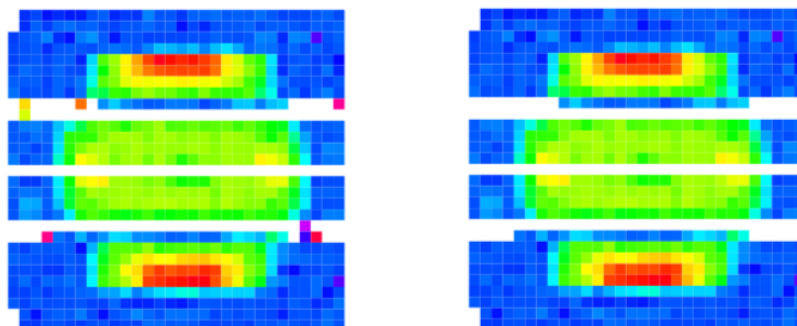


Рис. 4. Результат корректировки цветов

Для увеличения производительности программы было принято решение при вычислении интегралов задавать не точность вычисления, а количество разбиений областей интегрирования. Это позволяет получать достаточно точные результаты при небольших затратах времени. При использовании точности интегрирования много времени тратилось программой на подбор необходимого количества разбиений, для достижения заданной точности, и так для каждой точки. Для нахождения значений всех необходимых интегралов и производных использовались соответствующие численные методы. Для нахождения двойного интеграла была использована кубатурная формула Симпсона, а для нахождения простого интеграла – квадратурная формула Симпсона. Для нахождения производных применялись левая, правая и центральная производные, использовались сплайны.

Результаты вычислений, а также исходные показатели давления, выводятся под изображениями. На графиках можно просматривать изменения значений по каждой оси на различных срезах. В выпадающих списках можно задавать параметры среза. Графики обновляются автоматически при изменении параметров.

Значения выведенных результатов можно экспортировать в файл в формате .csv в виде таблицы с помощью кнопки «Вывести в таблицу». При нажатии на эту кнопку будет создан файл, содержащий значения выбранного показателя по координатам X и Y для заданного Z. Для примера на рисунке 6, при нажатии на кнопку «Вывести в таблицу» будет создан файл под названием «Sig11 Z=0.csv». Его содержание в уменьшенном виде изображено на рис. 7. Данную таблицу можно использовать для дальнейшего анализа с помощью возможностей Excel или какой-либо иной программы. Например, с помощью Excel можно построить трехмерных график значений на основе таблицы. График для созданного файла представлен на рис. 8.

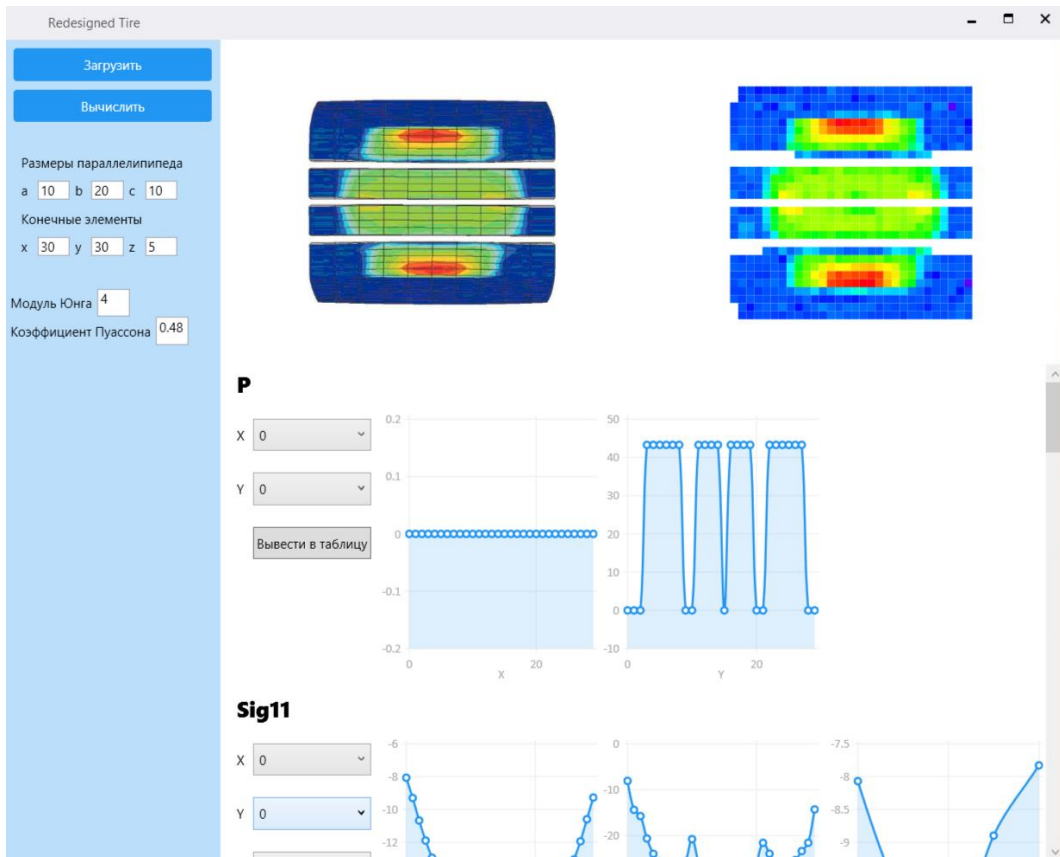


Рис. 5. Вывод результатов

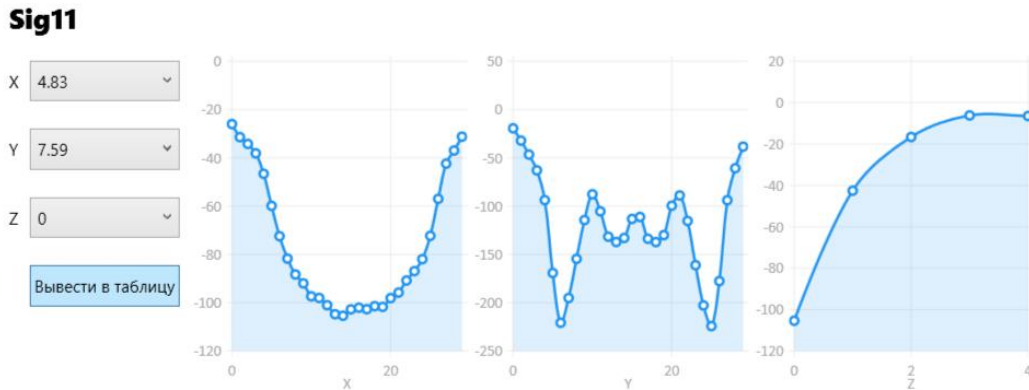


Рис. 6. Данные для выбранных срезов по разным осям

A1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	0	0.34	0.69	1.03	1.38	1.72	2.07	2.41	2.76	3.1	3.45	3.79	4.14	4.48	4.83	5.17	5.52	5.86	6.21	6.55	6.9	7.24	7.59	7.93	8.28	8.62	8.97	9.31	9.66	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
2	0	-8.009	-9.3043	-10.6077	-11.901	-12.947	-13.874	-14.726	-15.524	-16.28	-17.003	-17.71	-18.41	-19.012	-19.547	-19.409	-19.345	-19.216	-19.006	-18.699	-18.276	-17.763	-17.164	-16.488	-15.74	-14.925	-14.035	-13.075	-12.049	-10.952	-9.791	-8.557	-7.251	-5.881	-4.453	-2.975	-1.448	0.13	1.666	3.191	4.707	6.214	7.711	9.198	10.675	12.142	13.599	15.046	16.483	17.91	19.328	20.735	22.132	23.519	24.896	26.263	27.62	28.969	30.306	31.633	32.95	34.257	35.544	36.816	38.073	39.315	40.542	41.754	42.941	44.103	45.241	46.355	47.445	48.511	49.553	50.571	51.565	52.535	53.481	54.403	55.301	56.175	57.025	57.851	58.653	59.431	60.185	60.915	61.621	62.303	62.961	63.595	64.205	64.791	65.353	65.891	66.403	66.889	67.351	67.787	68.207	68.611	69.009	69.393	69.763	70.119	70.461	70.789	71.103	71.403	71.689	71.961	72.219	72.463	72.693	72.909	73.111	73.299	73.473	73.633	73.779	73.911	74.029	74.133	74.223	74.299	74.361	74.409	74.443	74.463	74.469	74.461	74.439	74.403	74.353	74.289	74.211	74.119	74.013	73.893	73.759	73.611	73.449	73.273	73.083	72.879	72.661	72.429	72.183	71.923	71.649	71.361	71.059	70.743	70.413	70.069	69.711	69.339	68.953	68.553	68.139	67.711	67.269	66.813	66.343	65.859	65.361	64.849	64.313	63.763	63.199	62.621	62.029	61.423	60.803	60.169	59.521	58.859	58.183	57.493	56.789	56.071	55.339	54.593	53.833	53.059	52.271	51.469	50.653	49.823	48.979	48.121	47.249	46.363	45.463	44.549	43.621	42.679	41.723	40.753	39.769	38.771	37.759	36.733	35.693	34.643	33.583	32.513	31.433	30.343	29.243	28.133	27.013	25.883	24.743	23.593	22.433	21.263	20.083	18.893	17.693	16.483	15.263	14.033	12.793	11.543	10.283	9.013	7.733	6.443	5.143	3.833	2.513	1.183	-0.157	-1.477	-2.787	-4.087	-5.377	-6.657	-7.927	-9.187	-10.437	-11.677	-12.907	-14.127	-15.337	-16.537	-17.727	-18.907	-20.077	-21.237	-22.387	-23.527	-24.657	-25.777	-26.887	-27.987	-29.077	-30.157	-31.227	-32.287	-33.337	-34.377	-35.407	-36.427	-37.437	-38.437	-39.427	-40.407	-41.377	-42.337	-43.287	-44.227	-45.157	-46.077	-46.987	-47.887	-48.777	-49.657	-50.527	-51.387	-52.237	-53.077	-53.907	-54.727	-55.537	-56.337	-57.127	-57.907	-58.677	-59.437	-60.187	-60.927	-61.657	-62.377	-63.087	-63.787	-64.477	-65.157	-65.827	-66.487	-67.137	-67.777	-68.407	-69.027	-69.637	-70.237	-70.827	-71.407	-71.977	-72.537	-73.087	-73.627	-74.157	-74.677	-75.187	-75.687	-76.177	-76.657	-77.127	-77.587	-78.037	-78.477	-78.907	-79.327	-79.737	-80.137	-80.527	-80.907	-81.277	-81.637	-81.987	-82.327	-82.657	-82.977	-83.287	-83.587	-83.877	-84.157	-84.427	-84.687	-84.937	-85.177	-85.407	-85.627	-85.837	-86.037	-86.227	-86.407	-86.577	-86.737	-86.887	-87.027	-87.157	-87.277	-87.387	-87.487	-87.577	-87.657	-87.727	-87.787	-87.837	-87.877	-87.907	-87.927	-87.937	-87.937	-87.927	-87.907	-87.877	-87.837	-87.787	-87.727	-87.657	-87.577	-87.487	-87.387	-87.277	-87.157	-87.027	-86.887	-86.737	-86.577	-86.407	-86.227	-86.037	-85.837	-85.627	-85.407	-85.177	-84.937	-84.687	-84.427	-84.157	-83.877	-83.587	-83.287	-82.977	-82.657	-82.327	-81.987	-81.637	-81.277	-80.907	-80.527	-80.137	-79.737	-79.327	-78.907	-78.477	-78.037	-77.587	-77.127	-76.657	-76.177	-75.687	-75.187	-74.677	-74.157	-73.627	-73.087	-72.537	-71.977	-71.407	-70.827	-70.237	-69.637	-69.027	-68.407	-67.777	-67.137	-66.487	-65.827	-65.157	-64.477	-63.787	-63.087	-62.377	-61.657	-60.927	-60.187	-59.437	-58.677	-57.907	-57.127	-56.337	-55.537	-54.727	-53.907	-53.087	-52.257	-51.417	-50.567	-49.707	-48.837	-47.957	-47.067	-46.167	-45.257	-44.337	-43.407	-42.467	-41.517	-40.557	-39.587	-38.607	-37.617	-36.617	-35.607	-34.587	-33.557	-32.517	-31.467	-30.407	-29.337	-28.257	-27.167	-26.067	-24.957	-23.837	-22.707	-21.567	-20.417	-19.257	-18.087	-16.907	-15.717	-14.517	-13.307	-12.087	-10.857	-9.617	-8.367	-7.107	-5.837	-4.557	-3.267	-1.967	-0.657	0.657	1.957	3.247	4.527	5.797	7.057	8.307	9.547	10.777	11.997	13.207	14.407	15.597	16.777	17.947	19.097	20.237	21.367	22.487	23.597	24.697	25.787	26.867	27.937	28.997	30.047	31.087	32.117	33.137	34.147	35.147	36.137	37.117	38.087	39.047	39.997	40.937	41.867	42.787	43.697	44.597	45.487	46.367	47.237	48.097	48.947	49.787	50.617	51.437	52.247	53.047	53.837	54.617	55.387	56.147	56.897	57.637	58.367	59.087	59.797	60.497	61.187	61.867	62.537	63.197	63.847	64.487	65.117	65.737	66.347	66.947	67.537	68.117	68.687	69.247	69.797	70.337	70.867	71.387	71.897	72.397	72.887	73.367	73.837	74.297	74.747	75.187	75.617	76.037	76.447	76.847	77.237	77.617	77.987	78.347	78.697	79.037	79.367	79.687	79.997	80.297	80.587	80.867	81.137	81.397	81.647	81.887	82.117	82.337	82.547	82.747	82.937	83.117	83.287	83.447	83.597	83.737	83.867	83.987	84.097	84.197	84.287	84.367	84.437	84.497	84.547	84.587	84.617	84.637	84.647	84.647	84.647	84.637	84.617	84.587	84.547	84.497	84.437	84.367	84.287	84.197	84.097	83.987	83.867	83.737	83.597	83.447	83.287	83.117	82.937	82.747	82.547	82.337	82.117	81.887	81.647	81.397	81.137	80.867	80.587	80.297	79.997	79.687	79.367	79.037	78.697	78.347	77.987	77.617	77.237	76.847	76.447	76.037	75.617	75.187	74.747	74.297	73.837	73.367	72.887	72.397	71.897	71.387	70.867	70.337	69.797	69.247	68.687	68.117	67.537	66.947	66.347	65.737	65.117	64.487	63.847	63.197	62.537	61.867	61.187	60.497	59.797	59.087	58.367	57.637	56.897	56.147	55.387	54.617	53.837	53.047	52.247	51.437	50.617	49.787	48.947	48.097	47.237	46.367	45.487	44.597	43.697	42.787	41.867	40.937	39.997	39.047	38.087	37.117	36.137	35.147	34.147	33.137	32.117	31.087	30.047	29.087	28.117	27.137	26.147	25.147	24.137	23.117	22.087	21.047	20.087	19.117	18.137	17.147	16.147	15.137	14.117	13.087	12.047	11.087	10.117	9.137	8.147	7.147	6.137	5.117	4.087	3.047	2.087	1.117	0.137	-0.847	-1.817	-2.777	-3.727	-4.667	-5.587	-6.497	-7.397	-8.287	-9.167	-10.037	-10.897	-11.747	-12.587	-13.417	-14.237	-15.047	-15.847	-16.637	-17.417	-18.187	-18.947	-19.697	-20.437	-21.167	-21.887	-22.607	-23.317	-24.017	-24.707	-25.387	-26.057	-26.717	-27.367	-28.007	-28.637	-29.257	-29.867	-30.467	-31.057	-31.637	-32.207	-32.767	-33.317	-33.857	-34.387	-34.907	-35.417	-35.917	-36.407	-36.887	-37.357	-37.817	-38.267	-38.707	-39.137	-39.557	-39.967	-40.367	-40.757	-41.137	-41.507	-41.867	-42.217	-42.557	-42.887	-43.207	-43.517	-43.817	-44.107	-44.387	-44.657	-44.917	-45.167	-45.407	-45.637	-45.857	-46.067	-46.267	-46.457	-46.637	-46.807	-46.967	-47.117	-47.257	-47.387	-47.507	-47.617	-47.717	-47.807	-47.887	-47.957	-48.017	-48.067	-48.107	-48.137	-48.157	-48.167	-48.167	-48.157	-48.137	-48.107	-48.067	-48.017	-47.957	-47.887	-47.807	-47.717	-47.617	-47.507	-47.387	-47.257	-47.117	-46.967	-46.807	-46.637	-46.457	-46.267	-46.067	-45.857	-45.637	-45.407	-45.167	-44.917	-44.657	-44.387	-44.107	-43.817	-43.517	-43.207	-42.887	-42.557	-42.217	-41.867	-41.507	-41.137	-40.757	-40.367	-39.967	-39.557	-39.137	-38.707	-38.267	-37.817	-37.357	-36.887	-36.407	-35.917	-35.417	-34.907	-34.387	-33.857	-33.317	-32.767	-32.207	-31.637	-31.047	-30.437	-29.817	-29.187	-28.547	-27.897	-27.237	-26.567	-25.887	-25.197	-24.497	-23.787	-23.067	-22.337	-21.597	-20.847	-20.087	-19.317	-18.537	-17.747	-16.947	-16.137	-15.317	-14.487	-13.647	-12.797	-11.937	-11.067	-10.187	-9.297	-8.397	-7.487	-6.567	-5.637	-4.697	-3.747	-2.787	-1.817	-0.837	0.147	1.117	2.087	3.047	4.087	5.117	6.137	7.147	8.147	9.137	10.117	11.087	12.047	13.087	14.117	15.137	16.147	17.147	18.137	19.117	20.087	21.047	22.087	23.117	24.137	25.147	26.147	27.137	28.117	29.087	29.997	30.937	31.867	32.787	33.697	34.597	35.487	36.367	37.237	38.097	38.947	39.787	40.617	41.437	42.247	43.047	43.837	44.617	45.387	46.147	46.897	47.637	48.367	49.087	49.797	50.497	51.187	51.867	52.537	53.197	53.847	54.487	55.117	55.737	56.347	56.947	57.537	58.117	58.687	59.247	59.797	60.337	60.867	61.387	61.897	62.397	62.887	63.367	63.837	64.297	64.747	65.187	65.617	66.037	66.447	66.847

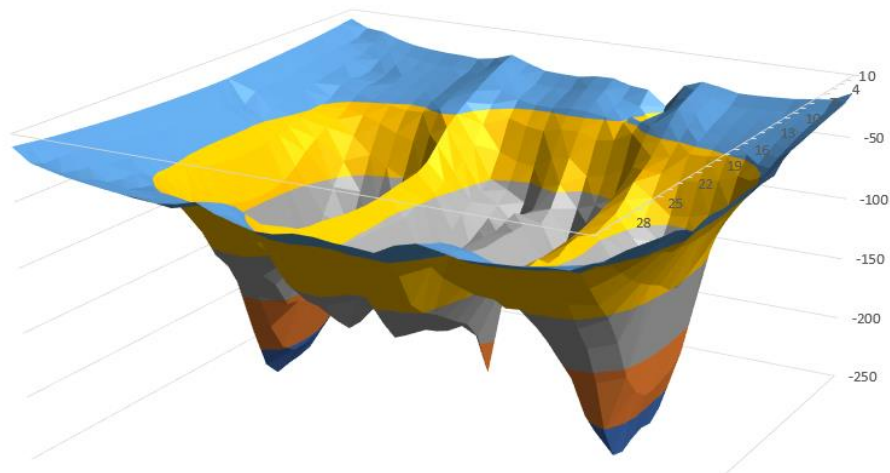


Рис. 8. Трехмерный график значений σ_{11} для $z = 0$

Выводы. Таким образом, приведенные в этой статье подход и результаты показали, возможность численного расчета контактного взаимодействия тел из композитов, определения напряженно-деформированное состояние при сложных граничных условиях, например, для исследования качения цилиндров из ортотропных материалов, что дает возможность инженерного расчета взаимодействия «шина–дорожное покрытие».

ЛИТЕРАТУРА

1. Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский // Минск: Наука. – 1988. – С. 280.
2. Галин, Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 380 с.
3. Горячева, И. Г. Механика контактного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
4. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – М.: Наука, 1967. – 403 с.
5. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
6. Ворович, И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
7. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1975. – 690 с.
8. Новацкий, В. Теории упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 256 с.
9. Pleskachevsky, Yu. M. Computational Methods in Contact Mechanics III / Yu. M. Pleskachevsky, V. V. Mozharovsky, Yu. F. Rouba // Proc. Int. Conf., Madrid; July 3–5, 1997. – P. 363–372.
10. Рыжов, С. А. Проектирование шин с использованием программного комплекса ABAQUS / С. А. Рыжов, К. А. Ильин, А. Н. Варюхин // САПР и графика. – 2006. – № 1. – С. 20–40.
11. Шилько, С. В. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / С. В. Шилько, В. В. Можаровский // Доклады Белорусского конгресса по механике: сборник научных трудов. – Мн., 2007. – С. 135–142.
12. Справочник по триботехнике / под ред. М. Хебды. – М: Машиностроение, 1990. – Т. 2.– 416 с.
13. Можаровский, В. В. Численная реализация методики по определению напряжений и перемещений в объемном теле применительно к техническим приложениям /

В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков // Известия Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2014. – № 6(87). – С. 161–165.

14. Аргатов, И. И. Основы теории упругого дискретного контакта / И. И. Аргатов, Н. Н. Дмитриев. – СПб.: Политехника, 2003. – 233 с.

Поступила: 26.01.2021

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ГИБКОГО КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО СЛЕДЯЩЕЙ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ

Холодарь Б. Г.

Брестский государственный технический университет, Брест

При геометрически-линейном подходе к задаче о нагружении консольного стержня поперечной силой, приложенной на свободном конце, максимальные значения момента, напряжений и деформаций возникают в заделке. Ситуация, однако, меняется в задаче о больших перемещениях стержней, когда допущения такого подхода нарушаются и возникает необходимость использования теории гибких стержней. При этом задача об изгибе гибкого линейно-упругого стержня на участке, свободном от распределенной нагрузки, сводится к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, решение которого выражается через эллиптические интегралы [1, 2]. Несмотря на наличие аналитического решения, получение результатов сопряжено с необходимостью приближенного определения некоторых числовых параметров, что можно выполнить, например, с использованием средств вычислительной техники.

Ниже рассматривается задача о нагружении гибкого стержня следящей поперечной силой, остающейся перпендикулярной осевой линии стержня при его изгибе. Решение строится путем численного интегрирования двух исходных уравнений первого порядка. При этом ролью возникающего в сечениях изогнутого стержня продольного усилия пренебрегаем.

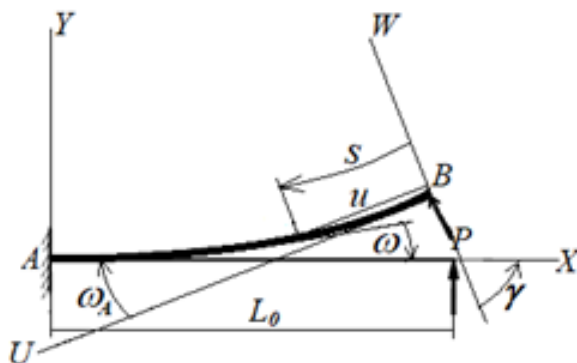


Рис. 1. Координатная система и обозначения

Задачу удобно рассматривать не в исходных координатах XY , а в подвижных координатах UW с началом на свободном торце стержня [1], поскольку при этом момент в точках оси не зависит от прогиба и однозначно определяется через координату u : $M(u) = P \cdot u$. Вводим в рассмотрение также дуговую координату S вдоль изогнутой оси стержня и угол наклона касательной $\omega(u)$ к оси U (рис.1).

По определению кривизны плоской кривой $\kappa = \frac{d\omega}{ds}$ и из геометрических соотношений

$$\frac{du}{ds} = \cos\omega, \quad \frac{dw}{ds} = \sin\omega,$$

находим

$$K(u) = \int_0^u \kappa du = \int_0^\omega \cos \omega d\omega = \sin \omega,$$

что устанавливает зависимость между величинами ω и u : $\omega = \arcsin K$.

В соответствии с гипотезой плоских сечений связь кривизны упругой оси с действующим в сечении стержня моментом $M = Pu$ имеет вид

$$\kappa = \frac{M}{EJ},$$

что приводит к зависимости

$$K = \frac{Pu^2}{2EJ} = \frac{PL^2}{2EJ} \xi^2 = k_u^2 \xi^2, \quad (1)$$

где $\xi = u/L_0$, $k_u = \sqrt{\frac{P}{2EJ}} L$; E – модуль упругости материала; J – момент инерции сечения.

Выразив $ds = \frac{du}{\cos \omega} = \frac{du}{\sqrt{1-K^2}}$, через интегралы

$$\zeta = \frac{s}{L} = \int_0^u \frac{du}{\cos \omega} = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{1-k_u^4 \xi^4}}, \quad w = \int_0^\xi tg \omega d\xi$$

находим связь между координатами U , W и S .

При определении величин интегралов $\zeta = \int_0^u \frac{du}{\cos \omega}$ и $w = \int_0^\xi tg \omega d\xi$ функции $1/\cos \omega$ и $tg \omega$ аппроксимировались кубическими сплайнами по координате u , а их последующее интегрирование выполнялось в аналитической форме по участкам разбиения $u_j \leq u \leq u_{j+1}$. Итерационное определение координаты u , при которой для заданного k_u достигается значение $S = 1,0$ или значение $\omega = \pi/2$, вызывает необходимость в использовании шага различной длины.

Найдя величины u_A и w_A , а также угол поворота γ осей UW относительно исходных XU , по формулам

$$\begin{aligned} x_j &= (u_A - u_j) \cdot \sin \gamma + (w_A - w_j) \cdot \cos \gamma, \\ y_j &= (u_A - u_j) \cdot \cos \gamma - (w_A - w_j) \cdot \sin \gamma, \end{aligned}$$

определяем положение точек изогнутой оси стержня.

Для общего представления о поведении стержня при произвольных уровнях нагрузки удобно от моментов перейти к безразмерной характеристике напряженно-деформированного состояния материала – деформации материала наружного растянутого слоя сечений стержня в точках его упругой оси.

С этой целью примем, что максимально допустимый момент равен значению M_0 , составляющему некоторую долю от предельного упругого момента $M_0 = \psi \cdot \sigma_T W$, где W – момент сопротивления сечения, ψ – уровень допустимых напряжений относительно напряжений текучести материала σ_T . При геометрически-линейном подходе ему бы соответствовала сила $P_0 = M_0 / L_0$, так что далее имеем $0 < P \leq P_0$. Текущее значение P можно представить как $P = k_p P_0$ при коэффициенте k_p в интервале $0 \leq k_p \leq 1,0$, а соответствующая ей деформация ε выразится тогда через деформацию текучести материала $\varepsilon_T = \sigma_T / E$ как $\varepsilon = \psi k_p \xi \cdot \varepsilon_T$.

В нашем случае расчеты проведены при следующих числовых данных: $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T = 1 \cdot 10^5$ МПа, $L_0 = 100$ см, $b = 1,0$ см, $h = 0,25$ см (прямоугольное сечение с шириной b и высотой h). При этом $\varepsilon_T = 1,0$, вследствие чего задание упругой области работы конкретного материала может быть выполнено через величину коэффициента ψ .

При невысоких значениях ψk_p возможный вид деформированной оси стержня соответствует рис. 1. С ростом нагрузки угол ω_A становится больше 90° , зависимость $S(u)$ приобретает неоднозначность, а на стержне появляется участок, на котором изгибающий момент имеет одинаковые значения в точках, симметричных относительно точки максимального момента $S(\omega = \pi / 2) < 1$, в силу чего изогнутая ось стержня также приобретает

соответствующую симметрию (рис. 2). При нагрузках, для которых реализуются случаи $\omega = \pi n / 2$, величина ζ становится равной $\zeta_n = 1 / n$ для последовательных $n = 1, 2, \dots$, а стержень делится на n одинаковых по форме участков длиной L_0/n .

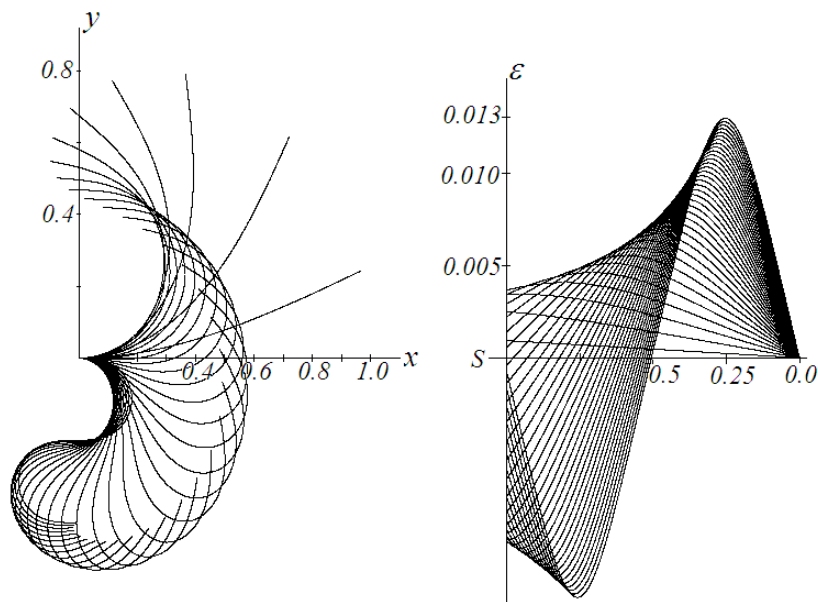


Рис. 2. Формы упругой оси и максимальные деформации в сечениях стержня

При $\omega_A = \pi$ момент в заделке меняет знак, и кривая $y(x)$ приобретает перегибную [1] форму равновесия, а при $\omega_A = 2\pi$ образует изогнутую ось с четырьмя участками длиной $L_0/4$. Формы оси изогнутого стержня при $0 \leq \omega_A \leq 2\pi$, когда кривая $y(x)$ имеет участки как положительной, так и отрицательной кривизны, видны на рисунке. Распределение деформаций в поверхностном слое стержня по координате S при уровне нагрузки $0 \leq \psi k_p \leq 0,06(6)$ дает представление о положении наиболее нагруженных сечений стержня. По этим данным на рис. 3 построены значения максимальных (квадратики) и минимальных (ромбики) относительных моментов $m = M/M_T = \varepsilon/\varepsilon_T$ в стержне, а также момента в его заделке (кружки) в зависимости от уровня приложенной силы.

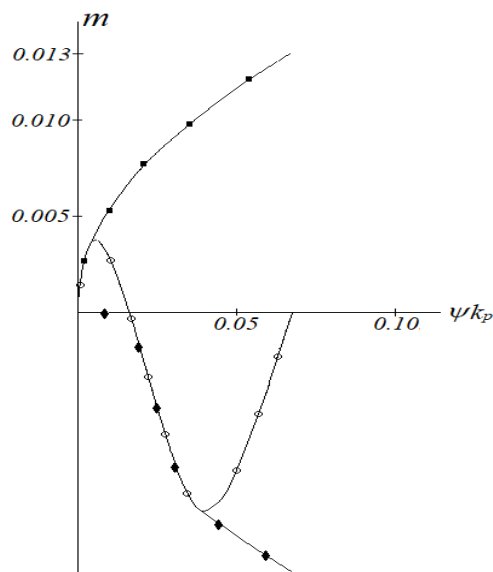


Рис. 3. Относительные моменты в зависимости от нагрузки

Практический интерес представляют как положение нагруженного торца стержня, так и положение на стержне сечений с максимальным изгибающим моментом. Эти сечения при $\omega_A > \pi/2$ смещаются из положения $\zeta = 1$ внутрь стержня в положения $\zeta < 1$. Параметры, соответствующие углу $\omega = \pi/2$, далее снабжены индексом «90».

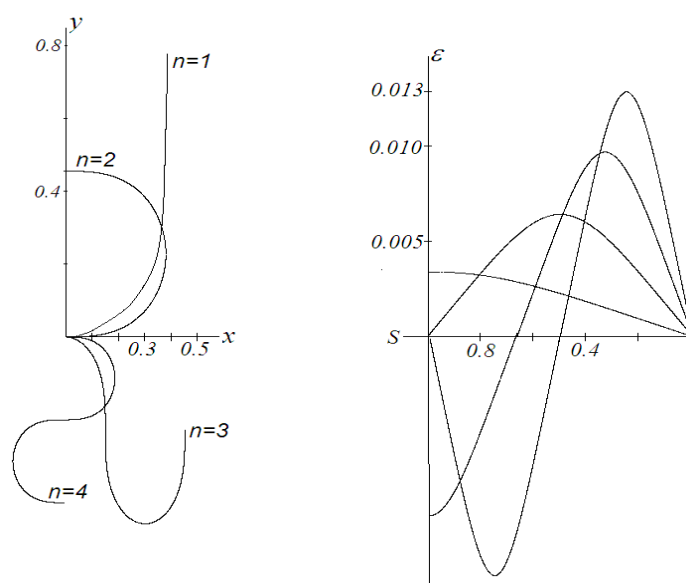


Рис. 4. Упругая ось и деформации для стандартных кривых

Для нагрузки, соответствующей значениям $n=1, 2, 3, 4$, на рис. 4 показаны стандартные формы упругой линии. Величины расчетных параметров приведены в табл. 1. Обращают на себя внимание закономерности в представленных данных. Появление коэффициента $1/24$ в таблице связано с выражениями для моментов инерции и сопротивления прямоугольного сечения.

Таблица 1 – Числовые параметры к стандартным формам упругой оси

n	$\zeta_{90} = 1/n$	$\varepsilon/\varepsilon_T = 0,0032275 \cdot n$	$\psi k_p = n^2/24$	$\zeta_{90} = 0,7746/n$
1	1	0,0032275	0,00416(6)	0,77460
2	1/2	0,0064550	0,01666(6)	0,38730
3	1/3	0,0096825	0,037500	0,25820
4	1/4	0,0129100	0,06666(6)	0,19365

Эти результаты позволяет легко представить и построить форму изогнутой оси стержня – при заданном значении коэффициента k_p нужно провести расчет формы упругой оси для зоны $0 < \omega \leq \pi/2$ и далее воспользоваться свойствами симметрии и антисимметрии кривых.

По рис. 2 можно увидеть, что в зоне максимального момента нормальная сила в сечении равна или близка к приложенной торцевой. Соответствующие однородные напряжения сжатия составляют весьма малую долю от изгибных ($\sigma_c/\sigma_{II} = h / 6L_0\zeta_{90}$) и не выходят за рамки принятых допущений линейной теории, поэтому предположение о возможности пренебрежения нормальной компонентой силы в сечении можно считать оправданным.

С использованием представлений о симметрии участков упругой оси решается и задача о напряженно-деформированном состоянии гибкого стержня при наличии (кроме

следящей силы) дополнительного сосредоточенного момента M_B , приложенного на торце стержня. Конкретно был взят случай пропорциональной связи между приложенными торцевыми силовыми факторами: $M_B = k_M \cdot P \cdot h$. Расчеты проведены при $M_B \cdot P > 0$.

Особенностью задачи сравнительно с рассмотренной выше является появление участка стержня с положительной кривизной при отрицательной величине координаты u , лежащей в интервале $-u_0 < u < 0$, где $u_0 = k_M \cdot h$. Форма упругой оси для двух значений коэффициента пропорциональности $k_M = 1,5$ (слева) и $k_M = 7,5$ (справа) показана на рис. 5.

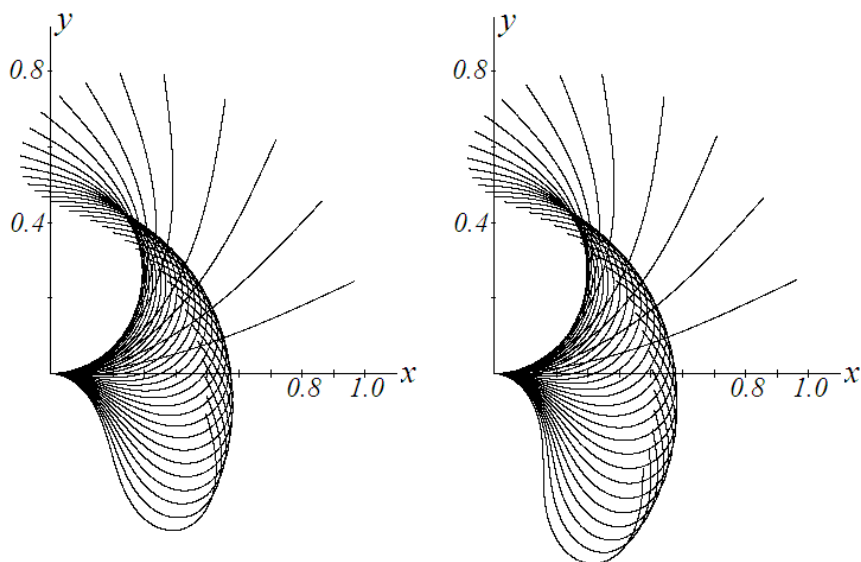


Рис. 5. Влияние торцевого момента на форму упругой оси стержня

Число шагов нагружения и величина поперечной силы на каждом шаге в обоих случаях одинаковы. Для данного рисунка величина шага вдвое ниже, чем для рис. 2. Можно отметить, что добавление торцевого момента при $M_B \cdot P > 0$ на всех уровнях нагружения увеличивает кривизну оси стержня как в данном примере, так и сравнительно с предыдущей задачей.

Использованная методика решения применима и при любой нелинейно-упругой зависимости между напряжениями и деформациями материала. Для этого достаточно трансформировать выражение (1) применительно к выбранному описанию диаграммы $\sigma(\varepsilon)$. Естественно, это не всегда можно выполнить в аналитической форме.

Если воспользоваться известной зависимостью $\sigma = A\varepsilon^m$, то вместо (1) получаем

$$K = \left(\frac{P}{AJ} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot u^{\frac{m+1}{m}}, \quad \text{при} \quad J = \frac{2b}{m+2} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^{m+2}.$$

Для связи с предыдущими расчетами принято $A = E/m$.

На рис. 6 показаны кривые $u(x)$ для $m = 0,75$ и $m = 0,50$ при одинаковом шаге нагрузки P . Ее наибольшему значению для случая $m = 1$ соответствует форма упругой линии, которая находилась бы между стандартными кривыми при $n = 3$ и $n = 4$ на рис. 4. Это связано с тем, что с уменьшением параметра m крутизна кривой $\sigma(\varepsilon)$ быстро нарастает (жесткость материала значительно увеличивается).

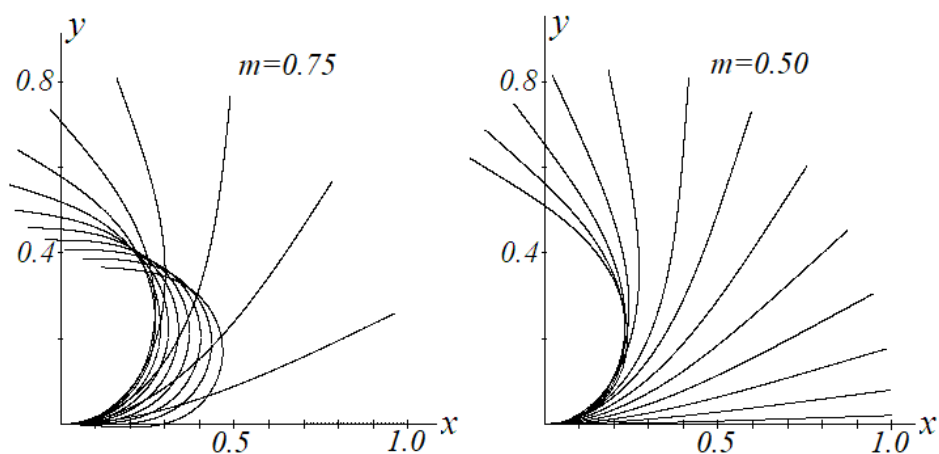


Рис. 6. Формы упругой оси для нелинейного материала

Выводы. Присутствие торцевого момента M_B в случае нелинейно-упругого материала не вносит дополнительных особенностей в развитие напряженно-деформированного состояния стержня сравнительно со случаем линейной упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев, С. Д. Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев [и др.] ; под ред. С. Д. Пономарева. – Том 1. – М.: ГНТИ машиностроительной литературы, 1956. – 884 с.
2. Босаков, С. В. К расчету гибких упругих стержней / С. В. Босаков // Строительная механика и расчет сооружений. – 2013. – № 2(247). – С. 2–5.

Поступила: 26.01.2021

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ И ВЯЗКОУПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ШИННЫХ РЕЗИН

¹Шилько С. В., ¹Дробыш Т. В., ¹Петроковец Е. М., ¹Сазанков А. П.,
²Хотько А. В.

¹Государственное научное учреждение «Институт механики металлополимерных систем имени В.А. Белого» НАН Беларуси, Гомель

²Открытое акционерное общество «Белишина», Бобруйск

Введение. С позиций механики автомобильная шина представляет собой геометрически сложное изделие из резинокордного композита, матричный материал которого (резина), являясь эластомером, допускает большие упругие деформации и при этом обладает определенной вязкостью [1, 2]. Повышение конкурентоспособности отечественных автомобильных шин основано на расчетной оптимизации геометрических параметров слоистой конструкции шины, характеристик армирования слоев, состава резиновых смесей и технологического режима изготовления указанных изделий, исходя из заданных технических показателей [3]. На современном уровне это достигается проведением конечноэлементного анализа напряженно-деформированного состояния автомобильных шин, что предполагает получение исходных данных о свойствах шинных резин, прежде всего, модулей упругости и реологических параметров. Для аналитического описания температурно-временных эффектов, возникающих при циклическом нагружении шинных резин с частотой порядка 10 Гц, привлекается теория вязкоупругого деформирования. Это позволяет прогнозировать диссипативные потери, определяющие сопротивление качению и тепловыделение (саморазогрев) шин при эксплуатации. Однако практикуемые механические и трибоиспытания являются либо весьма длительными и дорогостоящими, либо не в полной мере отражают условия эксплуатации рассматриваемых резинотехнических изделий.

Целью исследования является апробация методики ускоренного определения упругих и вязкоупругих характеристик шинных резин.

В статье приведены результаты механических испытаний шинных резин при циклическом растяжении с последующей релаксацией.

Методика эксперимента. В проектировочных и поверочных расчетах автомобильных шин используются модели гиперупругих материалов (например, описание Муни-Ривлина [4]) и линейные модели вязкоупругого деформирования наследственного типа [5, 6] (модель Прони и т. п.), имеющиеся в программной среде конечноэлементного анализа MSC.Marc [7, 8]. При идентификации этих моделей следует планировать лабораторные исследования деформационных свойств шинных резин таким образом, чтобы обеспечить соответствие напряженно-деформированного состояния образцов резин и функциональных элементов автомобильных шин (протектора, брекера и др.).

Нужно учитывать, что деформации рассматриваемых материалов при качении шин достаточно велики – в радиальных шинах они достигают 20 %, а для шин диагональной конструкции характерны деформации до 40 %. Не менее важно выявление реологических особенностей резин выбором условий тестирования, близких эксплуатационным нагрузочно-скоростным режимам. Так, известно, что при работе шин происходит чередование быстрого циклического растяжения и относительно продолжительной стадии релаксации (отдыха).

Из вышесказанного следует целесообразность испытаний шинных резин в виде комбинации квазистатического малоциклового растяжения и последующей кратковременной релаксации с регулируемой дискретностью получаемой диаграммы «напряжение – время».

С этой целью могут быть использованы возможности современного автоматизированного испытательного оборудования, в частности, машин для механических испытаний материалов типа Instron 5567 (Великобритания), показанной на рис. 1, а. Достоинством этой модели является прецизионный механический привод, возможность программирования процедуры испытаний, автоматическая калибровка силоизмерителя и высокая точность регистрации усилий во всем диапазоне удлинений эластомерных образцов при одноосном растяжении. Такие возможности позволяют рационализировать весьма трудоемкую и длительную процедуру характеристики вязкоупругих свойств шинных резин в результате значительного уменьшения числа образцов и затрат времени без потери точности экспериментальных данных.

Для апробации методики экспериментального исследования были взяты 100 стандартных образцов 20-ти составов шинных резин производства ОАО «Белшина» (по 5 образцов каждой смеси) в виде двухсторонних лопаток размером 115×6×2 мм, изготовленные при помощи штанцевого ножа (рис. 1, б). Условия испытаний: температура воздуха 22 °С, относительная влажность воздуха 50 %, давление 750 мм рт. ст. Эти образцы были испытаны на циклическое растяжение в кинематическом режиме (при заданной амплитуде перемещения активного захвата машины) с максимально возможной скоростью нагружения 500 мм/мин с последующей релаксацией, начинающейся в момент достижения амплитудного значения перемещения 10-го цикла. Длительность релаксации для всех резиновых смесей составляла 10 мин, что было достаточным для характеристики стадии существенного изменения растягивающих напряжений во времени (далее происходило незначительное уменьшение напряжений).

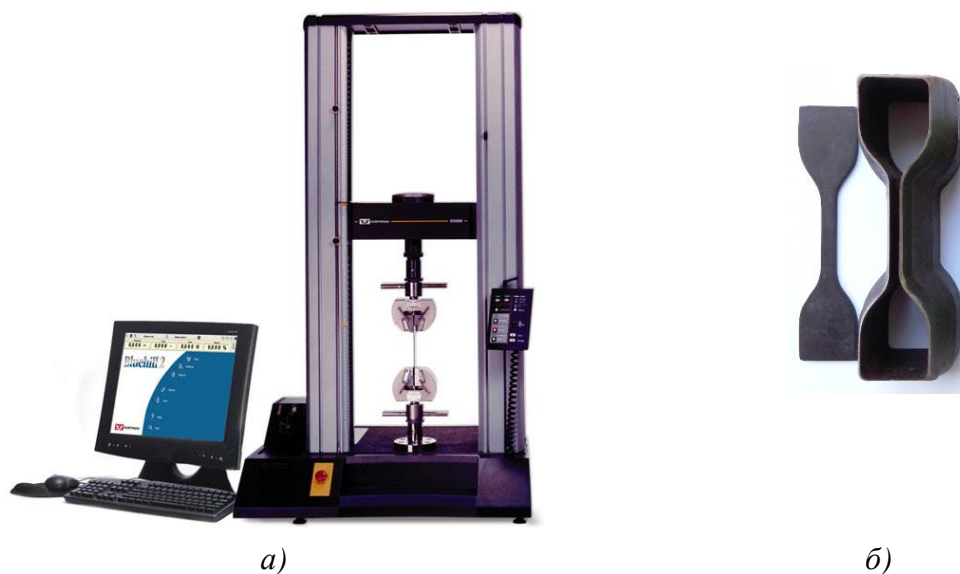


Рис. 1. Испытательная машина Instron 5567 (а), вид образцов и инструмента для их изготовления (б)

Результаты испытаний. В ходе комбинированных испытаний была получена достаточно полная информация об упругих и вязкоупругих свойствах исследуемых материалов при амплитудных значениях деформации растяжения 50 % и 100 %.

В качестве примера на рис. 2–5 представлены зависимости напряжения от деформации и напряжения от времени для всех исследуемых образцов при максимальном значении деформации растяжения 100 %. Можно заметить, что проведенные испытания

быстро выявляют существенное различие деформационного поведения резин в зависимости от их функционального назначения. Форма гистерезисных петель стабилизируется на втором цикле нагружения, а релаксационные процессы в исследуемых эластомерах в основном завершаются 10 минут.

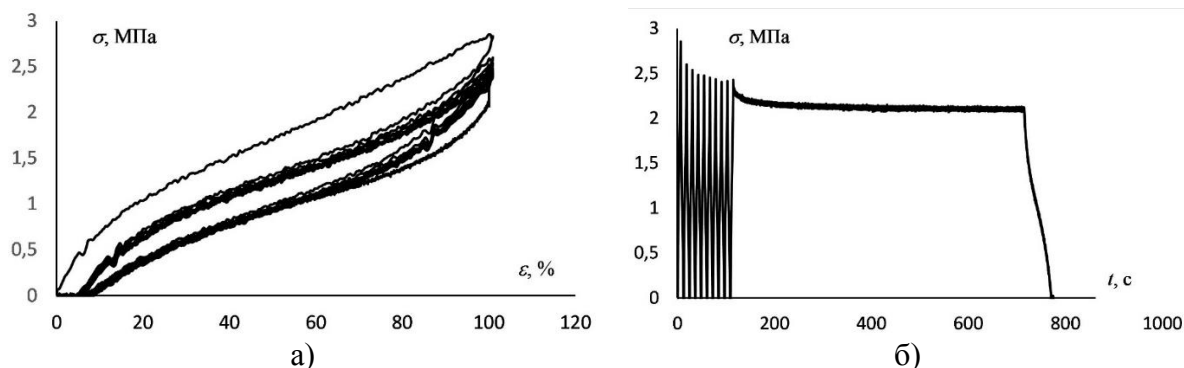


Рис. 2. Зависимости «напряжение – деформация» (а) и «напряжение – время» (б) протекторной резины

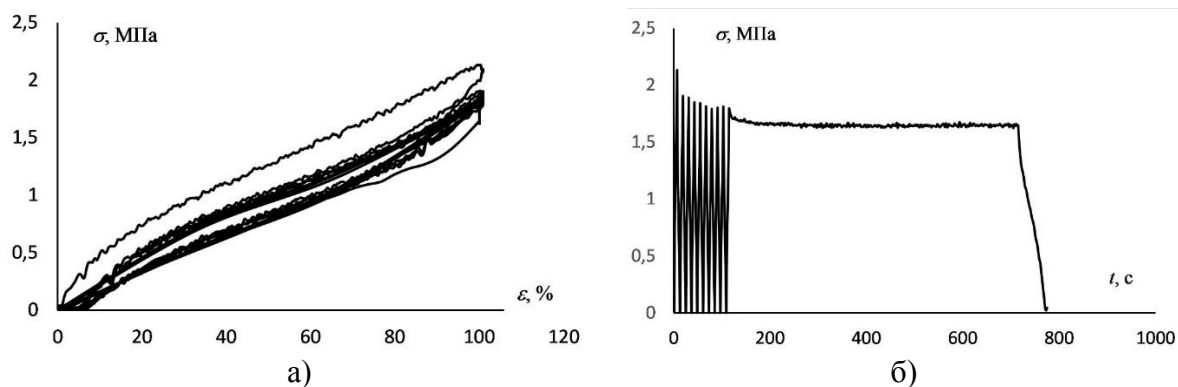


Рис. 3. Зависимости «напряжение – деформация» (а) и «напряжение – время» (б) материала подканавочного слоя

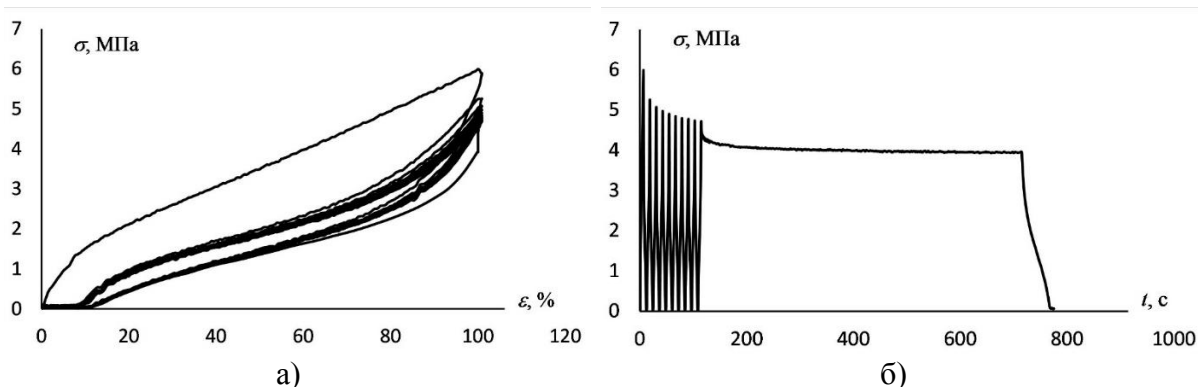


Рис. 4. Зависимости «напряжение – деформация» (а) и «напряжение – время» (б) материала брекера

Экспериментальные данные используются авторами для идентификации моделей гиперупругого деформирования (Муни–Ривлина) и вязкоупругого деформирования (Прони) по методике, описанной в работе [9].

Выводы. Экспериментально исследованы упруго-диссипативные свойства шинных резин с получением зависимостей «напряжение – время» и «напряжение – деформация» в условиях циклического нагружения и последующей релаксации при максимальном значении деформации растяжения 50 % и 100 %.

Апробированную методику испытаний и полученные данные целесообразно использовать для определения параметров моделей гиперупругого и вязкоупругого деформирования, реализуемых в программном обеспечении конечноэлементного анализа MSC.Marc. Практическая значимость результатов состоит в оптимизации рецептур резиновых смесей и конструкции шин по упруго-диссипативным критериям.

Благодарности. Исследование выполнено по х/д И27/2020 «Характеризация вязкоупругих свойств шинных резин ЦМК ЗМШ» в соответствии с п. 1.3.2 Программы научного сопровождения по обеспечению создания новых типоразмеров шин ОАО «Белшина» на 2020–2023 г.г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухин, Б. Л. Введение в механику пневматических шин / Б. Л. Бухин. – М.: Химия, 1988. – 222 с.
2. Nakajima, Y. Advanced Tire Mechanics / Y. Nakajima // Springer Nature Singapore Pte Ltd. – 2019. – P. 1264.
3. Хотько, А. В. Возможности оптимального проектирования автомобильной шины по критерию пространственной равнопрочности / А. В. Хотько, С. В. Шилько, С. Н. Бухаров // Механика машин, механизмов и материалов. – 2020. – № 4. – С. 11–18.
4. Rivlin, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials, VII, Experiments on the deformation of rubber / R. S. Rivlin, D. W. Saunders // Phil. Trans. Roy. Soc. – London, 1951. – No 243 (Pt. A). – P. 251–288.
5. Кристенсен, Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1974. – С. 340.
6. Кравчук, А. С. Механика полимерных и композиционных материалов: учебное пособие / А. С. Кравчук, В. П. Майборода, Ю. С. Уржумцев. – М.: Наука, 1985. – 303 с.
7. User Documentation. Vol. A: Theory and User Information: Copyright ©2017 MSC Software Corporation.
8. User Documentation. MAR10 Experimental Elastomer Analysis: Copyright ©2017 MSC Software Corporation.
9. Шилько, С. В. Определение реологических параметров полимерных материалов на основе идентификации вязкоупругой модели Прони по результатам статических и динамических испытаний / С. В. Шилько [и др.] // Механика машин, механизмов и материалов. – 2017. – № 3. – С. 33–38.

Поступила: 26.01.2021

ИЗГИБ СОСТАВНЫХ БАЛОК

Дудяк А. И., Хвасько В. М.

Белорусский национальный технический университет, Минск

В балке, составленной из ряда стержней, слои которых не связаны между собой и трение между которыми отсутствует, каждый из изгибаемых стержней деформируется как отдельная независимая балка [1, 2]. Работу составных балок рассмотрим при наиболее простом случае изгиба – чистом изгибе. Под чистым изгибом понимают такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержней возникают только изгибающие моменты, а поперечные силы равны нулю (рис. 1) [1].

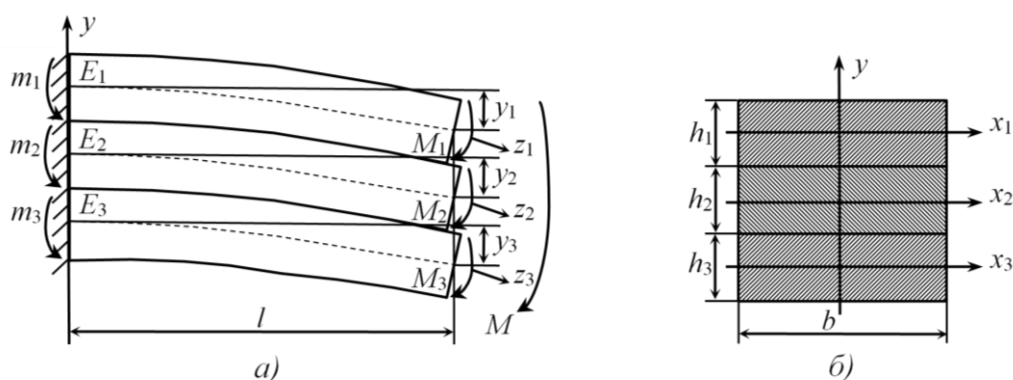


Рис. 1. Схема нагружения стержней: а) продольное сечение стержней; б) поперечные сечения стержней

В качестве примера возьмем консольную трехслойную балку прямоугольного поперечного сечения с различной высотой составных поперечных сечений стержней h_1, h_2, h_3 и изготовленных из различных материалов, которые отличаются модулями продольными упругости E_1, E_2, E_3 . Под действием изгибающего момента M стержни изогнутся [2]. Очевидно, что полный изгибающий момент M можно разбить на отдельные изгибающие моменты M_1, M_2, M_3 , которые подвергают деформациям отдельные части составной балки, причем:

$$M = M_1 + M_2 + M_3. \quad (1)$$

Так как каждый стержень изгибается самостоятельно, то нейтральные слои всех трех стержней будут одной длины, также будут одинаковы их радиусы кривизны. В защемлении возникнут реактивные моменты и из условий статики следуют равенства: $m_1 = M_1, m_2 = M_2, m_3 = M_3$.

Используя метод начальных параметров [2], перемещения центров тяжести сечений y_1, y_2, y_3 на конце консоли будут описываться системой уравнений:

$$\begin{aligned} E_1 I_{x1} y_1 &= E_1 I_{x1} y_{01} + E_1 I_{x1} \theta_{01} \cdot l - m_1 \frac{l^2}{2}; \\ E_2 I_{x2} y_2 &= E_2 I_{x2} y_{02} + E_2 I_{x2} \theta_{02} \cdot l - m_2 \frac{l^2}{2}; \\ E_3 I_{x3} y_3 &= E_3 I_{x3} y_{03} + E_3 I_{x3} \theta_{03} \cdot l - m_3 \frac{l^2}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где I_{x1}, I_{x2}, I_{x3} – моменты инерции сечений отдельных стержней [1].

Так как начало координат совпадает с заземлением, то начальные параметры – прогибы y_0 и углы поворотов сечений θ_0 в начале координат равны нулю. Поэтому система уравнений (2) с учетом начальных параметров примет окончательный вид:

$$E_1 I_{x1} y_1 = -m_1 \frac{l^2}{2}; \quad E_2 I_{x2} y_2 = -m_2 \frac{l^2}{2}; \quad E_3 I_{x3} y_3 = -m_3 \frac{l^2}{2}. \quad (3)$$

Из приведенной схемы изгиба составной балки (рис. 1) следует, что:

$$y_1 = y_2 = y_3. \quad (4)$$

Рассматривая совместно выражения (3) и (4), получим следующие равенства:

$$\frac{m_1}{E_1 I_{x1}} = \frac{m_2}{E_2 I_{x2}} = \frac{m_3}{E_3 I_{x3}}. \quad (5)$$

Используя соотношения (5), выразим величины изгибающих моментов m_2 и m_3 через жесткости сечений при изгибе $E_1 I_{x1}$, $E_2 I_{x2}$, $E_3 I_{x3}$ и величину изгибающего момента m_1 :

$$m_2 = \frac{E_2 I_{x2}}{E_1 I_{x1}} m_1; \quad m_3 = \frac{E_3 I_{x3}}{E_1 I_{x1}} m_1. \quad (6)$$

Подставив полученные значения (6) в выражение (1), будем иметь:

$$M = M_1 + \frac{E_2 I_{x2}}{E_1 I_{x1}} M_1 + \frac{E_3 I_{x3}}{E_1 I_{x1}} M_1. \quad (7)$$

Из последнего равенства (7) получим формулу для определения величины изгибающего момента M_1 , который воздействует на первый стержень:

$$M_1 = \frac{E_1 I_{x1}}{E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2} + E_3 I_{x3}} M = \frac{E_1 I_{x1}}{(E_0 I_{x0})_C} M, \quad (8)$$

где $(E_0 I_{x0})_C = E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2} + E_3 I_{x3}$ – суммарная жесткость пакета стержней.

Аналогично находим величины изгибающих моментов M_2 и M_3 , выраженные через полный изгибающий момент M :

$$M_2 = \frac{E_2 I_{x2}}{(E_0 I_{x0})_C} \cdot M; \quad M_3 = \frac{E_3 I_{x3}}{(E_0 I_{x0})_C} \cdot M. \quad (9)$$

В общем виде формула для определения нормальных напряжений при чистом изгибе стержня представляет следующий вид [3]:

$$\sigma = \frac{M}{I_x} \cdot y, \quad (10)$$

где y – расстояние от точки, в которой определяют нормальное напряжение, до нейтрального слоя.

Подставив значения M_1 , M_2 и M_3 из выражений (8) и (9) в формулу (10), получим выражения для определения нормальных напряжений в отдельных стержнях составной балки:

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{I_{x1}} \cdot y_1; \quad \sigma_2 = \frac{M_2}{I_{x2}} \cdot y_2; \quad \sigma_3 = \frac{M_3}{I_{x3}} \cdot y_3. \quad (11)$$

Максимальные нормальные напряжения при изгибе возникают в зонах, наиболее удаленных от нейтральной линии [3], поэтому:

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_1}{I_{x1}} \cdot y_{1\max}; \quad \sigma_{2\max} = \frac{M_2}{I_{x2}} \cdot y_{2\max}; \quad \sigma_{3\max} = \frac{M_3}{I_{x3}} \cdot y_{3\max}. \quad (12)$$

Моменты сопротивления стержней будут равны:

$$W_{x1} = \frac{I_{x1}}{y_{1\max}}; \quad W_{x2} = \frac{I_{x2}}{y_{2\max}}; \quad W_{x3} = \frac{I_{x3}}{y_{3\max}}. \quad (13)$$

С учетом выражений (13) максимальные напряжения в стержнях будут определяться из формул:

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_1}{W_{x1}}; \quad \sigma_{2\max} = \frac{M_2}{W_{x2}}; \quad \sigma_{3\max} = \frac{M_3}{W_{x3}}. \quad (14)$$

Для стержней прямоугольного поперечного сечения с шириной b и высотами h_1, h_2, h_3 имеем [1]:

$$W_{x1} = \frac{bh_1^2}{6}; \quad W_{x2} = \frac{bh_2^2}{6}; \quad W_{x3} = \frac{bh_3^2}{6}. \quad (15)$$

Таким образом, нормальные напряжения в стержнях i -ой составной балки зависят от жесткости сечения $E_i I_{xi}$. Чем больше жесткость сечения, тем больший изгибающий момент прикладывается к стержню, что легко устанавливается формулами (8) и (9).

Если балка состоит из n стержней, выполненных из различных материалов, то общую формулу для определения изгибающего момента, приходящегося на рассматриваемый стержень, следует принять в виде:

$$M_i = \frac{E_i I_{xi}}{(EI_x)_C} \cdot M. \quad (16)$$

При изготовлении всех стержней из одного и того же материала ($E_1 = E_2 = E_3 = E$), но разной высоты, величины изгибающих моментов, приходящихся на отдельные стержни балки, в соответствии с формулами (8) и (9), определяют из следующих соотношений:

$$M_1 = \frac{I_{x1}}{I_{xc}} \cdot M; \quad M_2 = \frac{I_{x2}}{I_{xc}} \cdot M; \quad M_3 = \frac{I_{x3}}{I_{xc}} \cdot M, \quad (17)$$

где $I_{xc} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$ – суммарный момент инерции пакета стержней.

Подставив значения M_1, M_2 и M_3 из выражений (17) в формулы (14), получим максимальные значения нормальных напряжений в стержнях.

Если составная балка состоит из n стержней из однородного материала, то общую формулу для определения изгибающего момента M_i , приходящегося на рассматриваемый стержень, следует определять из формулы:

$$M_i = \frac{I_{xi}}{I_{xc}} \cdot M. \quad (18)$$

Выводы. Таким образом, в соответствии с последней формулой установлено, что величина изгибающего момента, приходящегося на один стержень составной балки зависит от соотношения между моментами инерции стержня и суммарного момента инерции составной балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В. И. Соппротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 511 с.
2. Писаренко, Г. С. Соппротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев: Техника, 1967. – 790 с.
3. Татур, Г. К. Общий курс соппротивления материалов / Г. К. Татур. – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.

Поступила: 26.01.2021

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛИ ПОЛЗУЧЕСТИ СТЕКЛОПЛАСТИКА НА СДВИГ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗГИБА ТРУБ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

^{1,2}Каюмов Р. А., ¹Гимазетдинов А. Р., ¹Шакирзянов Ф. Р.

¹ Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань, Россия

² Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ), Казань, Россия

Аннотация. В работе предлагается методика идентификации характеристик соотношений ползучести однонаправленно армированных композитных материалов на основе анализа результатов испытаний и решения прямых и обратных задач деформирования изготовленных из них балок в виде тонкостенных труб. Приводятся результаты экспериментов и полученные механические характеристики на сдвиг для пултрузионных стеклопластиков.

Результаты испытания образцов на изгиб, модель ползучести и определение ее характеристик.

При определении механических характеристик композитных материалов обычно проводят испытания на плоских образцах [1–9]. Здесь образцы подвергались поперечному изгибу и имели вид труб с квадратным поперечным сечением 50×50 мм, толщиной стенки 5 мм и рабочей длиной $L = 275$ мм. Начальные модули упругости и сдвига имели значения $E = 30,2$ ГПа, $G_{12}(0) = 2,73$ ГПа [10].

При проведении испытаний образцов стеклопластиковых композитных материалов соблюдались следующие ГОСТы:

ГОСТ 12423-66 (СТ СЭВ 885-78) Пластмассы. Условия кондиционирования и испытаний образцов.

ГОСТ 14359-69 Пластмассы. Методы механических испытаний. Общие требования.

ГОСТ 25.601-80 Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний композиционных материалов с полимерной матрицей.

ГОСТ 25.604-82. Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний композиционных материалов с полимерной матрицей (композитов). Метод испытания на изгиб при нормальной, повышенной и пониженной температурах.

Эксперименты проводились на универсальной испытательной машине ИР 5082 путем трехточечного изгиба испытуемого образца (см. рис. 1).

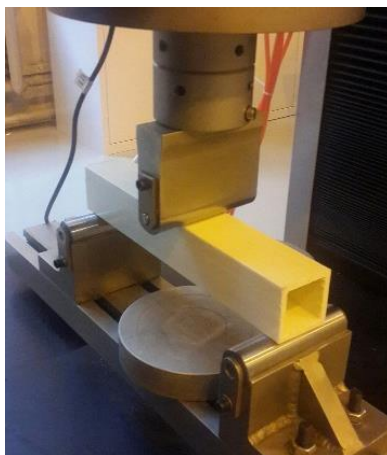


Рис. 1. Общий вид проведения испытания

При обработке результатов были получены значения перемещений в различные моменты времени, приведенные ниже на рис. 2.

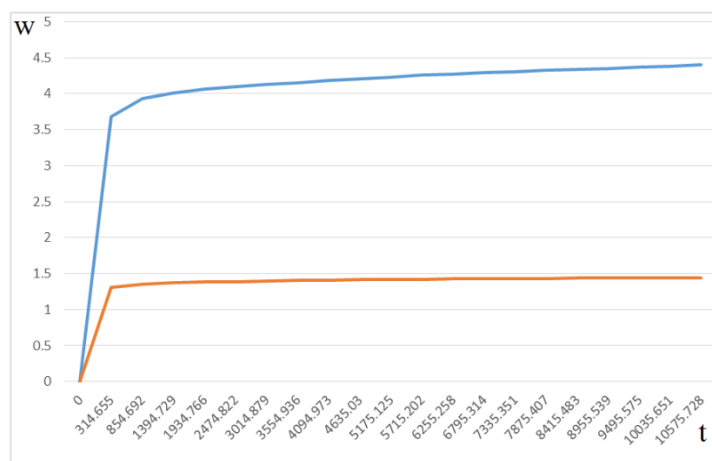


Рис. 2. График время–перемещение ($P_1 = 15$ кН, $P_2 = 5$ кН, t – сек)

В общем случае зависимости между компонентами тензоров деформаций и компонентами тензора напряжений даже в случае плоского напряженного состояния в качестве аргументов будут содержать не менее трех инвариантов компонент напряжений и векторов, определяющих положение осей ортотропии. Для определения этих зависимостей требуется проводить сложные эксперименты и применять специальные методы их анализа. Поэтому часто используют различные подходы для их упрощения путем введения гипотез или математического их анализа (см. например, [12–14]), основанных на использовании особенностей свойств композитных материалов. Здесь используются следующие упрощающие предположения. Во-первых, как и в [12, 13], считается, что упругие и неупругие деформации возникают только при сдвиге (в осях ортотропии). Во-вторых, принимается обобщение гипотезы Качанова [15], согласно которому эти деформации развиваются независимо друг от друга и зависят только от уровня напряжений.

Рассмотрим задачу определения характеристик ползучести стеклопластика на сдвиг на основе анализа результатов испытаний на трехточечный изгиб короткой балки в виде трубы квадратного сечения. Общий прогиб будет состоять из двух слагаемых [10] – прогиба от изгибающего момента и прогиба от сдвига под действием поперечной силы.

$$w_{\max} = w^{\text{изг}} + w^{\text{сдв}}; \quad (1)$$

$$w^{\text{изг}} = \frac{Pl^3}{48EJ}. \quad (2)$$

Здесь l – расстояние между опорами. Прогиб от сдвига можно разложить на две составляющие (ниже A – площадь сечения):

$$w^{\text{сдв}} = w^{\text{elast}} + w^{\text{creep}} = \frac{Pla}{4G_{12}A} + \frac{\gamma^{\text{creep}}l}{2}. \quad (3)$$

Коэффициент a зависит от формы сечения, который в нашем случае [10] имеет значение $a = 1,878$.

Для деформации ползучести γ^{creep} примем теорию упрочнения в виде:

$$\dot{\gamma}^{\text{creep}} = \frac{(B \cdot \tau)^n}{(1 + \beta \cdot \gamma^{\text{creep}})^m}. \quad (4)$$

Для интегрирования этого соотношения на этапе нагружения перепишем его в виде:

$$\frac{1}{\beta}(1 + \beta \cdot \gamma^{creep})^m \cdot \beta \cdot d(\gamma^{creep}) = \left[B \cdot \frac{1}{A} \left(\frac{P_{\max} \cdot t}{t_1} \right) \right]^n \cdot dt. \quad (5)$$

Здесь t_1 – время, при котором начинается выдержка образца поперечной силой P_{\max} . Отсюда

$$\frac{(1 + \beta \cdot \gamma^{creep})^{m+1}}{\beta(m+1)} = \left[\frac{B \cdot P_{\max}}{A \cdot t_1} \right]^n \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} + C_1. \quad (6)$$

Коэффициент C_1 найдем из начальных условий при $t = 0$:

$$\gamma(0) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\beta(m+1)}. \quad (7)$$

При $t = t_1$ получим соотношение для определения γ_1^{creep} :

$$\frac{(1 + \beta \cdot \gamma_1^{creep})^{m+1}}{\beta(m+1)} = \left[\frac{B \cdot P_{\max}}{A} \right]^n \cdot \frac{t_1}{n+1} + C_1. \quad (8)$$

Отсюда вытекает выражение:

$$\gamma_1^{creep} = \frac{\sqrt[m+1]{\left[\left(\frac{B \cdot P_{\max}}{A} \right)^n \cdot \frac{t_1}{n+1} - C_1 \right]} (m+1)\beta - 1}{\beta}. \quad (9)$$

На этапе выдержки при $\sigma = \sigma_{\max} = const$ из (4) вытекает:

$$\frac{(1 + \beta \cdot \gamma^{creep})^{m+1}}{\beta(m+1)} = \left[\frac{B \cdot P_{\max}}{A} \right]^n \cdot t + C_2. \quad (10)$$

Коэффициент C_2 определяется из начальных условий при $t = t_1$:

$$\gamma(t_1) = \gamma_1^{creep} \Rightarrow C_2 = \frac{(1 + \beta \cdot \gamma_1^{creep})^{m+1}}{\beta(m+1)} - \left[\frac{B \cdot P_{\max}}{A} \right]^n \cdot t_1. \quad (11)$$

Далее из (10) можно вычислить γ^{creep} при значениях $t > t_1$.

Для идентификации параметров B , β , n и m запишем выражение для приращений прогибов в разные моменты времени t_i :

$$\Delta w^{эксн} = w(t_i) - w(t) = \left[\gamma^{creep}(t_i) - \gamma^{creep}(t) \right] l, \quad (12)$$

Система уравнений (12) относительно B , β , n и m решается методом минимизации ее квадратичной невязки. Решение задачи идентификации B , β , n и m при нагрузке $P_1 = 15$ кН дает следующие значения искоемых коэффициентов:

$$B = 0,05^{1/n}, \quad n = 6, \quad \beta = 225, \quad m = 3.$$

Проверим применимость полученных коэффициентов в эксперименте об изгибе той же трубы с квадратным сечением, но при другой нагрузке ($P_2 = 5$ кН). Использование тех же параметров, что и для первого эксперимента, приводит к следующей картине (см. нижний график на рис. 3), отражающей результаты эксперимента и расчетов:

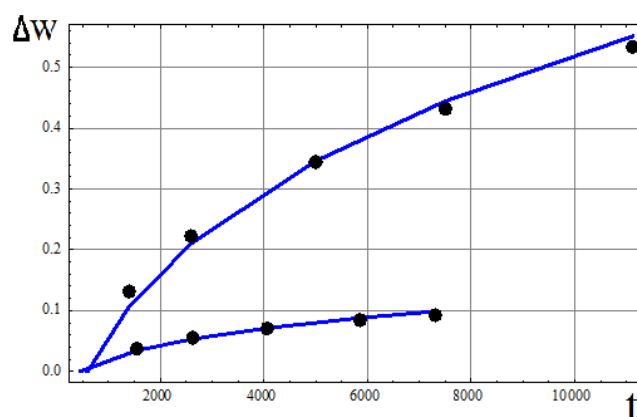


Рис. 3. График согласования результатов

Выводы. Как видно из рис. 3, полученные коэффициенты дают достаточно хорошее согласование эксперимента с аналитическими расчетами.

Работа выполнена в рамках РФФИ (проект № 19-08-00349) и РНФ (проект № 19-19-00059).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов, Н. А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – М.: Машиностроение, 1984. – 263 с.
2. Алфутов, Н. А. Идентификация упругих характеристик однонаправленных материалов по результатам испытаний многослойных композитов. Расчеты на прочность / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Л. П. Таирова. – М.: Машиностроение, 1989. – Вып. 30. – С. 16–31.
3. Гольденблат, И. И. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов / И. И. Гольденблат, В. А. Копнов. – М.: Машиностроение, 1968. – 191 с.
4. Каюмов, Р. А. Расширенная задача идентификации механических характеристик материалов по результатам испытаний конструкций из них / Р. А. Каюмов // Известия РАН, Механика твердого тела. – 2004. – № 2.
5. Каюмов, Р. А. Связанная задача расчета механических характеристик материала и расчета конструкций из них / Р. А. Каюмов // Изв. РАН, Мех. тв. тела. – 1999. – № 6. – С. 118–127.
6. Малмейстер, А. К., Сопротивление полимерных и композитных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
7. Рикардс, Р. Идентификация механических свойств композитных материалов на основе планирования экспериментов / Р. Рикардс, А. Чате // Механика композитных материалов. – 1998. – Т. 34, № 1. – С. 3–16.
8. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
9. Степнов, М. Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний: Справочник / М. Н. Степнов. – М.: Машиностроение, 1985. – 232 с.
10. Каюмов, Р. А. Идентификация жесткостных характеристик композита / Р. А. Каюмов [и др.] // Вестник технологического университета. – 2016. – Т. 19. – № 24.
11. Гроп, Д. Метод идентификации систем / Д. Гроп. – М.: Мир, 1979. – 240 с.
12. Каюмов, Р. А. Структура определяющих соотношений для армированных жесткими волокнами наследственно-упругих материалов / Р. А. Каюмов, И. Г. Терегулов // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – № 3. – С. 120–128.

13. Образцов, И. Ф. Нелинейные феноменологические модели деформирования волокнистых композитных материалов / И. Ф. Образцов, В. В. Васильев // Механика композитных материалов. – 1982. – № 3. – С. 390–393.

14. Каюмов, Р. А. Структура нелинейно-упругих соотношений для сильно анизотропного слоя нетонкой оболочки / Р. А. Каюмов // Механика композитных материалов. – 1999. – Т. 35, № 5. – С. 615–628.

15. Качанов, Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести / Л. М. Качанов // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. – 1958. – № 8. – С. 26–31.

Поступила: 30.01.2021

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТЕЙ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Дудяк А. И., Дикан Ж. Г., Мелеховец П. А., Миношин В. В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Изучение деформаций при поперечном изгибе стержней – это определение прогибов и углов поворота сечений. При поперечном изгибе стержней из однородных материалов силовая плоскость проходит через одну из главных центральных осей, а вторая ось совпадает с нейтральным слоем. Главными центральными осями называются оси проходящие через центр тяжести сечения и относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Уравнение для определения углов поворота сечений θ представляет вид:

$$\theta = \int \frac{M(z)}{EJ(x)} dz + C. \quad (1)$$

Интегрируя еще раз уравнение (1) получают формулу для определения прогибов:

$$y = \int dz \int \frac{M(z)}{EJ(x)} dz + cz + d. \quad (2)$$

Произвольные постоянные C и d определяют из условий закрепления стержней. Произведение $E \cdot J$ называют жесткостью сечения стержня при изгибе.

При осевом растяжении размеры стержня меняются в осевом направлении и зависят от величины прикладываемой нагрузки F и от жесткости сечения стержня. Абсолютное удлинение стержня длиной l определяют из выражения [1 ÷ 3].

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}. \quad (3)$$

Произведение $E \cdot A$ называют жесткостью сечения стержня при осевом растяжении или сжатии. Для сечения из однородного материала статические моменты жесткости относительно осей x и y будут равны:

$$E s_x = E \cdot A \cdot y_c ; \quad E s_y = E \cdot A \cdot x_c, \quad (4)$$

где x_c и y_c – координаты центра тяжести сечения относительно осей x и y ;

$s_x = A \cdot y_c$ и $s_y = A \cdot x_c$ – статические моменты площади сечения относительно координатных осей x и y .

Очевидно, если стержень состоит из ряда стержней из разнородных материалов прочно соединенных между собой по длине, то жесткость сечения при осевом растяжении-сжатии и изгибе следует определять иным способом.

Рассмотрим поперечное сечение стержня, состоящее из двух разнородных материалов прочно соединенных между собой и отличающихся друг от друга модулями продольной упругости E_1 и E_2 (рис. 1).

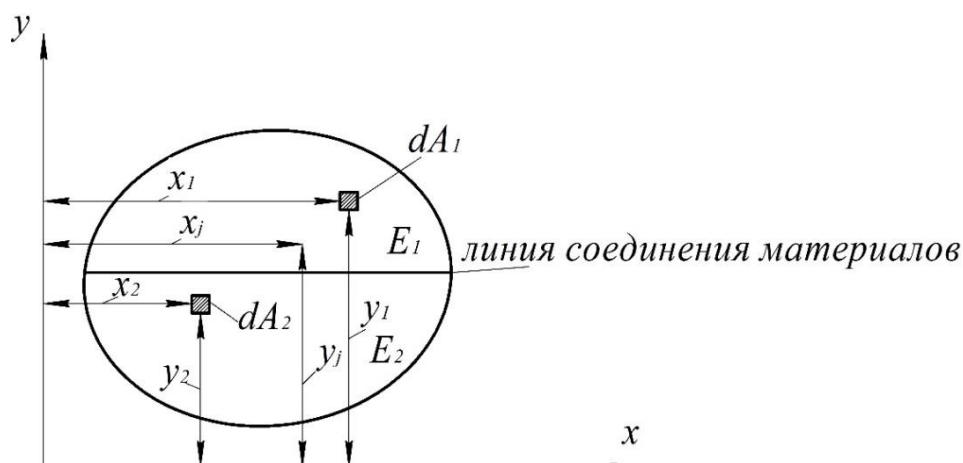


Рис. 1. Поперечное сечение стержня, составленное из двух разнородных материалов

В сечении выделим элементы бесконечно малых площадей dA_1 и dA_2 с координатами x_1 и y_1 , x_2 и y_2 . Для данного сечения статические моменты жесткости будут равны:

$$(E\mathcal{S}_x)_c = E_1 \int_{A_1} y_1 \cdot dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2 dA_2; \quad (5)$$

$$(E\mathcal{S}_y)_c = E_1 \int_{A_1} x_1 \cdot dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 dA_2. \quad (6)$$

Интегралы представляют статические моменты площадей отдельных частей поперечного сечения \mathcal{S}_x и \mathcal{S}_y . Если известны координаты центров тяжести отдельных частей сечения x_{c1} , y_{c1} и x_{c2} , y_{c2} , то формулы (5) и (6) можно представить в виде:

$$(E\mathcal{S}_x)_c = E_1 \cdot A_1 \cdot y_{c1} + E_2 \cdot A_2 \cdot y_{c2}; \quad (7)$$

$$(E\mathcal{S}_y)_c = E_1 \cdot A_1 \cdot x_{c1} + E_2 \cdot A_2 \cdot x_{c2}. \quad (8)$$

В зависимости от знаков координат x_{c1} , y_{c1} и x_{c2} , y_{c2} суммарная жесткость сечения может быть больше или меньше поля, а значит для любого сечения можно определить также координаты x_j и y_j относительно которых суммарные моменты жесткости будут равны нулю. Начало таких координат будет называться центром жесткости сечения. Допустим, что известны координаты центра жесткости сечения x_j и y_j относительно первоначальных осей x и y . в этом случае выражения (7) и (8) можно представить в виде:

$$(E\mathcal{S}_x)_c = (E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2)y_j; \quad (9)$$

$$(E\mathcal{S}_y)_c = (E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2)x_j, \quad (10)$$

где $(E_1A_1 + E_2A_2) = (E_iA_i)_c$ – суммарная жесткость сечения при осевом растяжении–сжатии.

Координаты центра жесткости сечения относительно произвольных осей x и y будут равны:

$$x_j = \frac{(E_i\mathcal{S}_{xi})_c}{(E_iA_i)_c}; \quad y_j = \frac{(E_i\mathcal{S}_{yi})_c}{(E_iA_i)_c}. \quad (11)$$

Следует заметить, если материал стержня однороден, то есть $E_1 = E_2 = E$, то полученные выражения (11) будут соответствовать известным формулам из курса сопротивления материалов для определения координат центра тяжести сечения.

Рассмотрим методы определения суммарных жесткостей сечения при изгибе $E \cdot J$ (рис. 1). Для данного сечения осевые суммарные жесткости $(E \cdot J_x)_c$ и $(E \cdot J_y)_c$ относительно осей x и y можно представить в виде формул:

$$(EJ_x)_c = E_1 \int_{A_1} y_1^2 \cdot dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2. \quad (12)$$

$$(EJ_y)_c = E_1 \int_{A_1} x_1^2 \cdot dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2. \quad (13)$$

Суммарная центробежная жесткость сечения $(E \cdot J_{xy})_c$ может иметь вид:

$$(EJ_{xy})_c = E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 \cdot dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2. \quad (14)$$

Интегралы в формулах (12) и (13) представляют собой осевые моменты инерции частей сечения, а в формуле (14) – центробежные моменты инерции. Поэтому формулы (12)–(14) можно представить в виде:

$$(EJ_x)_c = E_1 \cdot J_{x1} + E_2 J_{x2}; \quad (15)$$

$$(EJ_y)_c = E_1 \cdot J_{y1} + E_2 J_{y2}; \quad (16)$$

$$(EJ_{xy})_c = E_1 \cdot J_{x1y1} + E_2 J_{x2y2}. \quad (17)$$

Если стержень собран из n стержней из различных материалов, то формулы (15)–(17) можно представить в виде:

$$(EJ_x)_c = \sum_{i=1}^n E_i J_{xi}; \quad (EJ_y)_c = \sum_{i=1}^n E_i J_{yi}; \quad (EJ_{xy})_c = \sum_{i=1}^n E_i J_{xiyi}. \quad (18)$$

Выводы. Суммарные осевые жесткости сечений всегда будут положительны, а центробежная суммарная жесткость может быть положительной, отрицательной и иметь нулевое значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – Москва: Наука, 1972. – 541 с.
2. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев: Техника, 1967. – 783 с.
3. Татур, Г. К. Общий курс сопротивления материалов / Г. К. Татур. – Минск: «Вышэйшая школа», 1974. – 462 с.

Поступила: 31.01.2021

МЕХАНОТЕРМОДИНАМИКА, ТЕОРИЯ ЕДИНОЙ МЕХАНИКИ И ТРИБОЛОГИЯ: ОБЩИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ЭНТРОПИИ

¹Щербаков С. С., ²Сосновский Л. А., ³Басаран К.

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

³Университет штата Нью-Йорк в Буффало, Буффало

Применение энтропии при описании повреждений. Значение понятия об термодинамической энтропии, введенной в XIX веке, сегодня трудно переоценить [1–15]. В табл. 1 и 2 дано основательное тому подтверждение [16].

Термодинамическая энтропия есть характеристика рассеяния энергии, или мера «бесполезной работы» (см. табл. 1). А между тем понятно, что другая составляющая полной энергии, подведенной к системе, – энергия, поглощенная средой, т. е. мера «полезной работы» имеет несравнимо большее практическое значение, ибо она инициирует зарождение и развитие повреждений в системе, которые в определенных условиях неизбежно ведут ее к критическому состоянию, например, усталостной поломке или к предельному износу. Но задача определения такой меры до нашего времени решена не была, и специалисты вынуждены были использовать то, что есть. Так, в свое время Карно ввел представление о коэффициенте полезного действия тепловых машин, изучая преобразования полной энергии в цикле работы.

Для решения данной задачи в механике повреждений и теории единой механики Басараном и др. [17–26] предложен подход к оценке параметра повреждения на основе показателя неупорядоченности W , связанного с удельной (к единице массы) энтропией s :

$$D = D_{cr} \frac{W}{\Delta W} = D_{cr} \left[1 - e^{-\frac{m_s}{R}(s-s_0)} \right], \quad (1)$$

где удельная энтропия

$$s = \frac{R}{m_s} \ln W, \quad (2)$$

записана по аналогии с энтропией по Больцману $S = k_0 \ln W$; m_s – удельная масса; R – газовая константа.

В трибологии [27–39] подобная задача решается давно и, как кажется, тоже успешно. В этих работах исследовано влияние процессов трения и износа в системе двух твердых тел на изменение термодинамической энтропии S_i . Его производство формулируется как сумма термодинамических сил X_j^k и термодинамических потенциалов J_j^k в виде

$$\frac{d_i S}{dt} = \sum_j \sum_k \left(\frac{\partial_i S}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \zeta_j^k} \right) \frac{\partial \zeta_j^k}{\partial t} = \sum_j \sum_k X_j^k J_j^k. \quad (3)$$

Брайант и др. предложили концепцию деградации пар трения:

$$\frac{dw}{dt} = \sum_j \sum_k \left(\frac{\partial w}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \zeta_j^k} \right) \frac{\partial \zeta_j^k}{\partial t} = \sum_j \sum_k Y_j^k J_j^k. \quad (5)$$

Многочисленные частные компоненты энтропии в многообразных процессах трения представлены в табл. 3.

Таблица 1 – Некоторые «энтропийные» закономерности

<p>Всякий раз, когда существует разность температур, может быть произведена движущая сила (С. Карно)</p>
<p>Увеличение энтропии отличает будущее от прошлого, поэтому существует стрела времени</p>
<p>Теплота не может самопроизвольно переходить от более холодного тела к более нагретому (Р. Клаузиус)</p>
<p>Построить вечный двигатель невозможно</p>
<p>Энтропия Вселенной стремится к максимуму (Р. Клаузиус)</p>
<p>Прогнозируется «тепловая смерть» Вселенной (Гельмгольц)</p>
<p>Сумма изменений энтропии системы и внешней среды не может убывать</p>
<p>Для любого необратимого процесса энтропия должна увеличиваться (неравенство Клаузиуса), тогда как для обратимого процесса она остается постоянной (равенство Клаузиуса)</p>
<p>При температуре абсолютного нуля энтропия любого химически однородного твердого или жидкого тела принимает нулевое значение (Нернст)</p>
<p>Энтропию порождают необратимые процессы</p>
<p>Необратимые процессы являются источником порядка внутри системы</p>
<p>Состояние равновесия характеризуется либо минимумом (ноль) производство энтропии, либо максимумом энтропии</p>
<p>Низкий энтропийный порядок постепенно, но неуклонно вырождается в хаос, поскольку Вселенная стремится к термодинамическим равновесию</p>
<p>Необратимые процессы приводят к новым пространственно-временным структурам, которые играют фундаментальную конструктивную роль</p>
<p>Необратимые процессы, происходящие с ростом энтропии, соответствует эволюции к наиболее вероятным состояниям</p>
<p>Существуют ли в природе обратимые процессы или не существуют, априори не очевидно (Планк)</p>
<p>Гипотеза локального равновесия: термодинамические переменные можно рассматривать как функции положения в пространстве и времени</p>
<p>Термодинамические потоки вызываются термодинамическими силами</p>
<p>Идет ли речь об изолированных, закрытых или открытых системах, всегда выполняется неравенство $d_i S \geq 0$</p>
<p>В состоянии равновесия все необратимые процессы прекращаются</p>
<p>Энтропия, «вытекающая» из системы, всегда больше, чем энтропия, поступающая в систему; разность возникает из-за энтропии, производимой необратимыми процессами внутри системы</p>
<p>Необратимые процессы служат той движущей силой, которая создает порядок</p>
<p>Системы, обменивающаяся энтропией с внешней средой, не просто увеличивают энтропию внешней среды, но могут претерпевать весьма сильные спонтанные преобразования, переходя в режим «самоорганизации»</p>
<p>Эволюция к состоянию равновесия характеризует не теплота химической реакции, а другая термодинамическая величина – «свободная энергия» Гиббса</p>
<p>Энтропия охватывает все аспекты превращения вещества: изменение энергии, объема и химического состава. следовательно, любая система в природе, будь то газ, водный раствор или живая клетка, характеризуется некоторой энтропией</p>
<p>Порядок может поддерживаться только с помощью самоорганизации. Самоорганизующиеся системы делают возможной адаптацию к превалирующей окружающей среде</p>
<p>Увеличение энтропии отличает будущее от прошлого, поэтому существует стрела времени</p>
<p>Без необратимых процессов жизнь была бы невозможной</p>

Общее содержание изложенных решений таково. Мера рассеяния энергии – термодинамическая энтропия приравнивается фактически к мере поврежденности трибологической системы по многим и разным физико-механо-химическим параметрам.

По нашему мнению, более предпочтителен и обоснован следующий простой подход: многочисленные и разнообразные процессы необратимой повреждаемости корректно связывать с трибофатической энтропией S_{TF} :

$$S_{TF} = \sum_1^n \omega_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Напомним, что трибофатическая энтропия S_{TF} определяется энергией, поглощаемой в системе [40–46]. Именно она расходуется на возникновение, развитие и накопление необратимых повреждений в любых системах. И именно она ведет к новому пониманию второго закона термодинамики: трибофатическая энтропия возрастает неограниченно: $S_{TF} \rightarrow \infty$ [40–43]. Таким образом, классическая формулировка второго закона термодинамики (энтропия Вселенной стремится к максимуму) заменяется современными физическими и философскими воззрениями [48].

Таблица 2 – Понятие об энтропии в различных разделах науки (аддитивные системы)

Р. Клаузиус	Термодинамика $dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}(dU + pdV) \geq 0$	[1, 2]
Дж. Гиббс	Химическая термодинамика $dS = \frac{1}{T} \sum_1^n \mu_k dN_k \geq 0$	[11]
Л. Больцман, А. Эйнштейн	Статистическая механика $S = k \log W;$ $P(\Delta S) = Ze^{-\Delta S/k}$	[2, 7]
П. Ковиней	Классическая динамика $\int_{\Gamma} d\mu_r M \rho_t$	[12]
Дж. фон Нейман	Квантовая механика $S = -k_B \cdot tr(\rho \log \rho)$	[13]
Л. Седов, Дж. Мейз	Механика сплошной среды $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(e)} + \sigma_{ij}^{(d)};$ $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij}^{(d)} \dot{\epsilon}_{ij}$	[14, 15]
К. Шеннон	Информатика $H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i),$	[9]

Конечно, здесь возникает и еще одна сложная задача. Многочисленные (множественные) необратимые повреждения (трибологические, усталостные, коррозионные, химические и мн. др.) развиваются в единой области, критическое состояние которой достигается не вследствие простого суммирования необратимых повреждений, обусловленных нагрузками разной природы, а в результате их сложнейших диалектических неаддитивных взаимодействий [49].

Таблица 3 – Сводка составляющих энтропии в процессе трения

$\Delta S' = \frac{\gamma}{T_m} \Delta A_S$	(6)	<p>Адгезия поверхностей и пленок, связанная с адгезионным износом и адгезионным трением, с изменением энтропии. Здесь поверхностная энергия интерфейса γ – это работа на единицу площади для создания новой площади поверхности ΔA_S и T_m – локальная температура среды.</p>
$\Delta S' = \frac{U_c}{T_m} \Delta V$	(7)	<p>Пластическая деформация, связанная с абразивным износом, фрикционной вспашкой и/или резанием, с изменением энтропии. Здесь U_c – это работа (пластическая деформация или резание) затрачено на единицу затронутого объема ΔV, а T_m – температура воздействующей материальной среды.</p>
$\Delta S' = \frac{G - 2\gamma_o}{T_{cr}} da$	(8)	<p>Разрушение, связанное с усталостным износом и повреждением поверхности, с изменением энтропии. Здесь a – длина трещины, $G = -\partial U_S / \partial a$ – скорость выделения энергии, зависящая от энергии деформации U_S, γ_o – поверхностная энергия, а T_{cr} – температура треснувшего материала на вершине трещины.</p>
$\Delta S' = \frac{\Delta H}{T_{phase}}$	(9)	<p>Фазовые переходы, связанные с поверхностным плавлением и перекристаллизацией металлов, с изменением энтропии. Здесь ΔH – изменение энтальпии – скрытого тепла, поглощенного или пролитого во время фазового перехода, а T_{phase} – температура, связанная с фазовым переходом.</p>
$\Delta S' = \frac{\bar{A}}{T_{cr}} d\xi,$ $\bar{A} = \sum_{\text{reactants}} \kappa_i \eta_i - \sum_{\text{products}} \kappa_i \eta_i$	(10)	<p>Химические реакции, связанные с химическим и окислительным износом, с изменением энтропии. Здесь химическое сродство A зависит от химических потенциалов η_i и стехиометрических коэффициентов κ_i реакции. Поскольку стехиометрия реакции связывает изменения молярных масс dN'_i реагентов и продуктов, степень реакции ξ имеет дифференциальное изменение $d\xi = \pm dN'_i / \kappa_i$, где минус относится к реакциям, а плюс – к продуктам.</p>
$\Delta S' = -R \sum_i^n \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N},$ $N = \sum_i^n N_i$	(11)	<p>Смешивание, которое для трибологии включает в себя смешивание материала третьего тела [22, 23], захваченного между поверхностями, с молярным изменением энтропии. Здесь R – универсальная газовая постоянная, N_i – молярные массы n видов, а соотношения N_i/N – молярные доли.</p>
$\Delta S' = \left(\frac{1}{T_l} - \frac{1}{T_h} \right) dQ$	(12)	<p>Теплопередача, связанная с диффузией тепла dQ из области более высокой температуры T_h в область более низкой температуры T_l, с изменением энтропии.</p>

$\frac{d_i S}{dt} = \frac{(pu)^2 \mu^2 A^2}{kT^2} + \frac{\gamma_D (\nabla \varphi)^2}{T}$	(13)	<p>Для двух диссипативных процессов: трения с силами $X_1 = -\nabla T/T^2$ и потоками $J_1 = -k\nabla T = \mu Nu$; и диффузии с $X_2 = -\nabla \varphi/T$ и $J_2 = -\gamma_D \nabla \varphi$, уравнение (11) приводит к данному выражению для получения энтропии. Здесь p и A – давление и номинальная площадь контакта, φ – химический потенциал, $p = N/A$, γ_D – коэффициент переноса, N – нормальная нагрузка, μ – коэффициент трения и u – скорость.</p>
$\left(\frac{d}{d(pu)} \right)_T \frac{d_i S}{dt} = \frac{2(pu)^2 \mu^2 A^2}{kT^2} + \frac{d\gamma_D (\nabla \varphi)^2}{T}$	(14)	<p>В работе [24] предполагается, что в неравновесном стационарном состоянии износ трибопленки пропорционален γ_D, а продукт pu является характеристикой трения. Поэтому для стационарной работы анализ проводится для условий минимума γ_D в зависимости от pu.</p>
$\gamma_D = \gamma_{D0} - \frac{(pu)^2 \mu^2 A^2}{kT(\nabla \varphi)^2}$	(15)	<p>Если (14) равно нулю и интегрировано, то получается данное выражение, где γ_{D0} – константа интегрирования.</p>

Второй принцип механотермодинамики. В соответствии со вторым принципом механотермодинамики [40, 42] потоки эффективной энергии U_{Σ}^{eff} (энтропии S_i), обусловленные источниками разной природы, неаддитивны и взаимодействуют между собой во времени. Принцип указывает движущую силу и основную причину возникновения и развития внутренней повреждаемости MTD-системы – это диалектические Λ -взаимодействия составляющих эффективной энергии в поглощающей среде. Такие функции взаимодействия должны принимать три класса значений ($\Lambda \gtrless 1$), чтобы отражать не только единство и борьбу, но и направленность процессов физического упрочнения ($\Lambda < 1$) – разупрочнения ($\Lambda > 1$) в системе. Поскольку упрочнение всегда конечно, тогда как интенсивность разупрочнения может быть неограниченно высокой, то взаимодействие таких процессов неизбежно приводит механотермодинамическую систему к критическим и предельным по поврежденности состояниям.

Очевидно, стоит новая и практически важная задача – плодотворно использовать ее для успешного и корректного решения задач трибологии. В качестве первого примера рассмотрим $\Delta S'$ по формулам (7)–(9)

$$\Delta S' = \frac{U_c}{T_m} \Delta V, \quad \Delta S' = \frac{G - 2\gamma_0}{T_{cr}} da, \quad \Delta S' = \frac{\Delta H}{T_{phase}}. \quad (16)$$

С точки зрения теории Λ -взаимодействий на самом деле имеем

$$\Delta S_{MTD} = \Lambda_{D \setminus PH} \left[\left(\frac{U_c}{T_m} \Delta V + \frac{G - 2\gamma_0}{T_{cr}} \right) \Lambda_D + \frac{\Delta H}{T_{phase}} \right], \quad (17)$$

где Λ_D – функция (коэффициент) взаимодействия между компонентами энтропии при поверхностном пластическом деформировании и трещинообразовании, $\Lambda_{D \setminus PH}$ – функция (коэффициент) взаимодействия между компонентами энтропии при механическом разрушении и изменении свойств материала во время фазового перехода.

В общем случае Λ -взаимодействия потоков эффективной энергии (энтропии), обусловленные источниками разной природы описываются выражениями [43, 44]

$$U_{\Sigma}^{eff} = U_{\Sigma}^{eff} (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m, U_1^{eff}, \dots, U_n^{eff}), \quad m < n, \quad (18)$$

$$S_i = S_i (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m, S_i^{(1)}, \dots, S_i^{(n)}), \quad m < n, \quad (19)$$

которые для простоты восприятия могут быть представлены в виде соответствующего гиперграфа (см. рис. 1).

Отметим, что в механотермодинамической системе [40, 42] концептуально можно анализировать две составляющие полной удельной энергии (u_i): эффективную (u_{Σ}^{eff}) и консервативную ($u_{\Sigma}^{cons} = u_i - u_{\Sigma}^{eff}$). Эффективной называют ту часть полной энергии, которая затрачивается на производство необратимых повреждений, обусловленных воздействиями разной природы (силовыми, фрикционными, тепловыми)

$$u_i^{eff} = A_i u_i, \quad (20)$$

где u_i – плотности внутренней энергии в элементарном объеме массы Δm для случаев сдвига (u_{τ}), отрыва (u_n) и теплового нагружения (u_T); A_i – коэффициенты, которые выделяют из полной энергии ее эффективную часть. Методики определения величин A_i разработаны [40, 42].

При оценке полной (суммарной – индекс Σ) эффективной энергии системы имеет место неаддитивный характер взаимодействия между ее компонентами, обусловленными воздействиями различной природы. Эти взаимодействия учитывают на макроуровне Λ -функциями в соответствии с [40, 42] и (17)–(19):

$$u_{\Sigma}^{eff} = \Lambda_{\alpha} (u_i^{eff}) = \Lambda_{M \setminus T} (\Lambda_{\tau/n}, A_i u_i) = \Lambda_{M \setminus T} \{ \Lambda_{\tau/n} [A_n u_n + A_{\tau} u_{\tau}] + A_T u_T \}. \quad (21)$$

где $\Lambda_{\alpha} \geq 1$ – комбинации возможных взаимодействий компонент необратимой энергии (необратимых повреждений).

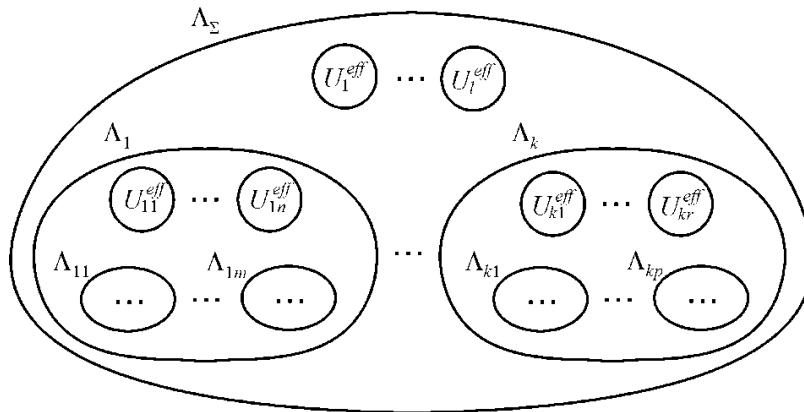


Рис. 1. Общая схема Λ – взаимодействий

Такие взаимодействия определяются нелинейными функциями вида $\Lambda_{\alpha} = \Lambda_{\alpha} [(\sigma / \sigma_{lim})^2, (\tau / \tau_{lim})^2, (T / T_{kp})^2, \dots] \geq 1$, где σ_{lim} , τ_{lim} , T_{kp} – критические значения параметров σ , τ , T , и могут быть представлены как частный случай рис. 1 в виде рис. 2.

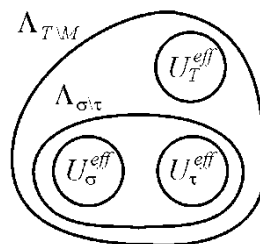


Рис. 2. Схема энергетического взаимодействия

Важнейшей особенностью механотермодинамической модели является учет предельного состояния, например, при наступлении пластичности или усталостном разрушении:

$$u_{\Sigma}^{\text{eff}} = u_0, \quad (22)$$

где предельная плотность внутренней энергии u_0 трактуется как начальная энергия активации процесса разрушения [40, 42].

Покажем практическую полезность критерия (22), обратившись к одному из частных его случаев – изотермической механической усталости (когда $\tau_w = 0$):

$$\Lambda_{M/T} (a_T T_{\Sigma} + a_{\sigma} \sigma^2) = u_0. \quad (23)$$

Из (23) следует, что

$$\lg \sigma_{-1T} = \frac{1}{2} \lg C_T; \quad C_T = [u_0 / \Lambda_{M/T} - a_T T] \cdot \frac{1}{a_{\sigma}}. \quad (24)$$

Проверка этой механотермодинамической функции выполнена по результатам более 600 испытаний материалов разной природы при типичных способах нагружения [40, 42]. Открывающиеся возможности прогнозирования работоспособности материалов переоценить трудно. Практически можно решать любую из двух задач: для заданных температурных условий (T) установить требования к материалу ($\sigma_{\text{lim}(T)}$), который планируется применять в заданных условиях, либо, имея новый конструкционный материал с определенными свойствами ($\sigma_{\text{lim}(T)}$), определить область температур (T), в которых он может успешно применяться. Такого рода мощная функция впервые получена в механотермодинамике. Известные температурные зависимости предельных напряжений [50] имеют, как правило, ограниченное по температурам (высокие, низкие, нормальные), условиям нагружения (статическое, растяжение, усталость и др.) и классу материалов (стали, полимеры, титановые и др. сплавы) применение.

Выводы. При описании состояния системы в терминах энергии либо энтропии обнаруживается важный недостаток – известная нереальность энергии и, следовательно, энтропии: материальные носители энергии не обнаружены и, по-видимому, не существуют. И их нельзя, как образно говорил Фейнман в упомянутых выше лекциях, пощупать. Совсем иное дело – повреждения: они физически реальны, их можно пощупать, они в действительности определяют состояния сплошности (целостности) материальных тел и систем; кинетический процесс их накопления, как и течение времени, является неизбежным и однонаправленным. Это означает: для данной системы стрела времени \vec{t} есть, по существу, и стрела повреждения $\vec{\omega}_{\Sigma}$. И если механотермодинамика принимает во внимание повреждаемость системы как ее фундаментальное физическое свойство (и обязанность), то можно надеяться, что на ее базе удастся создать непротиворечивую общую теорию эволюции любых систем, в том числе живых и разумных.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № T19MC-020.

ЛИТЕРАТУРА

1. Clausius, R. Mechanical Theory of Heat / R. Clausius. – London : John van Voorst, 1867.
2. Kondepudi, D. Modern Thermodynamics (From Heat Engines to Dissipative Structures) / D. Kondepudi, I. Prigogine. – John Wiley & Sons, 1998. – 486 p.
3. Физический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983. – 928 с.
4. Лыков, А. В. Теплообмен : справочник / А.В. Лыков. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
5. Эткинс, П. Порядок и беспорядок в природе / П. Эткинс. – М.: Мир, 1987. – С. 88, 90.

6. Eddington, A. S. *The Nature of Physical World (Gifford Lectures)* / A. S. Eddington. – Brooklyn: AMS Press, 1927.
7. Boltzmann, L. *Sitzungsber* / L. Boltzmann // *Acad. Wiss. Wien.* – Vol. 66. – 1872. – P. 275–370.
8. Planck, M. *Treatise on Thermodynamics* / M. Planck. – N.Y.: Dover, 1945. – 3rd ed.
9. Шеннон, К. *Работы по теории информации и кибернетике* / К. Шеннон. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 2002.
10. Tribus, M. *Energy and Information* / M. Tribus, E. C. McIrvine // *Scientific America.* – No. 224. – 1971. – P. 178–189.
11. Gibbs, J. W. *The Scientific Papers of Willard Gibbs* / J. W. Gibbs. – Vol. 1: *Thermodynamics.* – N.Y.: Dover, 1961.
12. Coveney, P. V. *The Second Law of Thermodynamics: Entropy, Irreversibility and Dynamics* / P. V. Coveney // *Nature.* – Vol. 333. – 1988. – P. 409–415.
13. J. von Neumann. *Matematische Grundlagen der Quantenmechanik.*
14. Мейз, Дж. *Теория и задачи механики сплошных сред* / Дж. Мейз. – М.: Мир, 1974. – 318 с.
15. Седов, Л. И. *Механика сплошной среды* / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – С. 420.
16. Сосновский, Л. А. Развитие понятия об энтропии: от термодинамики до космологии. сообщение 1. Понятие об энтропии: термодинамика, механика, информатика, трибофатика, механотермодинамика / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков // *Механика машин, механизмов и материалов.* – 2020. – № 3(52). – С. 78–88.
17. Basaran, C. *A Thermodynamic Framework for Damage Mechanics of Solder Joints.* *Trans. of ASME* / C. Basaran, Y. CY // *Journal of Electronic Packaging.* – 1998. – Vol. 120. – P. 379–384.
18. Tang, H. *Influence of Microstructure Coarsening on Thermomechanical Fatigue Behavior of Pb/Sn Eutectic Solder Joints* / H. Tang, C. Basaran // *Int. Journal of Damage Mechanics.* – July, 2001. – Vol. 10, No 3. – P. 235–255.
19. Basaran, C. *Thermomechanical Analysis of Solder Joints Under Thermal and Vibrational Loading* / C. Basaran, R. Chandaroy // *Tran. ASME Journal of Electronic Packaging.* – March, 2002. – Vol. 124, No 1. – P. 60–67.
20. Basaran, C. *Implementation of a Thermodynamic Framework for Damage Mechanics of Solder Interconnects in Microelectronic Packaging* / C. Basaran, H. Tang // *International Journal of Damage Mechanics.* – 2002. – Vol. 11. – P. 87–108.
21. Tang, H. *A Damage Mechanics Based Fatigue Life Prediction Model* / H. Tang, C. Basaran // *Trans. Of ASME, Journal of Electronic Packaging.* – 2003. – Vol. 125. – P. 120–125.
22. Basaran, C. *A Thermodynamic Model for Electrical Current Induced Damage* / C. Basaran, M. Lin, H. Ye // *Int. Journal of Solids and Structures.* – 2003. – Vol. 40. – P. 7315–7327.
23. Basaran, C. *An Irreversible Thermodynamic Theory for Damage Mechanics of Solids* / C. Basaran, S. Nie // *International Journal of Damage Mechanics.* – 2004. – Vol. 13. – P. 205–224.
24. Basaran, C. *A Thermodynamics Based Damage Mechanics Model for Particulate Composites* / C. Basaran, S. Nie // *International Journal of Solids and Structures.* – 2007. – Vol. 44.
25. Yao, W. *Computational damage mechanics of electromigration and thermomigration* / W. Yao, C. Basaran // *Journal of Applied Physics.* – 2013. – Vol. 114.
26. Yao W, Basaran C. *Electromigration Analysis of Solder Joints under AC Load: a Mean Time to Failure Model* / W. Yao, C. Basaran // *Journal of Applied Physics.* – 2012. – Vol. 111.
27. Bryant, M. D. *Entropy and Dissipative Processes of friction and Wear* / M. D. Bryant // *FME Trans.* – 2009. – Vol. 37. – P. 55–60.
28. Bryant, M. D. *Unification of Friction and Wear.* In *Recent Developments in Wear Prevention* / M. D. Bryant // *Friction and Lubrication*; Nikas, G., Ed.; Old City Publishing: Philadelphia, PA, USA. – 2010. – P. 159–196.

29. Bryant, M. D. On the thermodynamics of degradation / M. D. Bryant, M. M. Khonsari, F. F. Ling // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 2008. – Vol. 464. – P. 2001–2014.
30. Ling, F. F. On Irreversible Thermodynamics for Wear Prediction / F. F. Ling, M. D. Bryant, K. L. Doelling // *Wear.* – 2002. – Vol. 253. – P. 1165–1172.
31. Doelling, K. L. An experimental study of the correlation between wear and entropy flow in machinery components / K. L. Doelling [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 2000. – 88. – P. 2999–3003.
32. Bryant, M. D. Application of degradation-entropy generation theorem to dry sliding friction and wear / M. D. Bryant, M. M. Khonsari // In *Proceedings of the STLE/ASME International Joint Tribology Conference, 20–22.10.2008, Miami, FL, USA.* – 20–22 October 2008.
33. Amiri, M. On the Thermodynamics of Friction and Wear / M. Amiri, M. M. Khonsari // *A Review. Entropy.* – 2010. – Vol. 12. – P. 1021–1049.
34. Amiri, M. On the Relationship Between Wear and Thermal Response in Sliding Systems / M. Amiri, M. M. Khonsari, S. Brahmeshwarkar // *Tribol. Lett.* – 2010. – Vol. 38. – P. 147–154.
35. Beheshti, A. On the Prediction of Fatigue Crack Initiation in Rolling/Sliding Contacts with Provision for Loading Sequence Effect / A. Beheshti, M. M. Khonsari // *Tribol. Int.* – 2011. – Vol. 44. – P. 1620–1628.
36. Naderi, M. A Comprehensive Fatigue Failure Criterion Based on Thermodynamic Approach / M. Naderi, M. M. Khonsari // *J. Compos. Mater.* – 2012. – Vol. 46. P. 437–447.
37. Naderi, M. Dissipated Thermal Energy and Damage Evolution of Glass/Epoxy Using Infrared Thermography and Acoustic Emission / M. Naderi, A. Kahirdeh, M. M. Khonsari // *J. Compos. B Eng.* – 2012. – Vol. 43. – P. 1613–1620.
38. Aghdam, A. B. On the fretting crack nucleation with provision for size effect / A. B. Aghdam, A. Beheshti, M. M. Khonsari // *Tribol. Int.* – 2012. – Vol. 47. – P. 32–43.
39. Amiri, M. An Application of Dimensional Analysis to Entropy-Wear Relationship / M. Amiri, M. M. Khonsari, S. Brahmeshwarkar // *J. Tribol.* – 2012. – Vol. 134.
40. Sosnovskiy, L. A. *Mechanothermodynamics* / L. A. Sosnovskiy, S. S. Sherbakov. – Berlin: Springer, 2016. – 155 p.
41. Щербаков, С. С. Модели состояний трибофатических и механотермодинамических систем / С. С. Щербаков // *Актуальные вопросы машиноведения : сб. науч. тр. – Вып. 8.* – Минск : ОИМ НАНБ, 2019. – С. 204–208.
42. Сосновский, Л. А. Принципы механотермодинамики / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков. – Гомель: БелГУТ. – 2013. – 150 с.
43. Sosnovskiy, L. A. Mechanothermodynamical system and its behavior / L. A. Sosnovskiy, S. S. Sherbakov // *Continuum Mech. Thermodyn.* – 2012. – Vol. 24, Issue 3. – P. 239–256.
44. Сосновский, Л. А. Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский // Гомель : БелГУТ, 2007. – 434 с.
45. Щербаков, С. С. Механика трибофатических систем / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. – Минск : БГУ, 2010. – 407 с.
46. Сосновский, Л. А. Основы трибофатики : учеб. пособие : [доп. Мин-вом образования Респ. Беларусь в качестве учебного пособия для студентов технических высших учебных заведений] / Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2003. – Т. 1. – С. 246.; Т. 2. – 234 с.
47. Sosnovskiy, L. A. Tribo-Fatigue. Wear-Fatigue Damage and Its Prediction / L. A. Sosnovskiy // *Series : Foundations of Engineering Mechanics, Springer.* – 2005. – P. 424.
48. Сосновский, Л. А. Основы теории эволюции неорганических и органических систем, в том числе живых и разумных / Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков, А. А. Лазаревич // *Национальная философия в глобальном мире : материалы Первого белорусского философского конгресса, Минск, 18–20 окт. 2017.* – Минск : Беларуская навука, 2018. – С. 155–178.
49. Сосновский, Л. А. Механотермодинамика (об объединении великих конкурентов: 1850-2015) / Л. А. Сосновский // *Механика машин, механизмов и материалов.* – 2016. – № 4(37). – С. 19–41.

50. Форрест, П. Усталость металлов: Пер. с англ. / П. Форрест / Под ред. С. В. Серенсена. – М., 1968. – 352 с.
51. Сосновский, Л. А. Статистическая механика усталостного разрушения / Л. А. Сосновский. – Минск : Наука и техника, 1987. – 288 с.

Поступила: 01.02.2021

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БИМЕТАЛЛИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

Дудяк А. И., Хвасько В. М.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Исследования ставят своей целью разработать методику определения нормальных напряжений в биметаллическом стержне, который представляет собой два сваренных между собой стержня по всей плоскости их контакта методом сварки трением или сварки взрывом. Материалы стержня отличаются между собой физико-механическими характеристиками. При выводе теоретических зависимостей будем считать, что в каждый момент времени нагрева температура материалов одинакова, то есть температурное поле однородно [1, 2].

Рассмотрим деформацию биметаллического стержня, подвергаемого равномерному нагреву от начальной температуры t_n до конечной t_k . Разность температур между начальной и конечной равна:

$$\Delta t = t_k - t_n. \quad (1)$$

Пусть $\alpha_1 > \alpha_2$ означают коэффициенты линейного температурного расширения металлов, а $E_2 > E_1$ – модули упругости этих металлов (рис. 1).

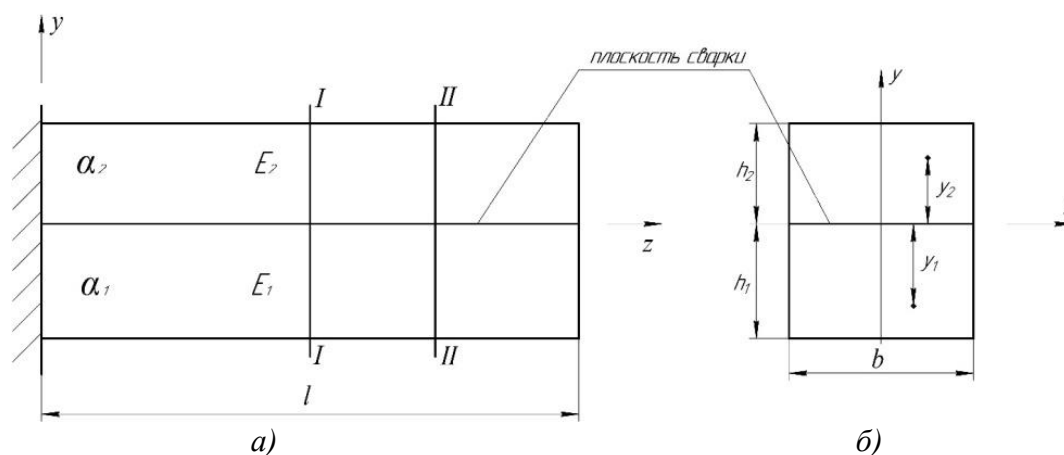


Рис. 1. Схема биметаллического стержня: а) продольное сечение; б) поперечное сечение

Поперечное сечение стержня имеет прямоугольную форму одинаковой ширины, но различной высоты металлов $h_1 \neq h_2$. При дальнейшем анализе будем считать, что первоначально плоские и перпендикулярные к оси z поперечные сечения стержня остаются плоскими и перпендикулярными к искривленной оси. Рассмотрим деформацию элемента, вырезанного двумя плоскостями I-I и II-II (рис. 2). При этом нижняя часть биметаллического стержня с большим коэффициентом линейного удлинения α_1 будет способствовать дополнительному удлинению верхней части стержня и, наоборот, верхняя часть стержня с меньшим коэффициентом линейного удлинения α_2 будет затруднять удлинение нижней части стержня. Поэтому в верхней части возникает растягивающая сила F_1 , а в нижней части – сжимающая F_2 [1, 2].

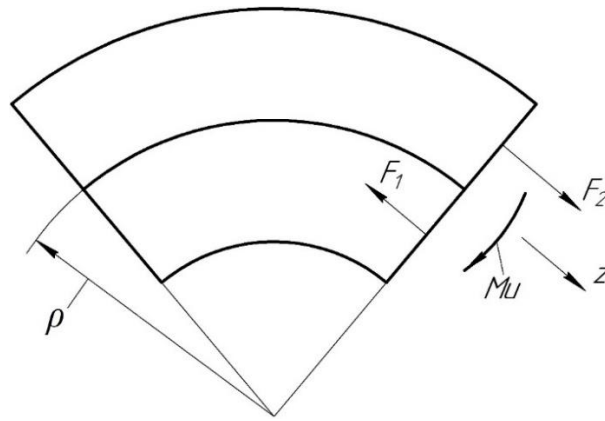


Рис. 2. Схема деформации биметаллического элемента стержня

Вследствие того, что к биметаллическому стержню не прикладываются внешние нагрузки, то силы, возникающие в любом поперечном сечении, должны быть уравновешены. Из условий статического равновесия следует [2]:

$$\sum F_{(z)} = 0; \quad F_2 - F_1 = 0; \quad F_1 = F_2 = F. \quad (2)$$

В результате такого действия сил в поперечных сечениях стержня возникает изгибающий момент $M_{ш}$. Данный стержень работает на изгиб как единое целое, а поэтому в стержне будет возникать нейтральный слой, который не подвергается деформации. Рассмотрим случай частого изгиба стержня, когда нейтральный слой совпадает с плоскостью сварки металлов.

Деформации от изгиба в нейтральном слое всегда равны нулю. Деформации нижних и верхних слоев металла в плоскости сварки от действия температуры и внутренних сил F_1 и F_2 также должны быть равны нулю, что можно выразить в виде уравнений.

$$\alpha_1 \cdot \Delta t - \frac{F_1}{E_1 A_1} = 0; \quad (3)$$

$$\alpha_2 \cdot \Delta t - \frac{F_2}{E_2 A_2} = 0. \quad (4)$$

Приравнявая между собой левые части уравнений (3) и (4) и с учетом равенства (2) будем иметь:

$$\alpha_1 \cdot \Delta t - \frac{F}{E_1 A_1} = \alpha_2 \cdot \Delta t - \frac{F}{E_2 A_2} = 0. \quad (5)$$

Откуда:

$$F = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \Delta t}{\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2}}. \quad (6)$$

Нормальные напряжения в поперечных сечениях (рис.1, б), согласно закону Гука, можно представить в виде [1]:

$$\sigma_1 = -E_1 \cdot \frac{y_1}{\rho}; \quad \sigma_2 = -E_2 \cdot \frac{y_2}{\rho}, \quad (7)$$

где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя; y_1 и y_2 – координаты точек, в которых определяют напряжение.

Из условий статического равновесия (2) следует:

$$\frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y_2 dA_2 - \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y_1 dA_1 = 0. \quad (8)$$

Интегралы представляют собой статические моменты площадей отдельных частей сечения, а поэтому:

$$E_2 \cdot b \cdot h_2 \cdot \frac{h_2}{2} - E_1 \cdot b \cdot h_1 \cdot \frac{h_1}{2} = 0. \quad (9)$$

Откуда:

$$h_1 = h_2 \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}. \quad (10)$$

При данном соотношении (10) высот металлов нейтральный слой будет совпадать с плоскостью соединения металлов. Распределение нормальных напряжений по высоте сечения приведено на рис. 3, б).

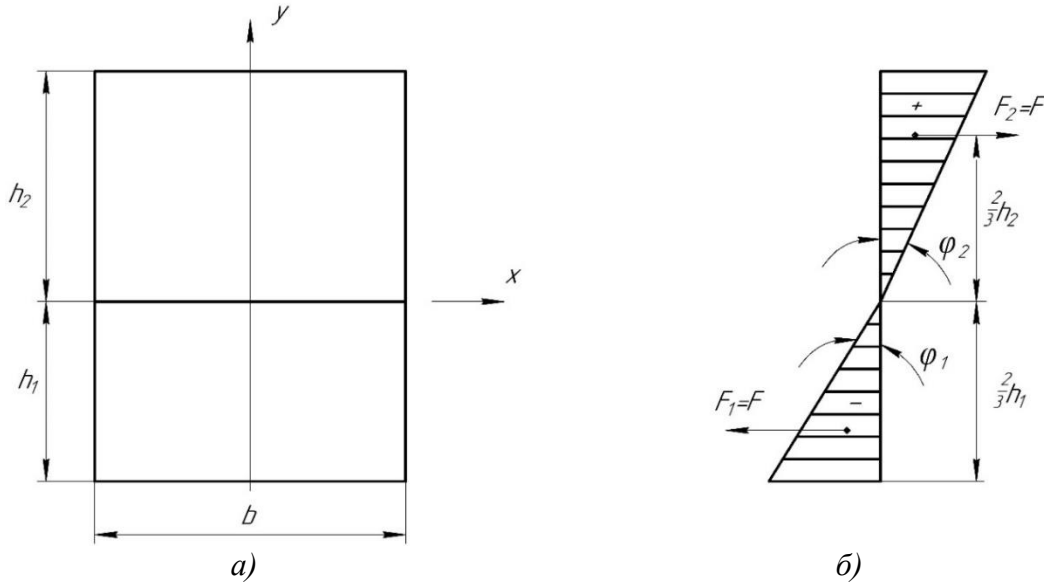


Рис. 3. Схема биметаллического стержня: а) Поперечное сечение стержня; б) распределение нормальных напряжений по высоте сечения

При чистом изгибе внутренняя сила F представляет собой равнодействующую нормальных напряжений и прикладывается в центре тяжести эпюры (рис. 3, б) [1].

Изгибающие моменты в любых сечениях стержня от нагревания, будут равны:

$$M_{и} = \frac{2}{3} F (h_1 + h_2). \quad (11)$$

Величину обратную радиуса кривизны нейтрального слоя можно представить в виде:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{и}}{(EI_x)_C}, \quad (12)$$

где $(EI_x)_C$ – суммарная жесткость поперечного сечения, которая будет вычисляться из формулы:

$$(EI_x)_C = E_1 \left[\frac{bh_1^2}{12} + b \cdot h_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 \right] + E_2 \left[\frac{bh_2^2}{12} + b \cdot h_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Рассматривая совместно формулы (7) и (12), получим формулы для определения величин максимальных нормальных напряжений, возникающих в сечениях стержня:

$$\sigma_1 = -\frac{M_{и} E_1}{(EI_x)_C}; \quad \sigma_2 = -\frac{M_{и} E_2}{(EI_x)_C}. \quad (14)$$

Выводы. Из распределения нормального напряжения по высоте сечения (рис. 3, б) легко видеть, что напряжения достигают максимального значения в наиболее удаленных зонах от нейтральной линии и отличаются углами наклона эпюр ϕ_1 и ϕ_2 от вертикали. Напряжения распределены таким образом, что взаимно уравниваются и приводят к возникновению двух противоположно направленных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – Москва: Наука, 1972. – 541 с.
2. Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко. – Москва: Наука, 1971. – 807 с.

Поступила: 26.01.2021

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКИ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Мармыш Д. Е.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. При исследовании многокомпонентных систем, в которых возникает сложное напряженно-деформированное состояние вследствие взаимовлияния различных условий нагружения, концепция тела с опасным объемом представляет собой удобный и эффективный инструмент исследователя. Анализ повреждаемости многокомпонентной системы позволяет проводить оптимизацию условий нагружения. Как показывают экспериментальные исследования на циклическую усталость, комбинация внешних действующих нагрузок позволяет снизить показатели повреждаемости и, тем самым, увеличить срок службы как отдельных элементов, так и всей системы [1, 2]. Теоретическое обоснование данного явления можно найти в работе [3]. Изучению и обоснованию концепции твердого тела с опасным объемом посвящено большое количество работ, обзор которых можно найти в статьях [4, 5].

Повреждаемость и ее определение. Рассмотрим твердое деформируемое тело (систему тел). В пространственном случае распределение полей напряжений описывается функциями $\sigma_{ij} = f_{ij}(x, y, z)$, где $i, j = 1, 2, 3$, $x, y, z \in R$. Выбрав некоторое предельное напряжение σ_{lim} , можно записать неравенство для определения повреждаемой области твердого тела:

$$f_{ij}(x, y, z) \geq \sigma_{lim}. \quad (1)$$

Следует отметить, что предельные нормальные σ_{lim}^n и касательные напряжения σ_{lim}^t в работе [6] рекомендуется брать как 0,3 и 0,03 от максимального значения контактного давления p_0 соответственно, т. е.

$$\sigma_{lim}^n = 0,3p_0, \quad \sigma_{lim}^t = 0,03p_0.$$

Множество точек, удовлетворяющих неравенству (1), определяет повреждаемую область или опасный объем твердого тела. В теории повреждаемости можно выделить 2 ключевых количественных показателя [3]:

– опасный объем, который определяется по формуле

$$V = \int_{\Omega} dV, \quad (2)$$

где

$$dV = \begin{cases} dx dy dz, & f_{ij}(x, y, z) \geq \sigma_{lim}, \\ 0, & f_{ij}(x, y, z) < \sigma_{lim}, \end{cases} \quad (3)$$

где dx, dy, dz – стороны элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности исследуемой точки;

– интегральная повреждаемость

$$\Psi = \int_{\Omega} \varphi dV, \quad (4)$$

где локальная повреждаемость в точке φ находится как отношение действующего напряжения σ_{ij} к предельному σ_{lim} , т. е. $\varphi = \sigma_{ij} / \sigma_{lim}$.

При вычислении количественных значений показателей повреждаемости исследователь сталкивается с двумя сложностями. Во-первых, необходимо провести оценку

напряженно-деформированного состояния системы взаимодействующих твердых тел, что зачастую в аналитическом случае невозможно и приходится применять численные методы (метод конечных элементов, метод граничных элементов и др.). Во-вторых, даже если функции $f_{ij}(x, y, z)$ получены в аналитическом виде, то непосредственное их интегрирование по формулам (2) и (4) затруднено. Получить конечные формулы для вычисления опасного объема и интегральной повреждаемости можно лишь в простейших случаях геометрии деформируемого твердого тела и условий нагружения, например для толстой трубы подверженной кручению и/или температурному воздействию [7]. Для более сложных случаев могут быть применены методики основанные на численном анализе.

Подход основанный на построении расчетной сетки. После определения полей напряжений можно предложить следующий алгоритм:

- 1) определение границ области D , в которой содержится опасный объем Ω ;
- 2) построение по области D ортогональной расчетной сетки с шагами dx , dy , dz соответственно вдоль каждой из трех координатных осей;
- 3) расчет напряжений $\sigma_{ij}(A_k)$ в каждой точке A_k расчетной сетки, являющейся центром параллелепипеда со сторонами d_x , d_y , d_z ;
- 4) определение количества точек N , в которых действующие напряжения превышают предельные;
- 5) опасный объем V и интегральная повреждаемость Ψ определяются по формулам

$$V = N \frac{d_x \cdot d_y \cdot d_z}{V_D}, \quad \Psi = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{ij}(A_k)}{\sigma_{lim}} d_x \cdot d_y \cdot d_z,$$

где V_D – объем области D .

В работе (8) показана сходимость предложенного подхода для нескольких частных случаев нагружения упругого полупространства в комбинации с применением метода аналитического граничного элемента при численном расчете напряженно-деформированного состояния. Преимуществом данного подхода является достаточная простота алгоритмизации вычислений и легкое управление погрешностью оценки показателей повреждаемости. Однако, у подхода, основанного на построении расчетной сетки имеется существенный недостаток – длительное машинное время затрачиваемое на вычисление напряжений в каждом расчетном узле.

Аналогичный подход используется при вычислении повреждаемости методом конечных элементов, только в этом случае суммируются не объемы параллелепипедов со сторонами d_x , d_y , d_z , а объемы каждого конечного элемента, напряжения в которых превышают предельные. При конечно-элементном моделировании напряжения на элементе могут сравниваться с предельным по каждому узлу либо могут браться усредненные по всем узлам принадлежащим одному конечному элементу. В работе [9] применен вышеописанный подход для конечно-элементного моделирования контактной пары колесо/рельс и определения повреждаемости системы.

Подход основанный на методе Монте-Карло. При использовании данного подхода множество расчетных точек генерируется случайным образом из области D , в которой содержится опасный объем. Алгоритм можно представить как последовательность следующих шагов:

- 1) определение границ области D , в которой содержится опасный объем Ω ;
- 2) генерация случайным образом точек $A_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, N$) из области D . Для генерации могут использоваться различные распределения (равномерное, нормальное, распределение Пуассона и др.);
- 3) определение количества точек K , в которых действующие напряжения σ_{ij} превышают предельные σ_{lim} ($K < N$);

4) вычисление показателей повреждаемости по формулам

$$V = K \cdot dV, \quad \Psi = dV \cdot \sum_{i=1}^K \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{\text{lim}}}, \quad dV = \frac{(x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) \cdot (z_2 - z_1)}{N}, \quad (5)$$

где $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ – нижняя и верхняя, соответственно, границы области D вдоль каждой из трех координатных осей.

Методы Монте-Карло обеспечивают точность порядка C/\sqrt{N} , где N – число расчетных узлов и, согласно закону больших чисел, численные значения интегралов (2) и (4), полученные методом Монте-Карло, сходятся к точному значению при увеличении числа N [10].

На рис. 1 и 2 представлены графики опасного объема и интегральной повреждаемости полупространства от равномерно распределенной по квадрату со стороной $2a$ нагрузки интенсивности p_0 и направленной перпендикулярно ограничивающей плоскости полупространства вдоль оси Oz . Повреждаемость вычислялась по нормальным напряжениям σ_{zz} и эквивалентным (по Мизесу) напряжениям σ_{eqv} , соответственно. В качестве предельного значения для нормальных напряжений бралась величина $\sigma_{\text{lim}}^m = 0,3p_0$, а для эквивалентных – $\sigma_{\text{lim}}^{\text{eqv}} = 0,27p_0$ ($P = p_0a^2$) [8].

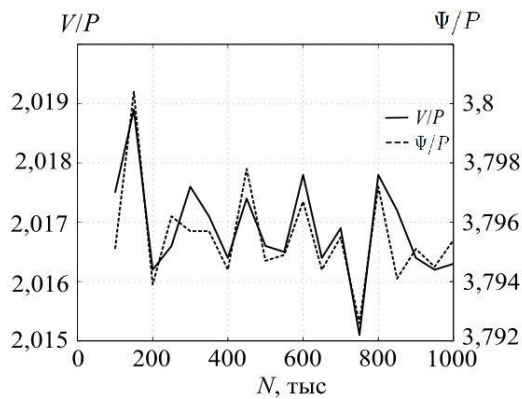


Рис. 1. Опасный объем и повреждаемость для нормальных напряжений

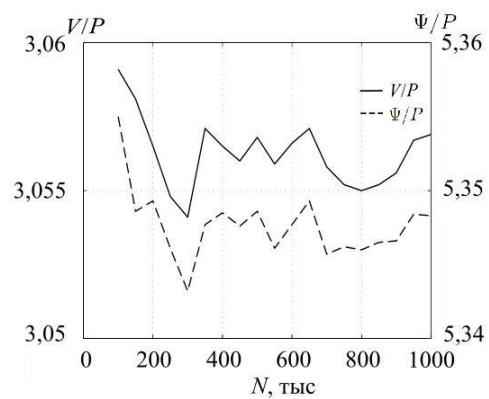


Рис. 2. Опасный объем и повреждаемость для эквивалентных (по Мизесу) напряжений

Как видно из представленных рисунков, при увеличении количества расчетных узлов (точек интегрирования) разброс значений уменьшается, а численная величина сходится к точной.

При использовании метода со случайной генерацией точек интегрирования, нет необходимости в дополнительном построении расчетной сетки и контроле, чтобы эта сетка полностью покрывала повреждаемую область твердого тела или системы твердых тел. К преимуществу данного метода также можно отнести простоту алгоритмизации вычислений. Недостатком метода Монте-Карло является длительное машинное время, необходимое на вычисление напряженного состояния в каждой точке интегрирования.

Здесь также стоит отметить, что, как и при построении расчетной сетки по деформируемой среде, так и при случайной генерации узлов интегрирования, напряжения в двух разных точках рассчитывается независимо, поэтому при оценке напряженно-деформированного состояния есть возможность применения технологий параллелизации вычислений для ускорения и снижения затрат машинного времени. В работе [11] показано, что использование технологии CUDA при гранично-элементном моделировании напряженного состояния тела, коэффициент ускорения вычислений может достигать до 25.

Подход, основанный на модели логистической регрессии. Численные подходы оценки повреждаемости среды по формулам (2) и (4) основываются на предварительном

вычислении напряженного состояния в выбранном узле. В случае, если действующее напряжение превышает предельное, то кумулятивная величина опасного объема увеличивается на значение dV , где dV – конечный объем области, выделенной в окрестности расчетного узла. В случае же, если действующее напряжение меньше предельного, то переходим к следующей точке интегрирования. Таким образом, напряженное состояние рассчитывается в каждой точке, но в расчет повреждаемости входят только те, напряжение в которых удовлетворяет условию $f_{ij}(x, y, z) \geq \sigma_{lim}$.

Алгоритмический подход, использующий модель логистической регрессии, основывается на аппроксимации бинарной функции

$$\delta(A) = \begin{cases} 0, & A \in \Omega, \\ 1, & A \notin \Omega, \end{cases} \quad (6)$$

логит-функцией

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j\right)}, \quad (7)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ – вектор значений; $\mathbf{a} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$ – вектор коэффициентов.

Функция (7) определяет вероятность попадания расчетной точки в повреждаемую область. Пороговым значением для бинарного определения принадлежности области является значение $P(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0,5$. Применение логит-модели к вычислению показателей повреждаемости твердого тела можно представить в виде следующего алгоритма действий:

1) определение границ области D , такой что повреждаемая область Ω должна содержаться в D , т. е. $\Omega \subset D$;

2) генерация множества размера n расчетных точек из области D . Множество может формироваться случайным образом, так и быть упорядоченным по какому-либо признаку.

3) Для множества расчетных точек провести бинарную классификацию на принадлежность к повреждаемой области;

4) формирование обучающей выборки (\mathbf{x}_i, δ_i) , $i = 1, \dots, N$ и оценка коэффициентов логит-модели. Оценку вектора коэффициентов \mathbf{a} можно проводить одним из известных методов, однако, наиболее часто используется метод максимального правдоподобия [12];

5) оценка качества построенной логит-модели. Для оценки качества бинарных классификаторов, как правило, применяют ROC-анализ [13];

6) в случае удовлетворительно качества, генерация множества \bar{N} ($\bar{N} \ll N$) и применение логит-модели для количественной оценки повреждаемости твердого тела.

Непосредственное применение логит-модели предполагает линейную разделимость данных, к которым она применяется. Геометрия опасного объема имеет нелинейную форму, например для системы ролик/вал повреждаемая область имеет вид, представленный на рис. 3 [14]. В случае линейной неразделимости, к исходным данным применяется классифицирующая функция. На практике наиболее часто применяются следующие классифицирующие функции [12]:

– полиномиальная функция степени d : $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle + c)^d$, $c = \text{const}$;

– радиальная базисная функция: $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-\gamma \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2)$, $\gamma > 0$;

– сигмоидальная функция: $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \tanh(k \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle + c)$, $k > 0$, $c < 0$.

Модель логистической регрессии была применена к нахождению повреждаемой области полупространства при действии на него нормально распределенной нагрузки вида

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2},$$

где p_0 – максимальное давление в центре распределения; a и b – значения полуосей эллиптической площадки распределения.

На рис. 4 показана точность классификации точек интегрирования по принадлежности к повреждаемой области полупространства. В каждом из случаев генерировалось случайным образом 10 наборов расчетных точек. Как видно из рис. 4, при увеличении количества точек, разброс в точности бинарной классификации снижается и для обучающей выборки равной 5000 точек, точность находится в пределах от 95,5 % до 96,5 %. Исходя из экспертной шкалы, принятой в научной литературе [13], качество построенной модели логистической регрессии можно отнести к «очень хорошему».

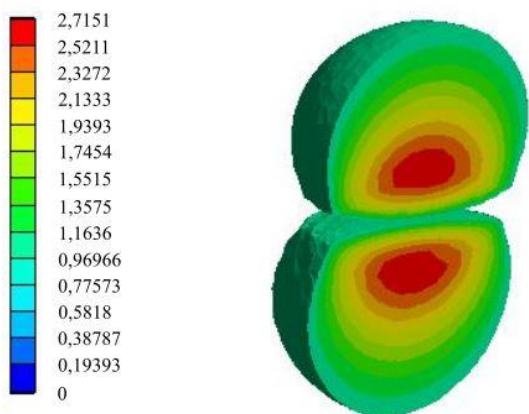


Рис. 3. Геометрия опасного объема в системе ролик/вал

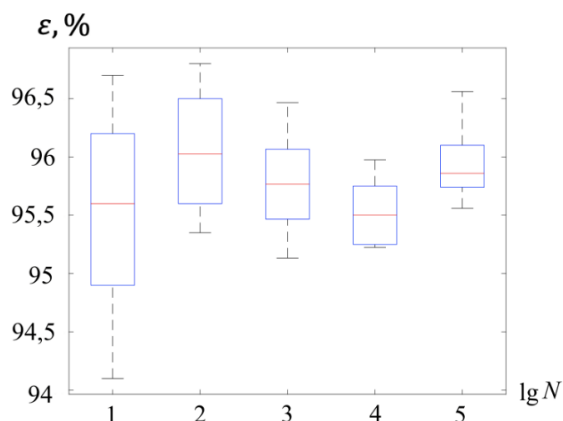


Рис. 4. Точность логит-модели по определению принадлежности к опасному объему

Для получения линейно разделимого множества точек, была применена полиномиальная функция степени 0,5 с постоянной c равной 0.

Недостатком применения метода логистической регрессии является относительная сложность алгоритмизации вычислительных процедур и оценка их эффективности. Преимуществом же данного метода является возможность значительного ускорения вычислений, т. к. для каждой точки интегрирования по простой формуле (7) определяется вероятность принадлежности ее к опасному объему и нет необходимости в определении точного значения напряжения в этой точке.

Выводы. Вычисление количественных показателей повреждаемости твердого деформируемого тела (системы тел) в аналитическом виде возможно только для простейших случаев геометрии и нагружения тела (системы тел). При конечно-элементном моделировании напряженно-деформированного состояния опасный объем определяется как сумма объемов каждого конечного элемента, в узлах которого действующие напряжения превышают предельные. При аналитическом или численно-аналитическом определении напряженного состояния, например методом граничных интегральных уравнений или методом граничных элементов, для количественной оценки величин опасного объема и интегральной повреждаемости может быть применен один из вышеописанных алгоритмов либо их комбинация. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки по затратам машинного времени и точности вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосновский, Л. А. Экспериментальное построение полной кривой контактной усталости пары «высокопрочный чугун ВЧТГ / сталь 18ХГТ» и ее анализ / Л. А. Сосновский, В. В. Комиссаров, Е. С. Таранова, С. А. Тюрин // Механика машин, механизмов и материалов. – 2014. – № 1(26). – С. 32–39.

2. Таранова, Е. С. Некоторые результаты натурных испытаний эпициклических шестерен МК-23.М03.661 / Е. С. Таранова, В. О. Замятнин, В. В. Комиссаров // Материалы. Технологии. Инструмент. – 2013. – Т. 18. – № 1. – С. 86–91.
3. Щербаков, С. С. Механика трибофатических систем / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.
4. Sosnovskiy, L. A. Methods and main results of Tribo-Fatigue tests / A. Sosnovskiy [et al.] // International Journal of Fatigue. – 2014. – Vol. 66. – P. 207–219.
5. Щербаков, С. С. Механотермодинамика: основные результаты и перспективы / С. С. Щербаков // Актуальные вопросы машиноведения. – Вып. 9. – Мн.: ОИМ, 2020. – С. 13–17.
6. Сосновский, Л. А. Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.
7. Мармыш, Д. Е. Повреждаемость толстостенного цилиндра для различных типов граничных условий / Д. Е. Мармыш // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. – 2020. – С. 64–69.
8. Мармыш Д. Е. Сходимость метода аналитического граничного элемента при анализе напряженного состояния и состояния повреждаемости среды / Д. Е. Мармыш // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика». – Вып. 35. – Мн.: БНТУ, 2020. – С. 92–98.
9. Щербаков С. С. Напряженно-деформированное состояние и объемная повреждаемость в окрестности контактного взаимодействия в трибофатической системе колесо / рельс с учетом неконтактного деформирования рельса / С. С. Щербаков, О. А. Насань // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2016. – № 1(32). – С. 234–247
10. Rubinstein, R. Y. Simulation and the Monte-Carlo method / R. Y. Rubinstein, D. P. Kroese. – 3rd edition. – Wiley: NY, 2016. – 372 p.
11. Щербаков, С. С. Ускорение гранично-элементных расчетов с помощью графического акселератора для элементов с нелинейными функциями формы / С. С. Щербаков, М. М. Полещук // Механика машин, механизмов и материалов. – 2019. – № 4(49). – С. 89–94.
12. Hosmer, D. W. Applied logistic regression / D. W. Hosmer, S. Lemeshow. – 2nd edition. – Wiley: NY, 2000. – 375 p.
13. Kumari, R. Machine learning: a review on binary classification / R. Kumari, S. K. Srivastava // Int. J. of Computer Applications. – 2017. – Vol. 160, iss. 7. – P. 11–15.
14. Мармыш, Д. Е. Пространственное напряженно-деформированное состояние и объемная повреждаемость системы «ролик-вал» / Д. Е. Мармыш // Актуальные вопросы машиноведения. – 2015. – № 4. – С. 248–251.

Поступила: 30.01.2021

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ СОВРЕМЕННЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

¹Докукова Н. А., ²Кафтайкина Е. Н.

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Иностранное общество с ограниченной ответственностью «Плэйтика Бел», Минск

Разработка и проектирование новых компонентов виброизоляции машиностроительных конструкций гидроопор является новой отраслью развития автомобилестроения. Они различаются по двум основным типам: управляемые и пассивные. К управляемым гидроопорам относят такие, которые содержат в себе реологические, магнитореологические жидкости и электронные устройства, обеспечивающие контроль за движением виброизолируемого объекта, с датчиками положений, контроля скоростей и ускорений. Их называют активными виброамортизаторами, способными изменять свои жесткостные характеристики в соответствии с потенциально происшедшим событием, случайно возникающим во время эксплуатации механического устройства. Принцип работы пассивных гидроамортизаторов основан на использовании во время эксплуатации физических свойств конструктивных элементов. Эти одноосные амортизирующие устройства достойно занимают ведущие места в мировом автопроме по уровню себестоимости, простоты изготовления, экономичности, заменяемости, они не требуют дополнительных затрат на создание электронных устройств, обеспечивающих поддержание электрических и магнитных полей в активных гидроопорах.

Система виброизоляции современного технического устройства включает в себя несколько упругодемпфирующих элементов, параллельно работающих и выполняющих разные функциональные назначения. Упругие металлические пружины смягчают колебания и поддерживают конструкцию, являясь частью несущей опоры [1, 2]. Демпфирующие элементы, за счет поглощения излишней кинетической энергии, обеспечивают качественные параметры плавности хода в различных дорожных условиях [3–5].

В качестве пассивных виброизоляторов мобильной техники могут быть резинометаллические амортизаторы, сайлент-блоки, гидроопоры и др. [6–12]. Предварительное проектирование таких объектов связано с использованием простейших упругих и демпфирующих элементов, линейно и нелинейно зависящих от перемещений и скоростей. Обобщенная модель виброизоляции части технического устройства представлена на рис. 1 в виде динамической схемы с пассивной одноосной гидроопорой и инерционным трансформатором. В его состав входят элементы: m_2 – масса инерционного трансформатора, c_2 , c_4 – коэффициенты упругих деталей и материалов, b_2 , b_4 – коэффициенты демпфирования гидродинамических сред с их линейными и нелинейными свойствами по отношению к кинематическим параметрам.

Динамическая модель воссоздает движения трехмассовой механической системы, в которой массы m_1 , m_2 и m_3 имеют конечные величины, m_0 – неограниченно большая масса основания.

Приложенная к m_0 периодически изменяющаяся, вибрационная сила $F(t) = A \sin(\omega t)$ вызывает кинематическое возбуждение основания с виброперемещением x_0 , виброскоростью \dot{x}_0 , виброускорением \ddot{x}_0 , которые могут быть легко установлены экспериментальным путем.

Сравним чем отличаются две постановки задачи: первая – со всеми линейными параметрами физических коэффициентов, вторая – с нелинейной силой демпфирования при коэффициенте b_4 со следующим законом ее изменения

$$\overline{F_{\text{демпф.}}} = \text{sign}(\dot{x}) \cdot b_4 \dot{x}^2. \quad (1)$$

Гидродинамическая вязкость демпфирующего устройства $b_4 = 56,2$ кг/м инерционного трансформатора обладает нелинейными свойствами. В общей постановке задачи разница внутренних сил будет пропорциональна разнице квадратов скоростей между телами с массами m_2 и m_3 с сохранением направлений векторов этих сил.

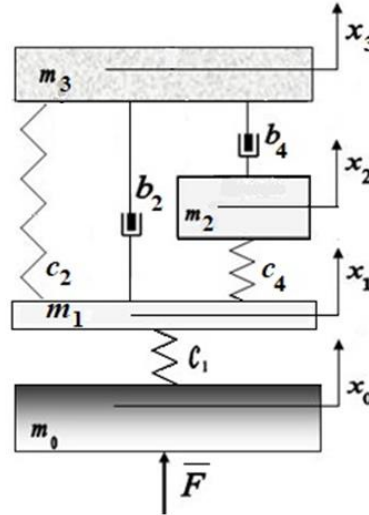


Рис. 1. Общая динамическая схема виброизоляции тела с массой m_3

По динамической схеме рис. 1 составляется общая математическая модель движений многоэлементной системы в каноническом виде [4, 5]

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -b_{11}\dot{x}_1 - c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + b_{13}\dot{x}_3 + c_{13}x_3 + c_{10}x_0, \\ \ddot{x}_2 &= -b_{22}\text{sign}(\dot{x}_2)\dot{x}_2^2 - c_{22}x_2 + c_{21}x_1 + b_{23}\text{sign}(\dot{x}_3)\dot{x}_3^2, \\ \ddot{x}_3 &= -b_{31}\dot{x}_3 - b_{32}\text{sign}(\dot{x}_3)\dot{x}_3^2 - c_{33}x_3 + b_{31}\dot{x}_1 + c_{31}x_1 + b_{32}\text{sign}(\dot{x}_2)\dot{x}_2^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_2/m_1, & b_{12} &= 0, & b_{13} &= b_2/m_1, \\ b_{21} &= 0, & b_{22} &= b_4/m_2, & b_{23} &= b_4/m_2, \\ b_{31} &= b_2/m_3, & b_{32} &= b_4/m_3, & b_{33} &= (b_2 + b_4)/m_3, \\ c_{11} &= (c_1 + c_2 + c_4)/m_1, & c_{12} &= c_4/m_1, & c_{13} &= c_2/m_1, \\ c_{21} &= c_4/m_2, & c_{22} &= c_4/m_2, & c_{23} &= 0, \\ c_{31} &= c_2/m_3, & c_{32} &= 0, & c_{33} &= c_2/m_3, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x_0 &= -0,5\sin(\omega t)/\omega^2, \\ F &= m_0\ddot{x}_0(t). \end{aligned}$$

Начальные условия при $t = 0$:

$$x_1(0) = 10^{-5} \text{ м}, \quad \left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \left. \frac{dx_2}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad \left. \frac{dx_3}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Для последующего сравнения численных решений линейной и нелинейной задач относительно параметров и коэффициентов выберем следующие физические величины: $\omega = 5,0$ рад/с, $x_0 = 0,5\sin(\omega t)/\omega^2$ м, $m_1 = 120,0$ кг, $m_2 = 0,2$ кг, $m_3 = 500,0$ кг, $c_1 = 281,0$ н/м, $c_2 = 263,0$ н/м, $c_4 = 572,0$ н/м, $b_2 = 12,23$ кг/с, $b_4 = 56,2$ кг/с, $l = 0,0$ м.

Качественным критерием эффективности рассматриваемых систем будем считать критерий наибольших энергетических потерь за один и тот же промежуток времени или периодов колебаний. Для реализации этих сравнений необходимо найти ускорения сопротивлений в каждой из систем, которые в поставленной задаче вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 R_1 &= -b_{11}\dot{x}_1 + b_{13}\dot{x}_3, \\
 R_2 &= -b_{22}\text{sign}(\dot{x}_2)\dot{x}_2^2 + b_{23}\text{sign}(\dot{x}_3)\dot{x}_3^2, \\
 R_3 &= -b_{31}\dot{x}_3 - b_{32}\text{sign}(\dot{x}_3)\dot{x}_3^2 + b_{31}\dot{x}_1 + b_{32}\text{sign}(\dot{x}_2)\dot{x}_2^2.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

На их основании можно судить об энергетических потерях, приходящихся на единицу массы рассматриваемого тела. Исходя из полученных графиков рис. 4 самым эффективным является второй элемент с наименьшей массой m_2 и наибольшей величиной ускорения сопротивления $R_2(x_2)$. Потери энергии вторым телом по площади графика рис. 4, б, умноженной на соответствующую массу, в целом больше остальных.

Численные значения кинематических характеристик и ускорений сопротивлений – энергетических потерь у первого тела незначительно увеличены на рисунках 2, а – 4, а. Перемещение и ускорение тела m_2 увеличены по сравнению с линейной задачей. Перемещение виброизолируемого тела m_3 увеличено, при этом ускорения практически идентичны на рис. 3, в.

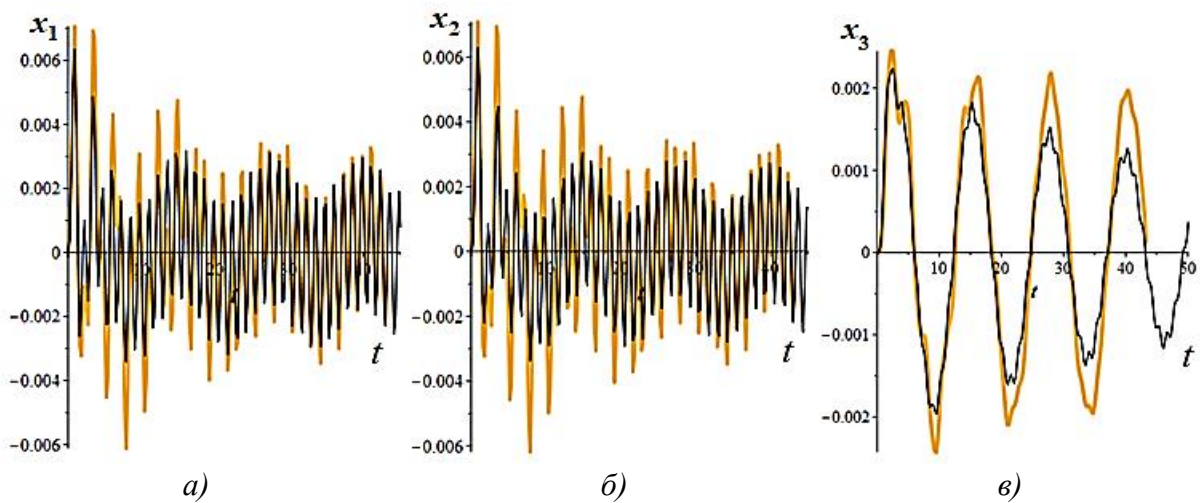


Рис. 2. Перемещения элементов общей динамической схемы с течением времени. Светлые кривые линии соответствуют нелинейной задаче, черные – линейной

Энергетические потери, вследствие квадратов скоростей, значительно меньших единицы, на последних двух графиках рисунка 4, б, в значительно уменьшаются.

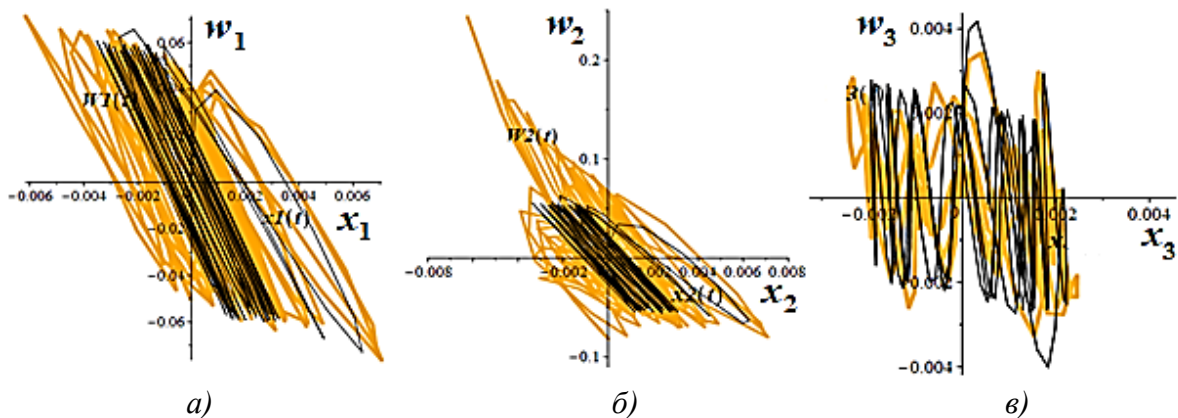


Рис. 3. Сравнения ускорений нелинейной и линейной задач каждого элемента из общей динамической схемы. Светлые кривые линии соответствуют нелинейной задаче, черные – линейной

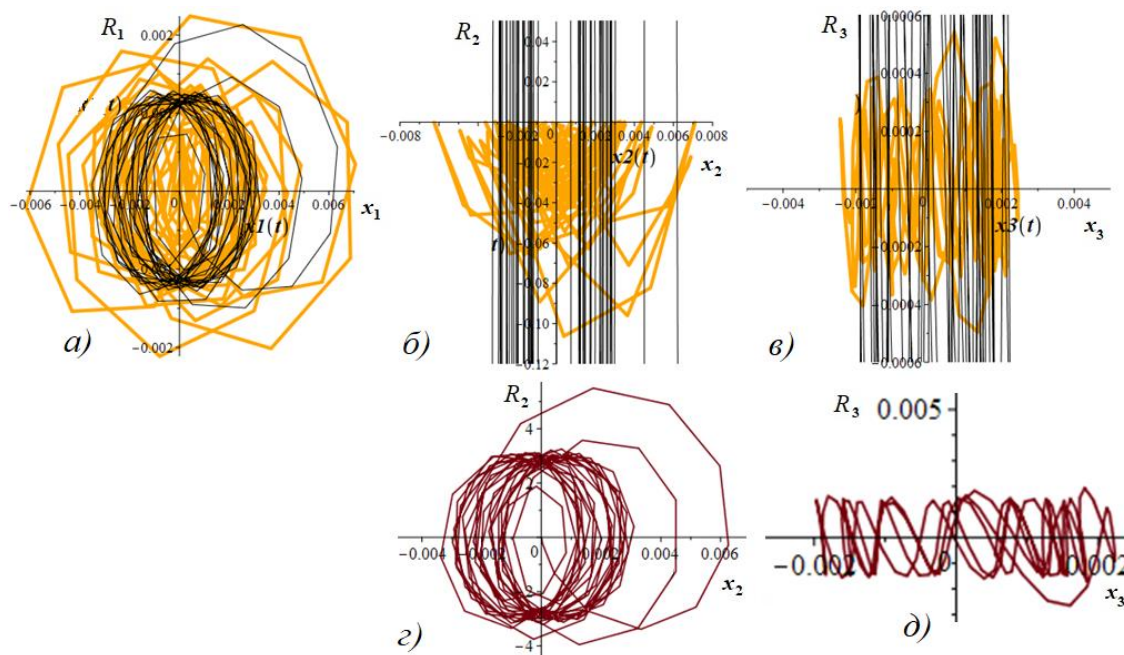


Рис. 4. Сравнения энергетических потерь каждым элементом из общей динамической схемы. Светлые кривые линии соответствуют нелинейной задаче, черные на (а, б, в) и бордовые (г, д) – линейной

Выводы. Сопротивление системы и затухания динамических процессов уменьшаются в математической модели с квадратично-нелинейной силой демпфирования амортизатора b_4 между телами с массами m_2 и m_3 . На малых скоростях движения виброизолируемого тела, меньших единицы, силы сопротивления, рассеивающие энергию в механической системе, значительно уменьшаются в связи с их квадратической зависимостью.

Гидравлический амортизатор с сильно вязкой жидкостью, демпфирующие свойства которой пропорциональны квадратам скоростей смещений поршня опорной крышки, не является эффективной моделью энергетических потерь в задаче виброизоляции современных технических устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Василевич, Ю. В. Исследование прочностных, деформационных и виброизолирующих характеристик резиновых подшпальных виброизоляторов / Ю. В. Василевич [и др.] // БНТУ // Машиностроение. – 2010. – Вып. 25. – С. 202–204.
2. Чигарев, А. В. Введение в мехатронику: учебное пособие / А. В. Чигарев, К. Циммерманн, В. А. Чигарев. – Минск: БНТУ, 2013. – 388 с.
3. Гордеев, Б. А. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред / Б. А. Гордеев [и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 176 с.
4. Dokukova, N. A. General laws governing in mechanical vibratory systems / N. A. Dokukova, P. N. Konon // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. Publisher Springer New York. – 2006. – Vol. 79, No 4. – P. 824–831.
5. Dokukova, N. A., and Nonnatural vibrations of hydraulic shock-absorbers / N. A. Dokukova, P. N. Konon, E. N. Kaftaikina // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – Publisher Springer New York. – 2008. – Vol. 81, No 6. – P. 1191–1196.

6. Докукова, Н. А. Приближенный метод расчета геометрически нелинейных изгибно-продольных колебаний балок постоянного сечения / Н. А. Докукова, Мар. Д. Мартыненко, Мих. Д. Мартыненко // Весці АН БССР, Сер. фіз.-тэхн. навук. – № 1. – 1990. – С. 10–14.
7. Кашицин, Л. П. Динамическая модель деформирования детали при центробежном припекании в импульсном магнитном поле / Л. П. Кашицин, И. А. Кирпиченко, Н. А. Докукова // Весці АН БССР, Сер. фіз.-тэхн. навук. – Минск, 1991. – № 3. – С. 46–50.
8. Мартыненко, М. Д. Метод линеаризации и его применение для анализа нелинейных колебательных систем / М. Д. Мартыненко, Н. А. Докукова // Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. – Мн., 1999. – № 3. – С. 108–111.
9. Докукова, Н. А. К расчетам динамики гидропоры / Н. А. Докукова, М. Д. Мартыненко // Материалы международной научно-технической конференции «Механика машин на пороге 3-его тысячелетия». – Мн., 2001. – С. 252–255.
10. Докукова, Н. А. Выбор рациональных параметров гидропоры с пористым элементом / Н. А. Докукова // Проблемы машиностроения и надежности машин. – М., 2003. – № 4. – С. 18–23.
11. Высоцкий, М. С. Некоторые особенности механических колебательных систем с двумя степенями свободы / М. С. Высоцкий, Н. А. Докукова, П. Н. Конон // Вестник ФФИ. – 2006. – № 2. – С. 78–85.
12. Высоцкий, М. С. Метод исследования механических колебательных систем с помощью дифференциальных операторов / М. С. Высоцкий, Н. А. Докукова, П. Н. Конон // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 1. – С. 114–119.

Поступила: 31.01.2021

К РЕШЕНИЮ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Веремейчик А. И., Хвисевич В. М.

Брестский государственный технический университет, Брест

Введение. Как правило, все материалы, используемые для создания конструктивных элементов машин и механизмов, имеют определенную неоднородность, которую можно разделить на микронеоднородность (дефекты и неправильность кристаллической решетки, молекулярная структура полимеров и т. д.) и макронеоднородность (параметры, определяющие свойства среды). С позиции инженерной практики интерес представляет исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) тел с макронеоднородностью (непрерывной неоднородностью). Неоднородность упругих свойств возникает в процессах формирования тел (процессы отливки), при различных технологических процессах (различные виды обработки тел), эксплуатации конструктивных элементов на практике (воздействие температуры, радиации и т. д.).

Для исследования НДС осесимметричных тел с непрерывной неоднородностью необходимо поставить краевую задачу теории упругости (термоупругости) и разработать эффективный метод ее реализации. Для тел со сложной геометрией области тел и граничных условий аналитическое решение такого рода задач невозможно, поэтому в настоящее время применение нашли различные численные методы, наиболее распространенным из которых является метод конечных элементов (МКЭ). Для решения поставленной задачи используем метод граничных интегральных уравнений теории потенциала, с помощью которого дифференциальные уравнения сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода, благодаря чему он имеет некоторые преимущества по сравнению с МКЭ [1, 2].

Постановка задачи. Рассмотрим в цилиндрической системе координат ρ, z, ϑ упругое, однородное, изотропное тело вращения (ось z направим по оси вращения), которое подвергается воздействию осесимметричного стационарного температурного поля $T(\rho, z)$ и поверхностных сил p_ρ, p_z , которые таковы, что перемещения, деформации и напряжения не зависят от угловой координаты. Через T обозначим температуру, отсчитываемую от некоторой начальной температуры, соответствующей естественному состоянию тела.

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях имеют вид:

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{u}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial \rho} = 0, \\ \Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $e = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$.

Напряжения по гипотезе Дюамеля-Неймана в перемещениях:

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \right), \quad \sigma_{zz} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \right), \quad (2)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{u}{\rho} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^{-\frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T} \right), \quad \sigma_{\rho z} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right).$$

Формулы Коши:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{u}{\rho}; \quad \gamma_{\rho z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}. \quad (3)$$

Решение осесимметричной задачи в перемещениях в общем случае сводится к определению десяти неизвестных, которые удовлетворяют уравнениям (1), (2), (3), уравнениям совместности [3], граничным условиям:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho} n_\rho + \sigma_{\rho z} n_z = p_\rho(x_s), \\ \sigma_{\rho z} n_\rho + \sigma_{zz} n_z = p_z(x_s), \end{cases} \quad (4)$$

где p_ρ , p_z – заданные механические усилия на поверхности S , а также температурного поля T , которое подчиняется уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Учтем, что модуль упругости E и коэффициент линейного расширения α являются функциями температуры T , а коэффициент Пуассона $\nu = const$ [4]. Для данной задачи выражения (2) примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^{-\frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dT} \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^{-\frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dT} \right), \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{u}{\rho} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^{-\frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dT} \right), \quad \sigma_{\rho z} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим (6) в дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\rho} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\rho} + \frac{\sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

тогда с учетом переменных $E(T)$ и $\alpha(T)$, получим дифференциальные уравнения равновесия осесимметричной задачи термоупругости в перемещениях:

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{u}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_0^T \alpha(T) dT \right) = -\frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho\rho} + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{\rho z} \right), \\ \Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^T \alpha(T) dT \right) = -\frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho z} + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{zz} \right). \end{cases} \quad (8)$$

Приведение осесимметричной краевой задачи термоупругости неоднородных тел к последовательности краевых задач однородной термоупругости. Одним из наиболее эффективных методов решения краевых задач теории упругости и термоупругости неоднородных тел является метод возмущений, предложенный и разработанный В. А. Ломакиным [5], позволяющий свести краевую задачу термоупругости неоднородных тел к последовательности краевых задач однородной термоупругости и теории упругости однородных тел с фиктивными нагрузками.

Применим метод возмущений к осесимметричной краевой задаче (6), (7), (8). Ее решение будем разыскивать в виде степенных рядов

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k u^k(\rho, z), \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k w^k(\rho, z). \quad (9)$$

Подставляя (9) в соотношения (6), (7), (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях φ , получим краевую задачу для u^0, w^0 :

$$\begin{cases} \Delta u^0 - \frac{u^0}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e^0}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_0^T \alpha(T) dT \right), \\ \Delta w^0 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e^0}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^T \alpha(T) dT \right), \end{cases} \quad (10)$$

граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^0 n_\rho + \sigma_{\rho z}^0 n_z &= p_\rho(x_s), \\ \sigma_{\rho z}^0 n_\rho + \sigma_{zz}^0 n_z &= p_z(x_s), \end{aligned} \quad (11)$$

и выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^0 &= \frac{E(T)}{1+\nu} \left(\frac{\partial u^0}{\partial \rho} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^0 - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dT \right), \\ \sigma_{zz}^0 &= \frac{E(T)}{1+\nu} \left(\frac{\partial w^0}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^0 - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dT \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^0 &= \frac{E(T)}{1+\nu} \left(\frac{u^0}{\rho} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^0 - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dT \right), \quad \sigma_{\rho z}^0 = \frac{E(T)}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u^0}{\partial z} + \frac{\partial w^0}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Для функций $u^1(\rho, z), w^1(\rho, z)$ уравнения (10)–(12) примут вид:

$$\begin{cases} \Delta u^1 - \frac{u^1}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e^1}{\partial \rho} = -\frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho\rho}^0 + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{\rho z}^0 \right), \\ \Delta w^1 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e^1}{\partial z} = -\frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho z}^0 + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{zz}^0 \right), \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^1 n_\rho + \sigma_{\rho z}^1 n_z &= 0, \\ \sigma_{\rho z}^1 n_\rho + \sigma_{zz}^1 n_z &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^1 &= \frac{E(T)}{1+\nu} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \rho} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^1 \right), \quad \sigma_{zz}^1 = \frac{E(T)}{1+\nu} \left(\frac{\partial w^1}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^1 \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^1 &= \frac{E(T)}{1+\nu} \left(\frac{u^1}{\rho} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^1 \right), \quad \sigma_{\rho z}^1 = \frac{E(T)}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u^1}{\partial z} + \frac{\partial w^1}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $e^1 = \left(\frac{\partial u^1}{\partial \rho} + \frac{u^1}{\rho} + \frac{\partial w^1}{\partial z} \right)$.

Краевые задачи для функций u^k, w^k строятся аналогично:

$$\begin{cases} \Delta u^k - \frac{u^k}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e^k}{\partial \rho} = -\frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho\rho}^{k-1} + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{\rho z}^{k-1} \right), \\ \Delta w^k + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e^k}{\partial z} = -\frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho z}^{k-1} + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{zz}^{k-1} \right), \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^k n_\rho + \sigma_{\rho z}^k n_z &= 0, \\ \sigma_{\rho z}^k n_\rho + \sigma_{zz}^k n_z &= 0,\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^k &= \frac{E(T)}{1+\nu} \left(\frac{\partial u^k}{\partial \rho} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^k \right), & \sigma_{zz}^k &= \frac{E(T)}{1+\nu} \left(\frac{\partial w^k}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^k \right), \\ \sigma_{\rho z}^k &= \frac{E(T)}{1+\nu} \left(\frac{u^k}{\rho} + \frac{\nu}{1-2\nu} e^k \right), & \sigma_{\rho z}^k &= \frac{E(T)}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u^k}{\partial z} + \frac{\partial w^k}{\partial \rho} \right),\end{aligned}\tag{18}$$

где $e^k = \left(\frac{\partial u^k}{\partial \rho} + \frac{u^k}{\rho} + \frac{\partial w^k}{\partial z} \right)$, ($k = 2, 3, \dots$).

Таким образом, в нулевом приближении задача (5)–(7) сводится к решению осесимметричной задачи классической термоупругости (10)–(12), а в последующих приближениях – к последовательности осесимметричных задач теории упругости однородного тела с фиктивными объемными силами (13)–(18).

Построение сингулярных интегральных уравнений осесимметричной краевой задачи термоупругости при коэффициенте $\alpha = \alpha(T)$. Рассмотрим краевую задачу термоупругости (10)–(12). В правой части дифференциальных уравнений (10) присутствует объемная сила, которая обусловлена зависимостью температурного коэффициента линейного расширения α от температуры T . Решение дифференциальных уравнений (10) ищем в форме:

$$u^{(0)} = u^U + u^T, \quad w^{(0)} = w^U + w^T.\tag{19}$$

Общее решение u^U, w^U однородных дифференциальных уравнений, представляющее перемещения от силовых воздействий, имеет вид [6]:

$$\begin{aligned}u^U(x) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_L [\nu_\rho(y) C_{\rho\rho} + \nu_z(y) C_{\rho z}] dl_y, \\ w^U(x) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \int_L [\nu_\rho(y) C_{z\rho} + \nu_z(y) C_{zz}] dl_y,\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}C_{\rho\rho} &= \frac{1}{kn\sqrt{2-n^2}} \left\{ \left[k^2 - 3n^2 - 4n^2(3-4\nu) + \frac{k^2-n^2}{1-k^2} - \frac{k^2 n^2 (k^2-n^2)}{(2-n^2)(1-k^2)} \right] E + \right. \\ &\quad \left. + \left[2n^2(2-k^2)(3-4\nu) + (4n^2 - n^2 k^2 - 2k^2) - \frac{k^2 n^4}{2-n^2} \right] K \right\}, \\ C_{\rho z} &= \frac{Zk}{\rho_x n \sqrt{2-n^2}} \left(\frac{k^2-n^2}{1-k^2} E + n^2 K \right), \\ C_{z\rho} &= \frac{Zk}{\rho_x n \sqrt{2-n^2}} \left[\frac{k^2-(2-n^2)}{1-k^2} E + (2-n^2) K \right], \\ C_{zz} &= \frac{kn}{\sqrt{2-n^2}} \left\{ \frac{Z^2 k^2 (2-n^2)}{2\rho_x^2 n^2 (1-k^2)} E + [2+4(1-2\nu)] K \right\},\end{aligned}\tag{21}$$

где μ – модуль сдвига; L – длина контура меридионального сечения тела;

$k^2 = \frac{4\rho_y \rho_x}{(\rho_y + \rho_x)^2 + Z^2}$, $n^2 = \frac{2\rho_y}{\rho_y + \rho_x}$, внутренние интегралы в (20) являются полными эллиптическими интегралами первого K и второго E рода [7].

Частное решение (10) представим в виде [8] как градиент некоторой функции W :

$$u^T = \frac{\partial W}{\partial \rho_x}, \quad w^T = \frac{\partial W}{\partial z_x}. \quad (22)$$

Подставив (22) в (10), получаем соотношение, при котором система (10) обращается в тождество:

$$\Delta W = \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^T \alpha(T) dT. \quad (23)$$

Принимаем для $\alpha(T)$ зависимость [4]:

$$\alpha = \alpha_0(1 + \gamma T), \quad (24)$$

где α_0 – значение коэффициента теплового расширения для исходного состояния, γ – постоянная величина, определяемая из экспериментов. Тогда:

$$\Delta W = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_0 \left(T + \gamma \frac{T^2}{2} \right) = abT - acT^*, \quad (25)$$

где $a = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_0$, $b = 1 + \frac{\gamma}{k}$, $c = \frac{\gamma}{k\lambda_0}$. Выражая температуру T через гармоническую функцию $T^* = \int_0^T \lambda(T) dT$ согласно [7], получаем:

$$T = \frac{1}{k} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k}{\lambda_0} T^*} \right), \quad (26)$$

при этом

$$\lambda(T) = \lambda_0(1 - kT), \quad (27)$$

где k – определяется с помощью экспериментальных кривых, λ_0 – коэффициент теплопроводности при исходной температуре.

Тогда:

$$W = -\frac{ab}{4\pi} \int_V T(y) \frac{1}{r} dV_y + \frac{ac}{2} \left[\sum_{i=1}^n \int_{S_i+S_e} \chi(y) \frac{dr}{dn_y} - \sum_{i=1}^n A_i r_{A_i} \right], \quad (28)$$

или:

$$W = W^{(N)} + W^{(G)}, \quad W^{(N)} = -\frac{ab}{4\pi} \int_V T(y) \frac{1}{r} dV_y, \quad W^{(G)} = W^{(K)} + W^{(M)}, \quad (29)$$

где $a = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_0$, $b = 1 + \frac{\gamma}{k}$, $c = \frac{\gamma}{k\lambda_0}$, $r_{A_i} = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_{A_i}^2 - 2\rho_x \rho_{A_i} \cos \Theta} + Z^2$ – расстояние между фиктивным источником теплоты мощностью A_k , помещенном в область, ограниченную поверхностью S_i , и точкой x с поверхности S_x .

Интерес представляют добавки перемещений u^T , w^T и напряжений $\sigma_{\rho\rho}, \dots, \sigma_{\rho x}$,

которые выражаются через бигармоническую функцию $W^{(G)}$ в (29), через которую определяется частное решение дифференциальных уравнений. С ее помощью получим формулы температурных добавок перемещений и напряжений:

$$u^T = \frac{\partial W^{(G)}}{\partial \rho_x} = u^{(K)T} + u^{(M)T} = u^{(K)T} + \frac{a}{8\pi\mu} \sum_{i=1}^n A_i \frac{2}{R_{A_i}} \rho_{A_i} \left\{ \left[2(\rho_{A_i} + \rho_x) - \frac{R_{A_i}^2}{\rho_x} \right] K + \frac{R_{A_i}^2}{\rho_x} E \right\}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
w^T &= \frac{\partial W^{(G)}}{\partial z_x} = w^T + w^T = w^T + \frac{a}{8\pi\mu} \sum_{i=1}^n \frac{4}{R_{A_i}} \rho_{A_i} Z, \\
\sigma_{\rho\rho}^T &= \sigma_{\rho\rho}^T + \sigma_{\rho\rho}^T, \quad \sigma_{\rho\rho}^T = \sigma_{\rho\rho}^T + \sigma_{\rho\rho}^T, \quad \sigma_{zz}^T = \sigma_{zz}^T + \sigma_{zz}^T, \quad \sigma_{\rho z}^T = \sigma_{\rho z}^T + \sigma_{\rho z}^T, \\
\sigma_{\rho\rho}^{(M)T}(x) &= -\mu a \sum_{i=1}^n A_i \frac{2}{R_{A_i}} \left\{ \rho_{A_i} \left[\frac{2(\rho_{A_i} - \rho_x)^2}{R_{1A_i}^2} + \frac{R_{A_i}^2}{\rho_x^2} - 2 \right] E + \rho_{A_i} \left(4 + \frac{2\rho_{A_i}}{\rho_x} - \frac{R_{A_i}^2}{\rho_x^2} \right) K \right\}, \\
\sigma_{zz}^{(M)T}(x) &= -\mu a \sum_{i=1}^n A_i \frac{4}{R_{A_i}} \left(\frac{\rho_{A_i} Z^2}{R_{1A_i}^2} E + \rho_{A_i} K \right), \\
\sigma_{\rho\rho}^{(M)T}(x) &= -\mu a \sum_{i=1}^n A_i \frac{2}{R_{A_i}} \left[\frac{\rho_{A_i} R_{A_i}^2}{\rho_x^2} E + \left(\frac{\rho_{A_i} R_{A_i}^2}{\rho_x^2} - \frac{2\rho_{A_i}^2}{\rho_x} + 2\rho_{A_i} \right) K \right], \\
\sigma_{\rho z}^{(M)T}(x) &= -\mu a \sum_{i=1}^n A_i \frac{2}{R_{A_i}} \left\{ \frac{\rho_{A_i}^2 Z}{\rho_x} \left[\frac{1}{\rho_x} - \frac{2(\rho_{A_i} - \rho_x)}{R_{1A_i}^2} \right] E + \frac{\rho_{A_i}}{\rho_x} ZK \right\},
\end{aligned} \tag{31}$$

где $R_{A_i} = \sqrt{(\rho_{A_i} + \rho_x)^2 + Z^2}$, $Z = z_{A_i} - z_x$, u^T , w^T – соответствуют частному решению дифференциальных уравнений термоупругости при классическом способе представления температуры.

Определяем частные производные от $1/r$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(1/r)}{\partial \rho_x} &= \frac{\rho_y \cos \Theta - \rho_x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2(1/r)}{\partial \rho_x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\rho_y \cos \Theta - \rho_x)}{r^4}, \\
\frac{\partial(1/r)}{\partial z_x} &= \frac{Z}{r^3}, \quad \frac{\partial^2(1/r)}{\partial z_x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3Z^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2(1/r)}{\partial \rho_x \partial z_x} = \frac{3Z(\rho_y \cos \Theta - \rho_x)}{r^5}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Подставим (29) в (23), учитывая (32) и что $dV_y = \rho_y d\Theta dF_y$, где F_y – площадь меридионального сечения области V^+ , получим температурные добавки перемещений:

$$u^T = \frac{ab}{4\pi_F} \int T(y) \rho_y dF_y \int_0^{2\pi} \frac{(\rho_x - \rho_y \cos \Theta)}{r^3} d\Theta, \quad w^T = -\frac{ab}{4\pi_F} \int T(y) \rho_y dF_y \int_0^{2\pi} \frac{Z}{r^3} d\Theta. \tag{33}$$

После преобразования, используя таблицу интегралов [6], получим:

$$\begin{aligned}
u^T &= -\frac{ab}{2\pi_F} \int T(y) \frac{1}{R} \left\{ \left[\frac{\rho_y (\rho_y - 2\rho_x)}{R_1^2} + \frac{\rho_y}{\rho_x} \right] E + \frac{\rho_y}{\rho_x} K \right\} dF_y, \\
w^T &= -\frac{ab}{2\pi_F} \int T(y) \frac{1}{R} \frac{\rho_y Z}{R_1^2} E dF_y.
\end{aligned} \tag{34}$$

Температурные добавки напряжений представляем в виде суммы:

$$\sigma_{\rho\rho}^T = \sigma_{\rho\rho}^T + \sigma_{\rho\rho}^T, \quad \sigma_{\rho\rho}^T = \sigma_{\rho\rho}^T + \sigma_{\rho\rho}^T, \quad \sigma_{zz}^T = \sigma_{zz}^T + \sigma_{zz}^T, \quad \sigma_{\rho z}^T = \sigma_{\rho z}^T + \sigma_{\rho z}^T. \tag{35}$$

Как и для добавок перемещений, интерес представляет построение формул для

$\sigma_{\rho\rho}^{(N)T}, \dots, \sigma_{\rho z}^{(N)T}$, т.к. для $\sigma_{\rho\rho}^{(G)T}, \dots, \sigma_{\rho z}^{(G)T}$ справедливы выражения [6], умноженные на $c = \frac{\gamma}{k\lambda_0}$

с учетом переменного $\mu(T)$.

Подставим (29) в формулы для температурных добавок напряжений [8]:

$$\sigma_{ij}^T = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta W \delta_{ij} \right), \quad (36)$$

в результате получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^T &= 2\mu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \rho_x^2} - \Delta W \right), \quad \sigma_{zz}^T = 2\mu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z_x^2} - \Delta W \right), \\ \sigma_{\rho z}^T &= 2\mu \left(\frac{1}{\rho_x} \frac{\partial W}{\partial \rho_x} - \Delta W \right), \quad \sigma_{\rho z}^T = 2\mu \frac{\partial^2 W}{\partial \rho_x \partial z_x}. \end{aligned} \quad (37)$$

Тогда с учетом (32), после интегрирования по \mathcal{G} и преобразований получим формулы добавок напряжений внутри области V^+ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(N)T}(x) &= -\frac{a_1 E(T)}{4\pi} \left(4\pi T(x) + \int_F T(y) \frac{2}{\rho_x R} \left\{ \frac{4\rho_y \rho_x}{R^2} \left[\frac{(\rho_y - \rho_x)^2}{R_1^2} - 1 \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4\rho_y \rho_x \frac{(\rho_y - \rho_x)^2}{R_1^4} - \frac{2\rho_y^2}{R_1^2} - \frac{\rho_y}{\rho_x} \right\} E + \left\{ \frac{\rho_y}{\rho_x} + \frac{2\rho_y \rho_x}{R^2} \left[1 - \frac{(\rho_y - \rho_x)^2}{R_1^2} \right] \right\} K \right) dF_y, \\ \sigma_{zz}^{(N)T}(x) &= -\frac{a_1 E(T)}{4\pi} \left(4\pi T(x) + \int_F T(y) \frac{1}{R} \left\{ \frac{4\rho_y}{R_1^2} \left[\frac{Z^2}{R_1^2} - \frac{(\rho_y - \rho_x)^2}{R_1^2} + \frac{2Z^2}{R^2} \right] \right\} E - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\rho_y}{R^2} \frac{Z^2}{R_1^2} K \right) dF_y, \\ \sigma_{\rho z}^{(N)T}(x) &= -\frac{a_1 E(T)}{4\pi} \left(4\pi T(x) + \int_F T(y) \frac{2}{\rho_x R} \left\{ \left[\frac{2\rho_y (\rho_y - \rho_x)}{R_1^2} + \frac{\rho_y}{\rho_x} \right] E - \frac{\rho_y}{\rho_x} K \right\} dF_y \right), \\ \sigma_{\rho z}^{(N)T}(x) &= -\frac{a_1 E(T)}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\rho_y Z}{R^2} + \frac{4\rho_y Z}{R_1^2} \left(\frac{\rho_y - \rho_x}{R_1^2} \rho_x - \frac{\rho_x^2}{R^2} \right) \right] E + \frac{1}{2} \left[\frac{Z\rho_y}{R_1^2} \left(\frac{\rho_x^2}{R^2} - 1 \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\rho_y Z}{R^2} \right] K \right\} dF_y, \end{aligned} \quad (38)$$

где $R^2 = \sqrt{(\rho_y + \rho_x)^2 + Z^2}$, $R_1^2 = \sqrt{(\rho_y - \rho_x)^2 + Z^2}$, $a_1 = \frac{b\alpha_0}{1-\nu}$.

Если точка x совпадает с точкой y , то с учетом предельных значений в формулах напряжений $\sigma_{\rho\rho}^{(N)T}$, $\sigma_{zz}^{(N)T}$, $\sigma_{\rho z}^{(N)T}$ вместо $4\pi T(x)$ принимается $\frac{8}{3}\pi T(x)$.

Температурные добавки напряжений в граничных точках области V^+ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^{(N)}(x_s) &= -\frac{a_1 E(T)}{4\pi} \left(4\pi T(x_s) \left(1 - \frac{n_{\rho_x}^2}{2} \right) + \int_F T(y) \frac{2}{\rho_x R} \left\{ \frac{4\rho_y \rho_x}{R^2} \left[\frac{(\rho_y - \rho_x)^2}{R_1^2} - 1 \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4\rho_y \rho_x \frac{(\rho_y - \rho_x)^2}{R_1^4} - \frac{2\rho_y^2}{R_1^2} - \frac{\rho_y}{\rho_x} \right\} E + \left\{ \frac{\rho_y}{\rho_x} + \frac{2\rho_y \rho_x}{R^2} \left[1 - \frac{(\rho_y - \rho_x)^2}{R_1^2} \right] \right\} K \right) dF_y, \\
\sigma_{zz}^{(N)}(x_s) &= -\frac{a_1 E(T)}{4\pi} \left(4\pi T(x_s) \left(1 - \frac{n_{z_x}^2}{2} \right) + \int_F T(y) \frac{1}{R} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ \frac{4\rho_y}{R_1^2} \left[\frac{Z^2}{R_1^2} - \frac{(\rho_y - \rho_x)^2}{R_1^2} + \frac{2Z^2}{R^2} \right] \right\} E - \frac{4\rho_y}{R^2} \frac{Z^2}{R_1^2} K \right) dF_y, \\
\sigma_{\rho\rho}^{(N)}(x_s) &= -\frac{a_1 E(T)}{4\pi} \left(4\pi T(x_s) + \int_F T(y) \frac{2}{\rho_x R} \left\{ \left[\frac{2\rho_y(\rho_y - \rho_x)}{R_1^2} + \frac{\rho_y}{\rho_x} \right] E - \frac{\rho_y}{\rho_x} K \right\} dF_y \right), \\
\sigma_{\rho z}^{(N)}(x_s) &= -\frac{a_1 E(T)}{4\pi} \left(2\pi T(x_s) n_{\rho_x} n_{z_x} - \int_F T(y) \frac{2}{\rho_x R} \left\{ \left[\frac{\rho_y Z}{R^2} + \frac{4\rho_y Z}{R_1^2} \times \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times \left(\frac{\rho_y - \rho_x}{R_1^2} \rho_x - \frac{\rho_x^2}{R^2} \right) \right] E + \frac{1}{2} \left[\frac{Z\rho_y}{R_1^2} \left(\frac{\rho_x^2}{R^2} - 1 \right) - \frac{\rho_y Z}{R^2} \right] K \right\} dF_y \right).
\end{aligned} \tag{39}$$

Полные перемещения определяем как сумму:

$$\begin{aligned}
u^{(0)} &= u^U + u^T + u^T = u^U + \frac{(1+\nu)^2 \alpha_0}{2\pi(1-\nu)E(T)} \left(c \left(\int_L \chi(y) \frac{1}{R} \left\{ \frac{\rho_y}{\rho_x} (\rho_y n_{\rho_y} + Zn_{z_y}) - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(\rho_y - \rho_x)}{R_1^2} 2\rho_y [(\rho_y - \rho_x) n_{\rho_y} + Zn_{z_y}] + \rho_x n_{\rho_y} \right\} E - \left[\frac{\rho_y}{\rho_x} (\rho_y n_{\rho_y} + Zn_{z_y}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \rho_x n_{\rho_y} \right] K \right) dl_y - \sum_{k=1}^n A_k \frac{1}{R_{A_k}} \rho_{A_k} \left\{ \left[2(\rho_{A_k} + \rho_x) - \frac{R_{A_k}^2}{\rho_x} \right] K + \frac{R_{A_k}^2}{\rho_x} E \right\} - \\
&\quad \left. - b \int_F T(y) \frac{1}{R} \left\{ \left[\frac{\rho_y(\rho_y - 2\rho_x)}{R_1^2} + \frac{\rho_y}{\rho_x} \right] E + \frac{\rho_y}{\rho_x} K \right\} dF_y \right), \\
w^{(0)} &= w^U + w^T + w^T = w^U + \frac{(1+\nu)^2 \alpha_0}{2\pi(1-\nu)E(T)} \left(c \left(\int_L \chi(y) \frac{1}{R} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left\{ \left[\left[2\rho_y \frac{(\rho_y - \rho_x)}{R_1^2} - 1 \right] Zn_{\rho_y} + 2\rho_y \frac{Z^2}{R_1^2} n_{z_y} \right\} E + (Zn_{\rho_y} - 2\rho_y n_{z_y}) K \right\} dl_y - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^n A_k \frac{2}{R_{A_k}} \rho_{A_k} Z \left(-2b \int_F T(y) \frac{1}{R} \frac{\rho_y Z}{R_1^2} E dF_y \right) \right).
\end{aligned} \tag{40}$$

Полные напряжения, как и перемещения, в общем виде определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^{(0)}(x) &= \sigma_{\rho\rho}^U(x) + \sigma_{\rho\rho}^T(x) = \sigma_{\rho\rho}^U(x) + \sigma_{\rho\rho}^{(G)T}(x) + \sigma_{\rho\rho}^{(N)T}(x), \\
\sigma_{zz}^{(0)}(x) &= \sigma_{zz}^U(x) + \sigma_{zz}^T(x) = \sigma_{zz}^U(x) + \sigma_{zz}^{(G)T}(x) + \sigma_{zz}^{(N)T}(x), \\
\sigma_{\rho\rho}^{(0)}(x) &= \sigma_{\rho\rho}^U(x) + \sigma_{\rho\rho}^T(x) = \sigma_{\rho\rho}^U(x) + \sigma_{\rho\rho}^{(G)T}(x) + \sigma_{\rho\rho}^{(N)T}(x), \\
\sigma_{\rho z}^{(0)}(x) &= \sigma_{\rho z}^U(x) + \sigma_{\rho z}^T(x) = \sigma_{\rho z}^U(x) + \sigma_{\rho z}^{(G)T}(x) + \sigma_{\rho z}^{(N)T}(x).
\end{aligned} \tag{41}$$

Здесь напряжения $\sigma_{\rho\rho}^U(x), \dots, \sigma_{\rho z}^U(x)$ соответствуют перемещениям u^U, w^U и для их определения используются формулы, приведенные в [6].

Напряжения в граничных точках области определяем аналогично (41), учитывая формулы скачков:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^{(0)}(x_S) &= \sigma_{\rho\rho}^U(x_S) + \sigma_{\rho\rho}^T(x_S) = \sigma_{\rho\rho}^U(x_S) + \sigma_{\rho\rho}^{(G)T}(x_S) + \sigma_{\rho\rho}^{(N)T}(x_S), \\
\sigma_{\rho z}^{(0)}(x_S) &= \sigma_{\rho z}^U(x_S) + \sigma_{\rho z}^T(x_S) = \sigma_{\rho z}^U(x_S) + \sigma_{\rho z}^{(G)T}(x_S) + \sigma_{\rho z}^{(N)T}(x_S),
\end{aligned} \tag{42}$$

где $\sigma_{\rho\rho}^U(x_S), \dots, \sigma_{\rho z}^U(x_S)$ соответствуют [6]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}(x_S) &= \frac{1}{1-\nu} \left[\nu_\rho(x_S)(2-\nu-n_{\rho_x}^2)n_{\rho_x} + \nu_z(x_S)(\nu-n_{\rho_x}^2)n_{z_x} \right] + V.p.\sigma_{\rho\rho}, \\
\sigma_{zz}(x_S) &= \frac{1}{1-\nu} \left[\nu_\rho(x_S)(\nu-n_{z_x}^2)n_{\rho_x} + \nu_z(x_S)(2-\nu-n_{z_x}^2)n_{z_x} \right] + V.p.\sigma_{zz}, \\
\sigma_{\rho z}(x_S) &= \frac{\nu}{1-\nu} \left[\nu_\rho(x_S)n_{\rho_x} + \nu_z(x_S)n_{z_x} \right] + V.p.\sigma_{\rho z}, \\
\sigma_{\rho z}(x_S) &= \frac{1}{1-\nu} \left[\nu_\rho(x_S)(1-\nu-n_{\rho_x}^2)n_{z_x} + \nu_z(x_S)(1-\nu-n_{z_x}^2)n_{\rho_x} \right] + V.p.\sigma_{\rho z},
\end{aligned} \tag{43}$$

где $V.p.$ – означает главное значение сингулярного интеграла по Коши, а $\sigma_{\rho\rho}^{(G)T}(x_S), \dots, \sigma_{\rho z}^{(G)T}(x_S)$ определяем по формулам [6], умножая соответствующие выражения на s и учитывая зависимость $E(T)$.

Компоненты температурной поверхностной нагрузки выражаются так:

$$\begin{aligned}
p_\rho^T(x_S) &= -\left(\sigma_{\rho\rho}^T(x_S)n_{\rho_x} + \sigma_{\rho z}^T(x_S)n_{z_x} \right), \\
p_z^T(x_S) &= -\left(\sigma_{\rho z}^T(x_S)n_{\rho_x} + \sigma_{zz}^T(x_S)n_{z_x} \right).
\end{aligned} \tag{44}$$

Если ввести интегральный оператор интегральных уравнений осесимметричной задачи теории упругости:

$$\begin{aligned}
I_\rho(\nu_\rho, \nu_z) &= \sigma_{\rho\rho}^U(x_S)n_{\rho_x} + \sigma_{\rho z}^U(x_S)n_{z_x}, \\
I_z(\nu_\rho, \nu_z) &= \sigma_{\rho z}^U(x_S)n_{\rho_x} + \sigma_{zz}^U(x_S)n_{z_x},
\end{aligned} \tag{45}$$

то с учетом (44) получим систему сингулярных интегральных уравнений рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned}
I_\rho(\nu_\rho, \nu_z) &= p_\rho(x_S) + p_\rho^T(x_S), \\
I_z(\nu_\rho, \nu_z) &= p_z(x_S) + p_z^T(x_S),
\end{aligned} \tag{46}$$

где $\rho_\rho(x_S), \rho_z(x_S)$ – заданные механические нагрузки, I_ρ, I_z – операторы, которые в развернутом виде аналогичны левой части [6, 7].

Уравнения (46) содержат фиктивные нагрузки $p_\rho^T(x_S)$, $p_z^T(x_S)$, обусловленные неоднородностью механических свойств материала.

Выводы. Система (45) и уравнения (40) – (42) позволяет найти решение краевой осесимметричной задачи термоупругости при переменном $\alpha(T)$. Напряжения (41), (42) используются как плотность массовых сил в последующих приближениях решения задачи термоупругости неоднородного тела.

Рассмотренная методика может быть применена и для решения внешних задач. В этом случае при определении добавок напряжений (38), (39) учитывается внешний предел при определении неинтегральных слагаемых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М. : Мир, 1987. – 524 с.
2. Steinbach, O. Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems / O. Steinbach. – New York: Springer Science, 2008. – 386 p.
3. Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности: учебник для вузов / А. Г. Горшков. – М. : Физматлит, 2002. – 416 с.
4. Хвисевич, В. М. Численное решение двумерных краевых задач термоупругости неоднородных тел / В. М. Хвисевич, А. И. Веремейчик // Перспективные материалы и технологии: монография: в 2 т. ; под. ред. чл.-корр. Рубаника В. В. – Витебск: УО «ВГТУ», 2019. – Т. 2. – Гл. 7. – С. 87–104.
5. Ломакин, В. А. Теория упругости неоднородных тел / В. А. Ломакин. – М. : Ленанд, 2014. – 367 с.
6. Копейкин, Ю. Д. Применение бигармонических потенциалов в краевых задачах статики упругого тела / Ю. Д. Копейкин // Диссертация доктора физ.-мат. наук. – М., 1969. – 280 с.
7. Кузьмич, Л. С. Эллиптические функции. Эллиптические интегралы: Алгоритм точного решения / Л. С. Кузьмич. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 48. с
8. Веремейчик, А. И. К решению плоских краевых задач термоупругости неоднородных тел методом потенциала / А. И. Веремейчик, В. В. Гарбачевский, В. М. Хвисевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – Вып. 30. – С. 184–189.
9. Хвисевич, В. М. О некоторых особенностях механико-математического моделирования плоских краевых задач неоднородной термоупругости / В. М. Хвисевич, А. И. Веремейчик // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – Вып. 35. – С. 114–123.

Поступила: 02.02.2021

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ДЕФЕКТОВ СТАЛЬНОЙ АРМАТУРЫ С УЧЕТОМ ЕЕ КОРРОЗИОННЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Мойсейчик Е. А., Василевич Ю. В., Мойсейчик А. Е., Чигарев В. А.,
Яковлев А. А.

Белорусский национальный технический университет

Введение. Для различных железобетонных конструкций широко используют термоупрочненную стальную арматуру [1], сечения которой имеют квазикомпозитное (слоистое) строение [2–4]. Слоистость стержней возникает в процессе металлургического производства [5] и определяется различиями в условиях структурообразования в металле приповерхностных и внутренних слоев. В поперечных и продольных сечениях таких стержней формируются слои с различными структурно-фазовыми состояниями и физико-механическими характеристиками [2–4, 6].

Кроме того, в поперечных сечениях многослойных стержней возникают взаимно уравновешенные внутренние остаточные напряжения. При охлаждении в потоке стана поверхностные слои стержней могут находиться в растянутом состоянии, а внутренние – в сжатом. В работе [7] показано, что чувствительность термообработанных арматурных стержней класса прочности А600 к коррозионному растрескиванию под напряжением в растворах нитратов в значительной степени определяется химическим составом, типом микроструктуры и уровнем остаточных напряжений. Коррозионная стойкость стальной арматуры более высоких классов прочности ниже, чем для А600 [7]. В работе [8] установлено решающее значение уровня остаточных напряжений на растрескивание термоупрочненных сталей в растворе нитратов. При испытаниях в растворах кислот снижение величины остаточных напряжений неоднозначно влияет на чувствительность стали к коррозии [8]. В работе [9] рассмотрено влияние режимов отпуска на длительную прочность низкоуглеродистых кремнемарганцевых арматурных сталей марок 18ГС, 20ГС и 35ГС при эксплуатации в агрессивных водородсодержащих средах. Сделан вывод, что эффективность различных способов термической обработки арматурных сталей с целью повышения их сопротивляемости коррозионно-механическому разрушению зависит от особенностей агрессивной среды, наличия неоднородной гетерофазной структуры металла арматуры и других факторов.

Из работы [10] следует, что интенсифицирует процесс коррозии стальной арматуры карбонизация бетона перед действием хлоридных растворов. Менее агрессивной средой для стальной арматуры железобетонных конструкций являются растворы хлорида кальция и магния. В работах [11–15] в качестве основного направления повышения коррозионной стойкости железобетона рассматривается повышение сопротивляемости защитного слоя проникновению агрессивных сред в зону расположения стальной арматуры. На основании анализа современных методов антикоррозионной защиты мостов авторы работы [15] пришли к выводу, что предотвратить коррозию железобетона мостов на территории Беларуси большинством современных методов практически невозможно. По их мнению, наиболее перспективны следующие 3 метода. Первый – снижение коррозионного воздействия на мосты посредством применения в зимний период противогололедных материалов в виде фрикционных частиц, содержащих на своей поверхности и в порах коррозионнонеактивные плавящие лед компоненты. Второй – применение ингибиторов коррозии, которые блокируют отрицательное действие хлоридов. Третий – фосфатирование поверхности бетона, при котором не нарушается его поровая структура, но

образующиеся фосфаты кальция в поверхностном слое не вступают во взаимодействие с хлоридами противогололедных материалов.

Долговечность железобетонных конструкций определяется суммой периода депассивации стальной арматуры и времени ее коррозии до граничных значений уменьшения площади поперечного сечения [16, 17]. В названных работах период депассивации стальной арматуры определяется временем продвижения фронта карбонизации бетона. Коррозионное разрушение арматуры начинается после достижения фронтом карбонизации поверхности стальных стержней. Продолжительность коррозионного поражения арматуры до предельно допустимых величин принимается по эмпирическим зависимостям [16] или определяется расчетно-экспериментальным путем [18].

Целью настоящей работы является моделирование напряженно-деформированного состояния стальной арматуры периодического профиля и уточнение значимости этого фактора в процессе коррозионных поражений стержней.

Результаты исследования. Исследовать особенности упруго-пластического деформирования стальных стержней и распределения энергии в опасных сечениях стержня можно на примере ребристых моделей, имитирующих стальные ребристые арматурные стержни (с одиночной выточкой (рис. 1) и группой таких выточек, расположенных по длине стержня [19]). При изменении отношения a/l возможно конечно-элементным методом смоделировать различные дефекты при упруго-пластической работе стали в процессе растяжения стержня. Конечно-элементное моделирование процесса деформирования при упруго-пластической работе стали выполним с использованием программно-вычислительного комплекса ANSYS. Твердотельные модели исследуемых стержней примем в виде осесимметричных образцов типа Людвика-Шея (P. Ludwik, R. Scheu) [19]. Классические образцы Людвика-Шея [19] позволяют установить поведение пластичной стали в образцах, стеснение пластической деформации в сечении с конструктивными дефектами. Эксперименты, проведенные Людвиком и Шеем [19], показали, что величина предельной энергии деформации в опасном сечении существенно зависит от наличия концентраторов в образце.

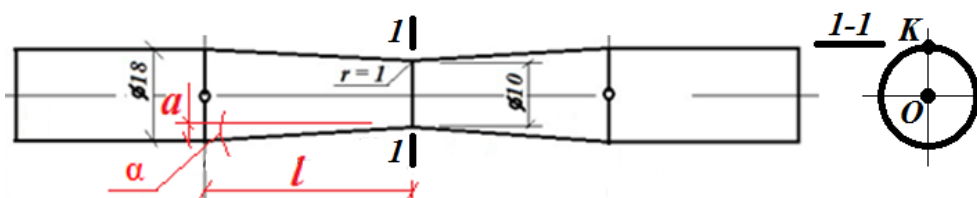


Рис. 1. Схемы определения уклона берегов конструктивного надреза и расположения точек опасного сечения (ослабленного сечения) 1-1

Для построения твердотельных моделей исследуемых образцов типа Людвика-Шея [19] использовалась программа геометрического моделирования SolidWorks. На рис. 2 приведены геометрические формы моделей с выточками. Каждая модель представляет стержень круглого сечения с различной вариацией концентраторов.

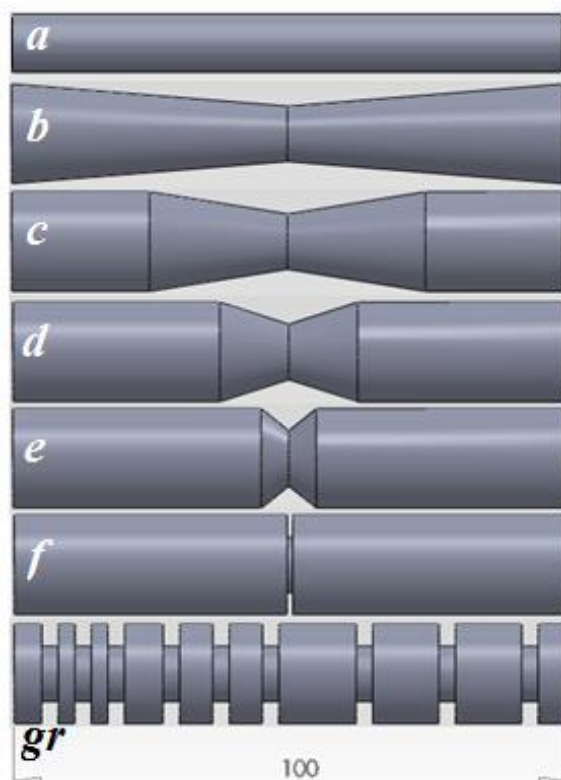


Рис. 2. Вид твердотельных моделей с одиночными (a-f) и групповыми (gr) вырезами

Выполненные модели сохранялись в формате «.x_t» (формат Parasolid), который впоследствии используется для импорта сторонней геометрии в ANSYS. Вид используемой конечно-элементной сетки представлен на примере образца «b» на рис. 3. Модель выполнена из 20-ти узловых гексаэдральных элементов с их измельчением в области выточки. Размер конечных элементов в области концентрации не превышает 0,4 мм.

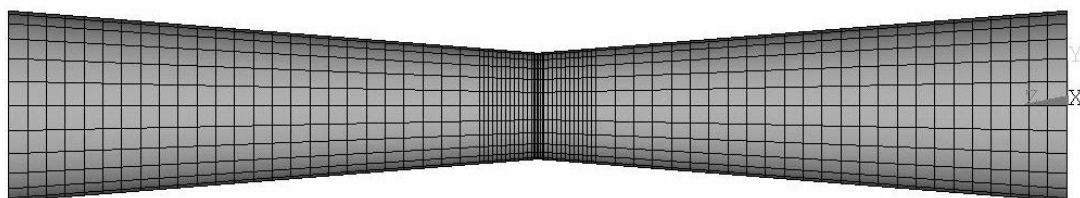


Рис. 3. Вид конечно-элементной модели образца на участке конструктивного изменения формы

В процессе расчетов используется критерий (теория) прочности Губера-Мизеса, который позволяет достаточно точно прогнозировать появление стадии пластичности для упруго-пластического моделирования и удовлетворительно отображает предельное состояние пластичных сталей [19]. Материал расчетных моделей образцов наделялся следующими характеристиками: плотность материала 7850 кг/м^3 ; модуль Юнга $2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; коэффициент Пуассона 0,3; полилинейная диаграмма растяжения (рис. 4). Для расчета использовались данные истинной диаграммы растяжения, учитывающей уменьшение поперечного сечения в процессе нагружения образца. В стадии пластической работы малоуглеродистая сталь подвергается большим деформациям. Программа ANSYS позволяет учитывать большие деформации при нелинейном поведении материалов. При расчете учитывались также следующие факторы: 1) увеличивающаяся с постоянным шагом нагрузка, с максимальным значением, соответствующим достижению предела проч-

ности в области концентрации с точностью до 0,5 % от σ_b , и 2) жесткое защемление другого торца образца (в декартовой системе координат). Стержень нагружался на свободном торце (соответствует закреплению в подвижной траверсе испытательной машины). Значения прикладываемых нагрузок приведены в табл. 1. Для корректного решения в настройках решателя включена опция учета больших деформаций (Large Displacement Static).

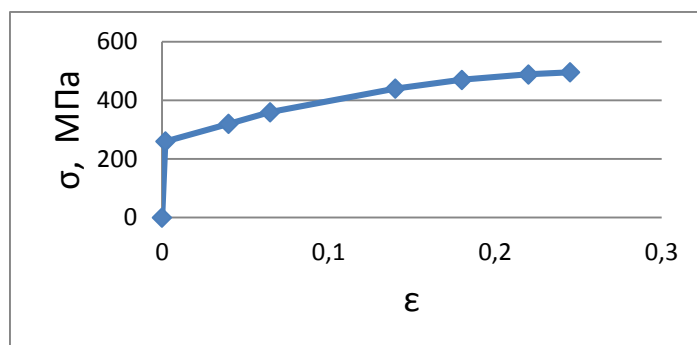


Рис. 4. Вид экспериментальной диаграммы « σ - ϵ » стали образцов «a-f» и «gr»

Таблица 1 – Величины нагрузок на образцы «a-f»

Образец типа	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
Нагрузка P_{\max} , кН	31,3	33,6	35,6	39,4	43,2	47,3

Результаты конечно-элементного расчета деформаций и плотности накапливаемой энергии в окрестности сечения 1-1 при нагружении моделей «a-f» представлены в табл. 2, 3. На рис. 5 приведено распределения эквивалентных пластических деформаций в предельном состоянии растянутых образцов серии «gr». Как видно из эпюр табл. 2 изменение угла α наклона берегов выточек влияет на объем пластически деформируемого материала (образцы «b-e») в основании выточки. По данным конечно-элементного расчета образцов «b-e» в стадии предразрушения получено, что особенно значительно сокращается этот объем при углах выточек α , близких к 90° . Расчет показал, что пластически деформируемая область у основания острых выточек более чем в сто раз меньше, чем соответствующий объем у основания пологих выточек.

Таблица 2 – Эпюры распределения эквивалентных пластических деформаций в предельном состоянии растянутых образцов

Тип образца	Эпюра распределения пластических деформаций в опасной зоне
a)	<p>-.119E-12 .026618 .053237 .079855 .106473 .133091 .15971 .186328</p>
b)	<p>-.935E-18 .034809 .069618 .104427 .139235 .174044 .208853 .243662</p>

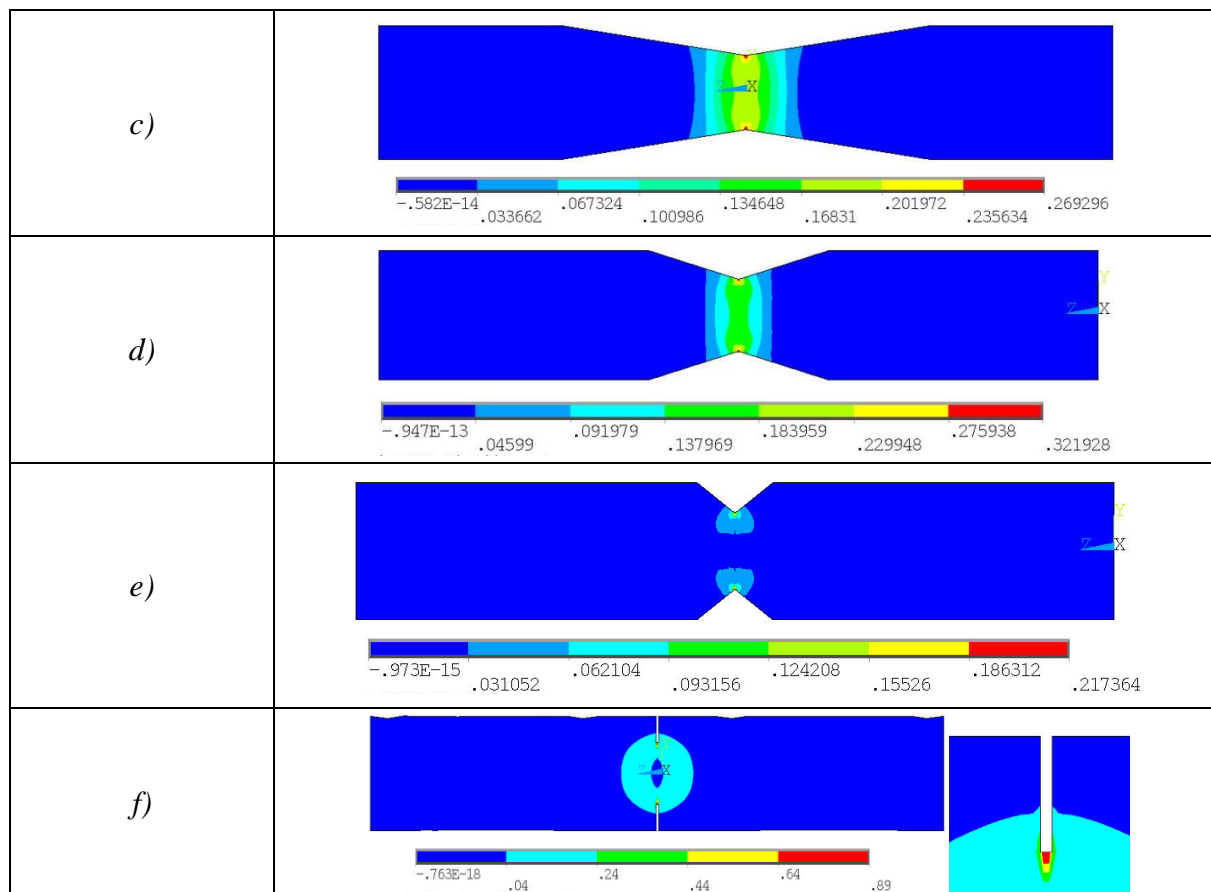
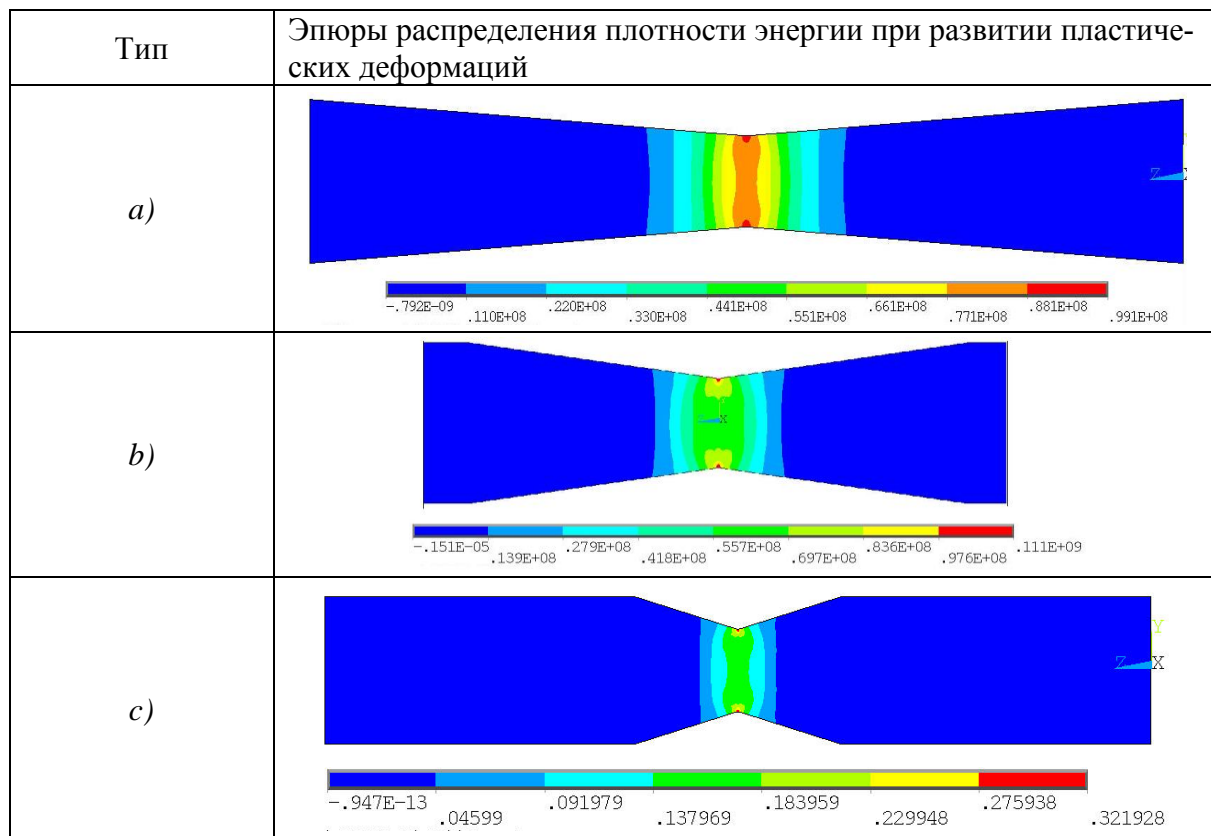


Таблица 3 – Эпюры плотности энергии при пластическом деформировании образцов «a-f» в окрестности ослабленного сечения



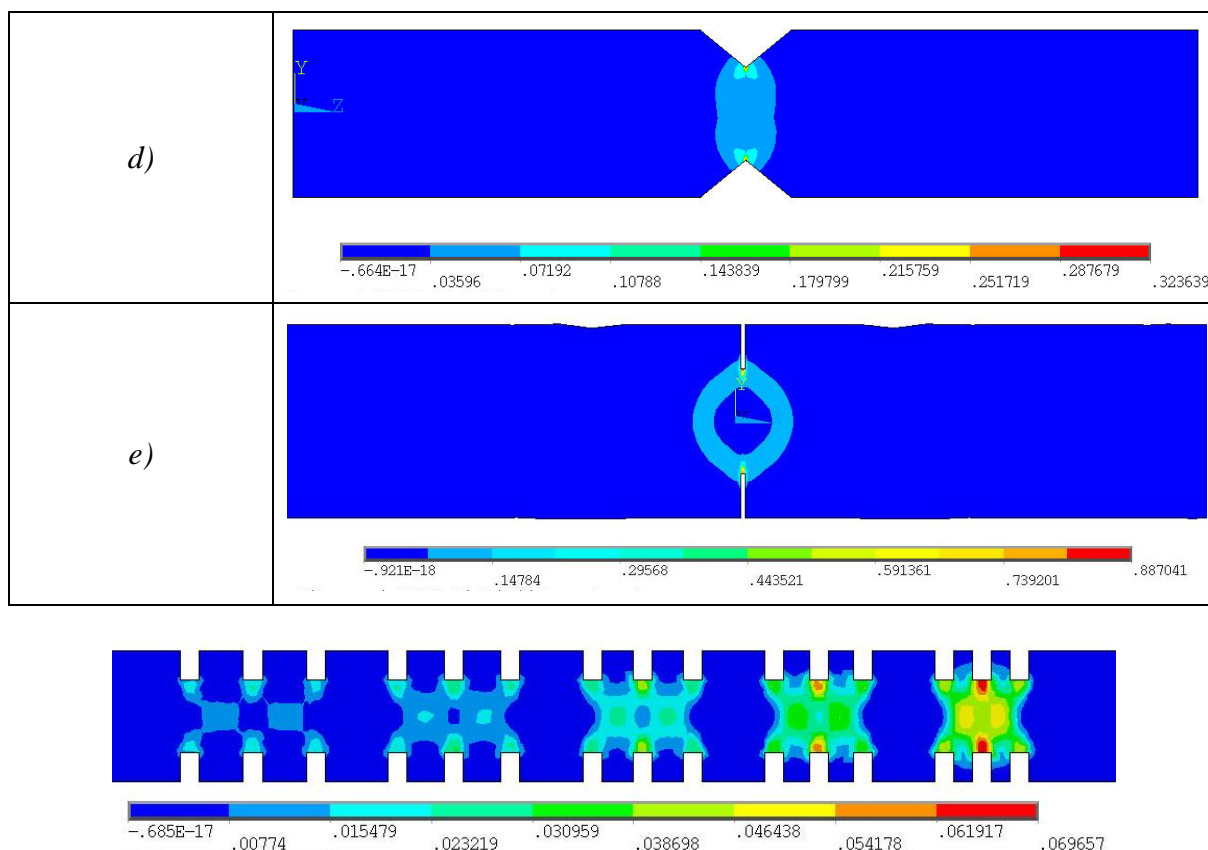


Рис. 5. Распределения эквивалентных пластических деформаций в предельном состоянии растянутых образцов серии «gr»

В образцах серии «gr» (рис. 5) стеснение пластических деформаций в основании происходит лишь для выточек, ширина которых сопоставима с диаметром стержня в ослабленных сечениях. Наибольшее развитие эквивалентных пластических деформаций наблюдается в выточках между узкими ребрами.

Квазистатические испытания стальных образцов, отображающих расчетные модели (рис. 2), показали, что изменения остроты выточки наиболее заметно сказались на изломах образцов.

Полученные в ANSYS распределения плотности энергии «a-f» в окрестности сечения 1-1 образцов приведены в табл. 3, из которой следует, что увеличение остроты концентраторов приводит к значительной локализации плотности энергии в корне надреза. В этих зонах возникают наиболее благоприятные условия для зарождения начальных трещин при статическом и усталостных нагружениях, развития питтинговой коррозии.

Рис. 6. показывает, что в изломах образцов доля скола уменьшалась от образца «a» к образцу «f». Растяжение образца «f» сопровождалось значительным стеснением пластических деформаций, вовлечением в пластическую работу примыкающих к выточке частей стержня. В изломе этого образца наблюдается развитие начальной кольцевой трещины примерно до половины диаметра ослабленного сечения с последующим доломом образца. Излом образцов серии «gr» (рис. 7) произошел в выточке, для которой характерны наибольшие эквивалентные пластические деформации. Узкие групповые выточки, примыкающие к зоне излома образца серии «gr», являются одним из способов снижения концентрации напряжений в стержне [19].

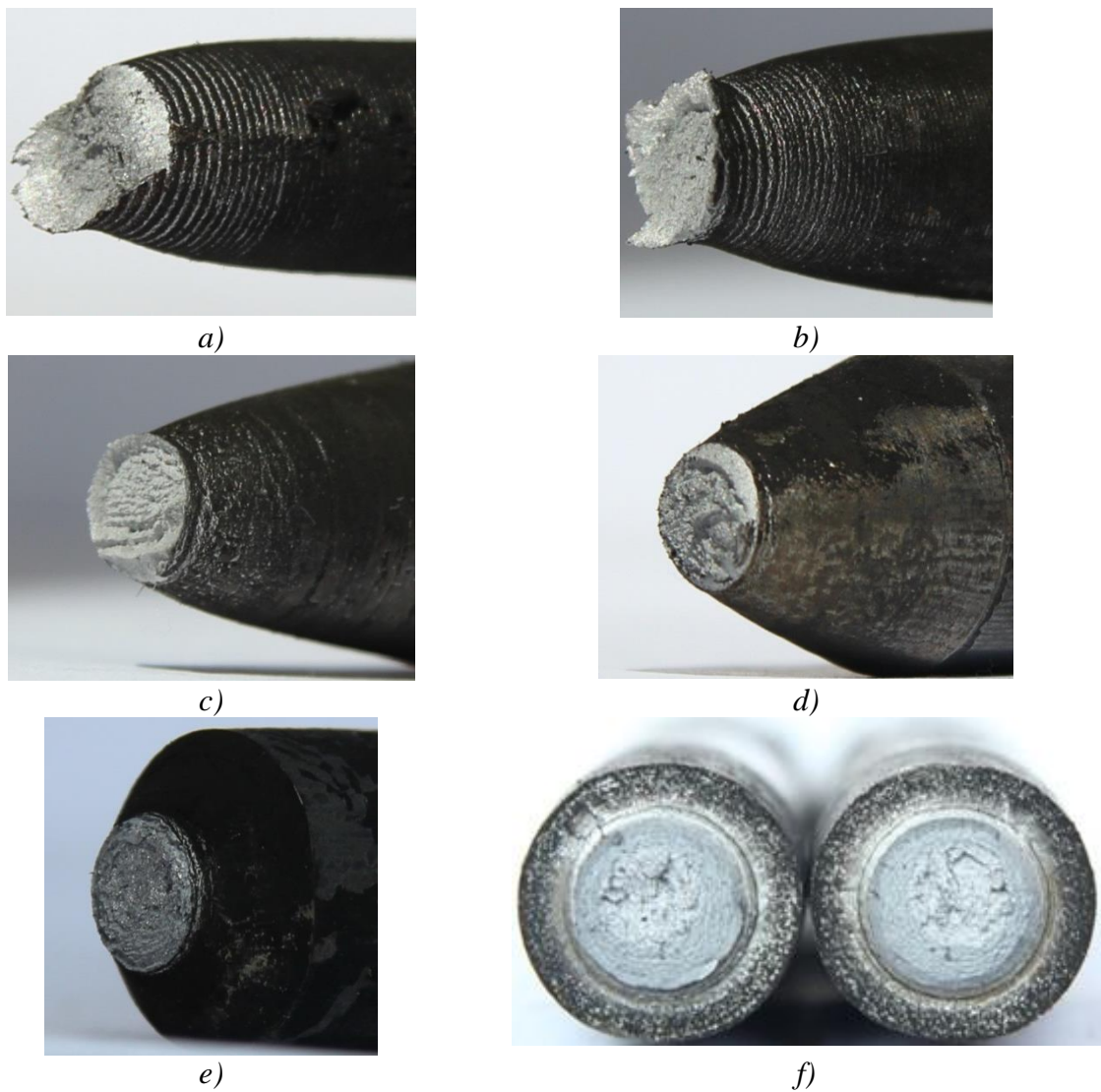


Рис. 6. Виды изломов образцов типа «a-f»

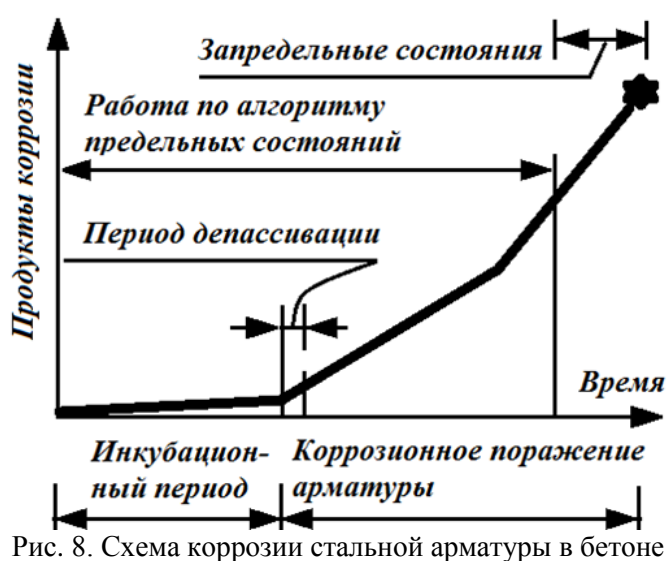


Рис. 7. Вид излома образца типа «gr» и деформированных зон, примыкающих к излому

В арматурных стержнях в процессе их металлургического передела возникают поля внутренних уравновешенных напряжений, которые накладываются на поля рабочих напряжений. Эти напряжения могут достигать предела текучести стали. Их величина и знак зависят от технологии производства стержней.

Эксперименты показывают, что чувствительность к коррозионному поражению арматурных стержней, находящихся под напряжением, в значительной мере определяется химическим составом структурой и уровнем остаточных напряжений 1 и 2 рода [14, 20]. При более высоких механических свойствах арматура из стали имеет более низкую коррозионную стойкость.

Закключение и обсуждение. Поверхностные концентраторы деформаций и напряжений являются основными факторами снижения коррозионной стойкости стержней. Длительная сохранность арматуры в бетонах определяется изолирующим действием бетона, зависящим от его плотности структуры и толщины слоя, химического состава цементного камня и условиями эксплуатации конструкций. Однако ни одна из нормируемых характеристик проницаемости бетона (газо- и воздухопроницаемость, водопоглощение и водонепроницаемость) не гарантирует длительного защитного действия бетона по отношению к арматуре. Поэтому модель изменения коррозионного поведения стали во времени рассматривается в виде двух периодов – инкубационного и коррозионного (рис. 8). Инкубационный период характеризуется пассивностью металла. Процесс коррозии арматуры начинается с момента депассивации стали, и может продолжаться до момента наступления предельного состояния железобетонной конструкции. Далее этот процесс в продолжается в запредельном состоянии, когда конструкция теряет несущую способность, эксплуатационные свойства или внешний вид (рис. 8).



Наличие трещин в бетоне значительно увеличивает поступление агрессивных газов и жидкостей к поверхности арматуры, ускоряется нарушение защитной пассивной пленки на поверхности арматуры. Защитная пленка нарушается вначале на отдельных микроучастках поверхности арматуры. Далее развитие локального коррозионного поражения распространяется в обе стороны от трещины и вызывает дополнительное трещинообразование, вызванное давлением продуктов коррозии. Скорость коррозии арматуры зависит от ширины ее раскрытия, степени агрессивности среды, вида и диаметра арматуры, а также величины напряжений в арматуре [21]. Периодическое увлажнение железобетонных конструкций, переменная нагрузка усиливает процесс коррозии арматуры в зоне влияния поперечных трещин [21]. Для железобетонных мостовых конструкций основными причинами депассивации стальной арматуры с последующей ее коррозией является карбонизация бетона на всю толщину защитного слоя или накопление хлор-ионов сверх критической концентрации в зоне, примыкающей к поверхности стержней.

Развитию коррозии арматуры способствуют остаточные внутренние напряжения в арматуре и концентраторы напряжений и деформаций. В статье [22] изложены результаты исследования распределения остаточных напряжений в стальных арматурных стержнях диаметром 16 и 28 мм разных производителей, изготовленных с помощью термомеханического процесса. Авторы делают вывод, что напряжения сжатия существуют во внутренней части поперечного сечения арматурных стержней, а напряжения растяжения – вблизи или даже на их поверхности.

Экспериментальные данные, полученные в работе [23], показали, что в условиях коррозионной усталости металл на дне выточки (концентратора) принимает более низкие значения потенциалов, чем берега выточки. Вследствие этого при соприкосновении с электролитом (растворы солей и т. д.) возникает электрохимический процесс, в котором анодом служит дно концентратора напряжений, а катодом – остальная поверхность стержня. Наличие деформированных участков в стержнях (холоднокатанная арматура, вмятины и т. д.) приводит к появлению разности потенциалов между деформированными и недеформированными участками стержня [24]. На участках перепада потенциалов развивается локальный коррозионный процесс. Локальное разрушение арматуры часто наблюдается в бетоне, загрязненном хлоридами. Появляющиеся коррозионные ямки (питтинг) особенно опасны, при их расположении в зоне растянутых напряжений. В работе [25] установлено, что глубина локального поражения стальной арматуры, работающей в бетоне, в четыре – восемь раз превышает поражения при средней коррозии.

Ямочные поражения арматуры приводят к ускоренному ее коррозионному разрушению [26] и снижению прочности стержней.

За основу для разработки конечно-элементного моделирования ямочных коррозионных поражений нами приняты арматурные стержни с номинальными диаметрами 12, 25 и 32 мм. Твёрдотельная модель стержней принималась в соответствии с рис. 9. Эффективность использования метода конечных элементов и достоверность результатов расчета напрямую зависит от точности описания геометрии изделия. В случае арматурного стержня процесс моделирования усложняется несимметричностью сечения. Вследствие несимметричности изделия, основным критерием оптимизации является требование по уменьшению длины модели. Расчет с использованием метода конечных элементов осуществляли в программной среде ANSYS.

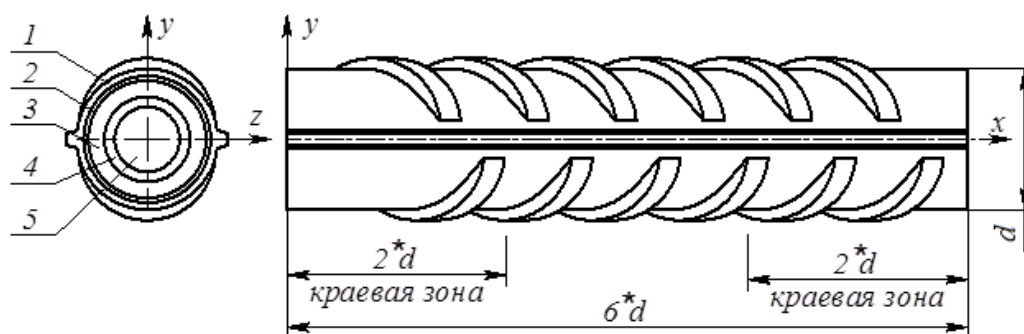


Рис. 9. Форма и структура твердотельной модели: 1, 2, 3, 4, 5 – основные визуально различимые по объему изделия слои материала

В качестве расчетной модели использовали стержневые конструкции, состоящие из набора цилиндрических вставок с различными физико-механическими свойствами. Поведение материала для каждого из слоев задавалось своей диаграммой деформирования. За расчетную модель был принят трехслойный стержень с коррозионной «язвой», которую моделировали в форме выреза сферического сегмента радиусом 30 мм и глубиной проникновения в тело стержня 3,5 мм (рис. 10). Физико-механические характеристики материалов задавали по результатам лабораторного испытания образцов при осевом растяжении. Для их определения исходный арматурный стержень обтачивали с обильным поливом охлаждающей жидкостью до нужного диаметра слоя. Растяжение образца задавалось перемещением точек правой торцевой поверхности (рис. 10) на величину 1 мм.

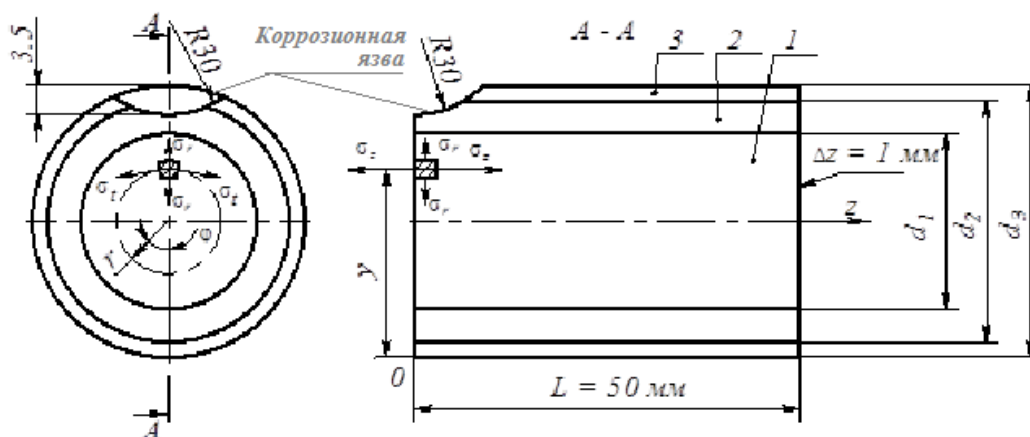
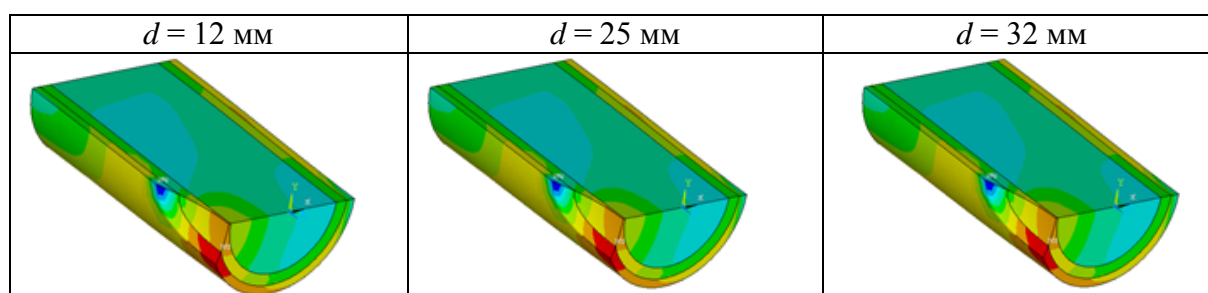


Рис. 10. Геометрия стержня с коррозионной язвой: 1 – внутренний слой; 2 – промежуточный слой; 3 – наружный слой

В результате расчета определялись компоненты тензоров напряжений, деформаций, распределение энергии деформирования, строились их распределения по слоям образца. В табл. 4 для примера приведены распределения осевых напряжений σ_z по объему стержня (красный цвет – максимальные значения, фиолетовый – минимальные).

Таблица 4 – Распределение компонент тензора напряжений по стержню (осевые напряжения σ_z)



В результате расчета получено, что изменение свойств наружных слоев путем термической обработки и коррозионного повреждения вносит изменения в характер распределения напряжений в локальном объеме непосредственно в окружении дефекта. Границы зоны влияния для образца зависят от диаметра стержня и размеров слоев. Численные исследования позволили установить, что зона влияния коррозионной язвы составляет 30–40 мм. Так для стержня диаметром 12 мм изменения пронизывают большую часть его диаметра.

Изменения в напряженном состоянии объясняются двумя факторами: 1) концентрацией напряжений в окрестности «язвы»; 2) неравномерным распределением жесткости по сечению стержня и, как следствие, смещением нейтральной линии относительно геометрического центра тяжести сечения, т. е. появлением эффекта внецентренного растяжения-сжатия, что подтверждено искривлением оси стержня в деформированном состоянии.

Для гладкого стержня при осевом растяжении с величиной деформаций 2 % максимальные осевые напряжения по слоям не зависят от диаметра стержня. Данные по компонентам напряжений по слоям всех типов стержней представлены в табл. 5.

Таблица 5 – Распределений напряжений σ_z по слоям образца с коррозионной язвой

Тип стержня	Диаметр стержня, мм	Напряжение по слоям, МПа		
		1	2	3
Коррозионная «язва»	12	410/410	500/280	695/-180
		440/580	570/730	-522/744
	25	410/410	540/510	680/420
		410/530	485/710	192/740
	32	410/410	580/500	650/430
		390/530	500/645	510/722

Выводы. 1. Конечно-элементное моделирование работы на растяжение стального арматурного стержня с многослойной структурой представляет сложную многофакторную механико-химическую задачу. При этом актуальным являются вопросы являются вопросы предотвращения внутренних гальванических токов в окрестности поверхностных дефектов.

2. Конечно-элементный анализ моделей в предельном состоянии показал, что значительно сокращается объем пластически деформированного материала при углах выступов у их оснований с осью стержня, близких к 90° . Расчет показал, что пластически деформируемая область у основания острых выточек более чем в сто раз меньше, чем соответствующий объем у основания пологих выточек. В образцах с группой выступов стеснение пластических деформаций в основании происходит лишь для выступов, ширина которых сопоставима с диаметром стержня в ослабленных сечениях. Наибольшее развитие эквивалентных пластических деформаций наблюдается в основании между узкими выступами.

3. Изменение свойств наружных слоев путем термической обработки и коррозионных повреждений вносит изменения в характер распределения напряжений в локальном объеме непосредственно в окружении дефекта. Границы зоны влияния для образца зависят от диаметра стержня и размеров слоев. Установлено, что зона влияния для коррозионной язвы – 30–40 мм.

4. При наличии односторонних коррозионных дефектов изменения напряженного состояния таких стержней относительно стержней в состоянии поставки объясняются двумя факторами: 1) концентрацией напряжений в окрестности «язвы»; 2) неравномерным распределением жесткости по сечению стержня и, как следствие, смещением нейтральной линии относительно геометрического центра тяжести сечения, т. е. проявлением эффекта внецентренного растяжения-сжатия. Это подтверждается искривлением оси стержня в деформированном состоянии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мадатян, С. А. Арматура железобетонных конструкций / С.А. Мадатян. – М.: Воентехлит, 2000. – 256 с.
2. Юрьев, А. Б. Структура термически упрочненной стержневой арматуры / А. Б. Юрьев [и др.] // Технология металлов. – 2005. – № 9. – С. 5–7.
3. Большаков, В. И. Взаимосвязь структурной неоднородности термически упрочненной арматуры с изменением твердости по сечению стержней / В. И. Большаков [и др.] // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. научн. трудов. – Вып. 36, ч. 1. – Днепропетровск: ПГАСА, 2006. – С. 159–167.
4. Василевич, Ю. В. Макроструктура арматурных стержней, упрочненных в потоке стана, и их сварных соединений / Ю. В. Василевич, Е. А. Мойсейчик, Е. К. Мойсейчик // Инновационные технологии в строительстве автомобильных дорог, мостов и подготовке

инженерных кадров в Республике Беларусь: Материалы 6-й Международной научно-технической конференции «Наука образованию, производству, экономике», Минск, 17–18 декабря 2008 г. / Белорусский национальный технический университет; редкол.: И. И. Леонович [и др.]. – Минск, 2008. – С. 326–332.

5. Стародубов, К. Ф. Термическое упрочнение проката / К. Ф. Стародубов, И. Г. Узлов, В. Я. Савенков. – М.: Металлургия, 1970. – 368 с.

6. Мойсейчик, Е. А. Изменения макроструктуры арматурных стержней при технологических воздействиях / Е. А. Мойсейчик // Инновационные технологии в строительстве автомобильных дорог, мостов и подготовке инженерных кадров в Республике Беларусь: Материалы 6-й Международной научно-технической конференции «Наука образованию, производству, экономике», Минск, 17–18 декабря 2008 г. / Белорусский национальный технический университет; редкол.: И. И. Леонович [и др.]. – Минск, 2008. – С. 279–281.

7. Сергеев, Н. Н. Влияние микроструктурных факторов и термической обработки на коррозионную стойкость арматурной стали класса А600 / Н. Н. Сергеев [и др.] // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2018. – Вып. 22(2). – С. 52–63.

8. Сергеев, Н. Н. Влияние режимов высокотемпературной термомеханической обработки на механические свойства арматурного проката / Н. Н. Сергеев [и др.] // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2019. – Вып. 23(2). – С. 29–52.

9. Сергеев, Н. Н. Влияние режимов отпуска на длительную прочность арматурных сталей в водородсодержащих средах / Н. Н. Сергеев [и др.] // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2018. – Вып. 8. – С. 94–107.

10. Zivica, V. Corrosion of reinforcement induced by environment containing chloride and carbon dioxide / V. Zivica // Bulletin of Materials Science. – 2003. – Vol. 26, № 6. – P. 605–608.

11. Бабицкий, В. В. Контроль качества и эксплуатационная долговечность бетонных и железобетонных изделий и конструкций / В. В. Бабицкий, С. Н. Ковшар. – Минск: БНТУ, 2014. – 94 с.

12. Прочность, трещиностойкость и долговечность конструкционного бетона при температурных и коррозионных воздействиях : монография : в 2 ч. / С. Н. Леонович [и др.]; под ред. С. Н. Леоновича. – Минск : БНТУ, 2016. – Ч. 2. – 204 с.

13. Мигунов, В. Н. Экспериментально-теоретическое моделирование армированных конструкций в условиях коррозии. Моногрф. / В. Н. Мигунов, И. И. Овчинников, И. Г. Овчинников. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 362 с.

14. Tuutti, K. Corrosion of Steel in Concrete [Текст] : Ph.D. Thesis / K. Tuutti // Swedish Cement and Concrete Research Institute. – Stockholm, 1982. – 469 p.

15. Бусел, А. В. Управление зимним содержанием мостов и их защита от солевой коррозии / А. В. Бусел, Е. В. Вольский, С. Е. Исаков // До роги і мости : зб. наук. пр. / Держ. служба авт. доріг України (Укравтодор), Держ. дор. НДІ ім. М. П. Шульгіна. – К.: ДерждорНДІ, 2008. – Вип. 10. – С. 51–53.

16. Васильев, А. А. Модель прогнозирования долговечности железобетонных пролетных строений мостов / А. А. Васильев, Р. Ю. Долманюк, С. В. Дашкевич // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. – 2018. – № 1(36). – С. 121–123.

17. Stipanovic Oslakovic, I. Evaluation of service life design models on concrete structures exposed to marine environment / I. Stipanovic Oslakovic, D. Vjegovic, D. Mikulic // Materials and Structures. – 2010. – Vol. 43. – P. 1397–1412.

18. Сосновский, Л. А. Коррозионно-механическая усталость: проблемы прогнозирования. / Л. А. Сосновский, А. В. Богданович, С. С. Щербаков // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – Ч. 1. Прямой эффект. – № 1(42). – С. 51–57.

19. Василевич, Ю. В. Закономерности деформирования образцов типа Людвига-Шея и образцов с групповыми выточками / Ю. В. Василевич, А. Е. Мойсейчик // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. – Вып. 31. – 2016. – С. 238–241.
20. Сергеев, Н. Н. Влияние микроструктурных факторов и термической обработки на коррозионную стойкость арматурной стали класса А600 / Н. Н. Сергеев, В. В. Извольский [и др.] // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2018. – Т. 22. – № 2(77). – С. 53–63.
21. Мигунов, В. Н. Методика и результаты экспериментальных исследований на прямых моделях обычных железобетонных конструкций влияния переменной и постоянной нагрузки на прочность опытных образцов и коррозионные характеристики арматуры / В. Н. Мигунов, И. Г. Овчинников, К. В. Шамшина // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». – 2015. – Том 7, № 4.
22. Volkwein, A. Distribution of residual stresses in reinforcing steel bars / A. Volkwein, K. Osterminski, F. Meyer, C. Gehlen // Engineering Structures. – Vol. 223. – 2020.
23. Рябченков, А. В. Коррозионно-усталостная прочность стали / А. В. Рябченков. – М.: Машгиз, 1953. – 180 с.
24. Зарецкий, Е. М. Влияние деформации на потенциалы металлов / Е. М. Зарецкий // Журнал прикладной химии. – 1951. – Т. XXIX, №6. – С. 615–623.
25. González, J. A. Comparison of rates of general corrosion and maximum pitting penetration on concrete embedded steel reinforcement/ J. A. González [et al.] // Cement and Concrete Research. – 1995. – Vol. 25, I. 2. – P. 257–264.
26. Busba, Ezeddin Rafea Effect of Localized Corrosion of Steel on Chloride-Induced Concrete Cover Cracking in Reinforced Concrete Structures, 2013. Graduate Theses and Dissertations.

Поступила: 26.01.2021

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДЕТАЛЕЙ ШАГАЮЩИХ МАШИН С ПРИМЕНЕНИЕМ ПЕРСПЕКТИВНЫХ МЕТОДОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Ходовые системы современных мобильных машин работают, как правило, при высоком уровне динамических нагрузок. Поэтому, для обеспечения безотказной работы машин различного назначения, требуется решение, наряду с другими, проблемы обеспечения контактной прочности. Кроме выбора материалов, внимание при этом нужно уделять геометрическим параметрам соприкасающихся деталей и узлов, в частности, кривизне профилей контактирующих криволинейных цилиндрических поверхностей. Следует также учитывать, что от кривизны поверхности определенной детали зависят кинематические и динамические характеристики ходовой системы в целом.

При конструировании деталей машин, совершающих вращательное движение, требуется описание исходных параметров в полярных координатах. Это особенно важно, когда деталь должна иметь криволинейную цилиндрическую поверхность. Исходя из широко известных в дифференциальной геометрии выражений [1], кривизна линии в полярных координатах определяется как:

$$K(\phi) = \frac{\left| \rho^2 + 2 \cdot \left(\frac{d\rho}{d\phi} \right)^2 - \rho \cdot \frac{d^2\rho}{d\phi^2} \right|}{\left(\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

В ряде случаев может возникнуть задача, заключающаяся в том, чтобы получить выражение для построения кривой $\rho(\phi)$, используя заданную в полярных координатах функцию кривизны $K(\phi)$. Очевидно, что поиск решения дифференциального уравнения (1) в заданной форме крайне затруднителен. Задача может быть существенно облегчена, если использовать способ представления плоских кривых, изложенный в публикации [2]. В этой работе, при решении задачи о вычислении радиуса кривизны профиля кулачка, были получены следующие выражения:

$$\begin{cases} \frac{dH}{d\phi} = H \cdot \operatorname{tg} \gamma; \\ R = \frac{H}{\left(1 - \frac{d\gamma}{d\phi} \right) \cdot \cos \gamma} - r. \end{cases} \quad (2)$$

В этой системе уравнений (2): $H(\phi)$ – расстояние между осями вращения кулачка и ролика, мм; $\gamma(\phi)$ – угол давления кулачка на ролик, радианы; $R(\phi)$ – радиус кривизны профиля кулачка, мм; r – радиус ролика, мм; ϕ – угол поворота кулачкового вала, радианы.

Примем обозначение: $K = \frac{1}{R+r}$ – кривизна линии, описываемой осью вращения ролика при его воображаемом относительном качении вокруг профиля кулачка, 1/мм. При этом, кривизна линии является функцией $K = f(\phi)$. Для соответствия между выражениями (1) и (2) примем обозначение: $H(\phi) = \rho(\phi)$.

Тогда, после выполнения ряда несложных преобразований системы (2), можно получить следующую систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\varphi} = \rho \cdot \operatorname{tg} \gamma; \\ \frac{d\gamma}{d\varphi} = 1 - \frac{\rho \cdot K}{\cos \gamma}. \end{cases} \quad (3)$$

Данная система (3) из двух дифференциальных уравнений первого порядка полностью эквивалентна дифференциальному уравнению второго порядка (1), что можно подтвердить преобразованиями. Необходимо отметить, что эти уравнения имеют большое прикладное значение при решении широкого круга технических задач. Помимо построения кулачкового профиля для механизмов различного назначения (например, системы газораспределения и подачи топлива в двигателях внутреннего сгорания), эти уравнения могут быть востребованы для решения задач автоматизированного проектирования различных деталей и узлов колесно-шагающей ходовой системы [3, 4].

Разработанный в БНТУ опытный образец колесно-шагающего движителя сферой своего применения предполагает мобильные машины сельскохозяйственного назначения. При этом, поскольку конструкция движителя позволяет перешагивать препятствия (бордюры, ступени, камни, бревна, траншеи), открываются перспективы по его применению также в лесном хозяйстве, горной промышленности, при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций, технических средств реабилитации людей с ограниченными возможностями [3].

Поскольку колесно-шагающий движитель подвергается переменным динамическим нагрузкам, возникает задача ограничения уровня контактных напряжений для соприкасающихся поверхностей. Известно, что величина контактных напряжений, среди прочих факторов, зависит от кривизны поверхностей. Данный вопрос ранее был рассмотрен и проанализирован, были получены выражения для колесно-шагающих ходовых систем различных конструкций [5]. Используем основные положения указанной работы, чтобы на их основе усовершенствовать методику построения плоских кривых по заданной кривизне.

Примем следующие обозначения в системе уравнений (3):

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho_{\varphi}'; \quad \frac{d\gamma}{d\varphi} = \gamma_{\varphi}'.$$

Тогда, после преобразований получаем:

$$\begin{cases} \frac{\rho_{\varphi}'}{\rho} = \operatorname{tg} \gamma; \\ (1 - \gamma_{\varphi}') \cdot \cos \gamma = \rho \cdot K. \end{cases} \quad (4)$$

Произведем логарифмирование второго уравнения:

$$\ln |1 - \gamma_{\varphi}'| + \ln |\cos \gamma| = \ln |\rho| + \ln |K|.$$

Произведем дифференцирование по углу φ :

$$\frac{-\gamma_{\varphi\varphi}''}{1 - \gamma_{\varphi}'} - \frac{\sin \gamma \cdot \gamma_{\varphi}'}{\cos \gamma} = \frac{\rho_{\varphi}'}{\rho} + \frac{K_{\varphi}'}{K}.$$

Поскольку в системе уравнений (4):

$$\frac{\rho_{\varphi}'}{\rho} = \operatorname{tg} \gamma, \text{ то получаем: } \frac{-\gamma_{\varphi\varphi}''}{1 - \gamma_{\varphi}'} - \frac{\sin \gamma \cdot \gamma_{\varphi}'}{\cos \gamma} = \operatorname{tg} \gamma + \frac{K_{\varphi}'}{K}.$$

Произведем преобразования:

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma''_{\varphi\varphi}}{\gamma'_{\varphi}-1} - \operatorname{tg} \gamma \cdot \gamma'_{\varphi} - \operatorname{tg} \gamma &= \frac{K'_{\varphi}}{K}; \\
\frac{\gamma''_{\varphi\varphi}}{\gamma'_{\varphi}-1} - \operatorname{tg} \gamma \cdot (\gamma'_{\varphi} + 1) &= \frac{K'_{\varphi}}{K}; \\
\gamma''_{\varphi\varphi} - \operatorname{tg} \gamma \cdot (\gamma'_{\varphi} + 1) \cdot (\gamma'_{\varphi} - 1) &= \frac{K'_{\varphi}}{K} \cdot (\gamma'_{\varphi} - 1); \\
\gamma''_{\varphi\varphi} - \operatorname{tg} \gamma \cdot (\gamma'^2_{\varphi} - 1) - \frac{K'_{\varphi}}{K} \cdot \gamma'_{\varphi} &= -\frac{K'_{\varphi}}{K}; \\
K \cdot \gamma''_{\varphi\varphi} - K \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot (\gamma'^2_{\varphi} - 1) - K'_{\varphi} \cdot \gamma'_{\varphi} &= -K'_{\varphi}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Таким образом, получено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка вместо двух уравнений первого порядка (3). Для нахождения решения уравнения (5), применим преобразования [6, с. 581, п. 6.53], используя замену переменной следующего вида:

$$\eta(\varphi) = \sin \gamma. \tag{6}$$

Тогда $\frac{d(\sin \gamma)}{d\varphi} = \frac{d\eta}{d\varphi} = \eta'_{\varphi}$, а также $\frac{d(\sin \gamma)}{d\varphi} = \cos \gamma \cdot \frac{d\gamma}{d\varphi} = \cos \gamma \cdot \gamma'_{\varphi}$.

Следовательно $\eta'_{\varphi} = \cos \gamma \cdot \gamma'_{\varphi}$.

Поэтому

$$\gamma'_{\varphi} = \frac{\eta'_{\varphi}}{\cos \gamma}. \tag{7}$$

Указанная подстановка [6, с. 581, п. 6.53], как правило, применяется в тех случаях, когда необходимо после преобразований получить различные виды уравнения Бесселя [6, 7]. Однако, рассматриваемая нами задача не может быть приведена к этому типу дифференциальных уравнений второго порядка.

Далее следуют преобразования:

$$\gamma''_{\varphi\varphi} = \left(\frac{\eta'_{\varphi}}{\cos \gamma} \right)'_{\varphi} = \frac{(\eta'_{\varphi})'_{\varphi} \cdot \cos \gamma + \eta'_{\varphi} \cdot \sin \gamma \cdot \gamma'_{\varphi}}{\cos^2 \gamma} = \frac{\eta''_{\varphi\varphi} \cdot \cos \gamma + \eta'_{\varphi} \cdot \eta'_{\varphi}}{\cos^2 \gamma} = \frac{\eta''_{\varphi\varphi}}{\cos \gamma} + \frac{(\eta'_{\varphi})^2 \cdot \eta}{\cos^3 \gamma}. \tag{8}$$

Тогда дифференциальное уравнение (5) примет вид:

$$\begin{aligned}
K \cdot \left(\frac{\eta''_{\varphi\varphi}}{\cos \gamma} + \frac{(\eta'_{\varphi})^2 \cdot \eta}{\cos^3 \gamma} \right) - K \cdot \frac{\eta}{\cos \gamma} \cdot \left(\frac{(\eta'_{\varphi})^2}{\cos^2 \gamma} - 1 \right) - K'_{\varphi} \cdot \frac{\eta'_{\varphi}}{\cos \gamma} + K'_{\varphi} &= 0; \\
K \cdot \frac{\eta''_{\varphi\varphi}}{\cos \gamma} + K \cdot \frac{(\eta'_{\varphi})^2 \cdot \eta}{\cos^3 \gamma} - K \cdot \frac{(\eta'_{\varphi})^2 \cdot \eta}{\cos^3 \gamma} + K \cdot \frac{\eta}{\cos \gamma} - K'_{\varphi} \cdot \frac{\eta'_{\varphi}}{\cos \gamma} + K'_{\varphi} &= 0; \\
K \cdot \frac{\eta''_{\varphi\varphi}}{\cos \gamma} - K'_{\varphi} \cdot \frac{\eta'_{\varphi}}{\cos \gamma} + K \cdot \frac{\eta}{\cos \gamma} + K'_{\varphi} &= 0; \\
K \cdot \eta''_{\varphi\varphi} - K'_{\varphi} \cdot \eta'_{\varphi} + K \cdot \eta + K'_{\varphi} \cdot \cos \gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Будем исходить из условия, что угол $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, поэтому $\cos \gamma > 0$.

Поскольку $\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - \eta^2}$, получаем дифференциальное уравнение:

$$K \cdot \eta''_{\varphi\varphi} - K'_{\varphi} \cdot \eta'_{\varphi} + K \cdot \eta + K'_{\varphi} \cdot \sqrt{1 - \eta^2} = 0. \tag{9}$$

Таким образом, после интегрирования уравнения (9) получим функцию вида $\eta(\varphi)$. Поскольку $\eta(\varphi) = \sin \gamma$, можно затем найти функцию $\gamma(\varphi)$, после чего $\gamma(\varphi)$ следует подставить в первое уравнение системы (4):

$$\frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{tg}[\gamma(\varphi)].$$

Это будет уравнение с разделяющимися переменными, решение которого имеет вид:

$$\ln |\rho| = \int \operatorname{tg}[\gamma(\varphi)] \cdot d\varphi. \quad (10)$$

Однако, найти решение согласно выражению (10) будет крайне затруднительно. Можно использовать другой способ, позволяющий получить приближенное аналитическое решение достаточно высокой точности. Для этого воспользуемся вторым уравнением системы (4):

$$(1 - \gamma') \cdot \cos \gamma = \rho \cdot K.$$

С учетом выражения $\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - \eta^2}$, а также (7), получаем зависимость вида:

$$\rho = \frac{\sqrt{1 - \eta^2} - \eta'}{K}. \quad (11)$$

С другой стороны, уравнение (9) можно представить в виде:

$$-\frac{(\eta''_{\varphi\varphi} + \eta)}{K'} = \frac{\sqrt{1 - \eta^2} - \eta'}{K}. \quad (12)$$

Очевидно, что в итоге получается выражение:

$$\rho = -\frac{(\eta''_{\varphi\varphi} + \eta)}{K'}. \quad (13)$$

В итоге, для нахождения уравнения $\rho(\varphi)$ плоской кривой в полярных координатах при известном выражении кривизны $K(\varphi)$, сначала следует из уравнения (9) найти функцию $\eta(\varphi)$, а затем воспользоваться либо выражением (11), либо (13). Для проверки точности решения следует вычислить кривизну линии. Так как $\rho' = \rho \cdot \operatorname{tg} \gamma$, то после преобразований получаем:

$$\rho' = \rho \cdot \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}; \quad (14)$$

$$\rho''_{\varphi\varphi} = \rho \cdot \left(\frac{\eta^2}{1 - \eta^2} + \frac{\eta'}{\sqrt{1 - \eta^2}} \cdot \frac{1}{1 - \eta^2} \right). \quad (15)$$

Затем, используя формулы (1, 11, 13-15), следует вычислить кривизну линии.

Таким образом, принципиальным вопросом является интегрирование уравнения (9), чтобы получить функцию вида $\eta(\varphi)$. При этом данное уравнение не упоминается в справочниках [6, 7], поэтому нахождение его решения представляет собой нестандартную задачу.

В работе [8] было описано приближенное решение задачи для одного частного случая. Была задана функция кривизны $K = k_0 \cdot e^{k_1 \cdot \varphi}$, где k_0, k_1 – постоянные коэффициенты. После преобразований, было получено автономное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида [5, 8]:

$$\eta''_{\varphi\varphi} - k_1 \cdot \eta' + \eta + k_1 \cdot \sqrt{1 - \eta^2} = 0.$$

Можно понизить его порядок до первого, применив подстановки и преобразовав:

$$\eta' = p(\eta); \quad \eta''_{\varphi\varphi} = p \cdot \frac{dp}{d\eta}.$$

$$p \cdot \frac{dp}{d\eta} - k_1 \cdot p + \eta + k_1 \cdot \sqrt{1 - \eta^2} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка относится к группе уравнений Абеля второго рода [6, 7]. Несмотря на понижение порядка, нахождение решения представляется затруднительным, особенно с учетом того, что данная форма уравнений Абеля второго рода не описана в справочнике [7]. По этой причине, целесообразно использовать методику для получения приближенного решения, данную в работе [8]. Описанная методика имеет ограниченное применение, поэтому следует найти общее решение для большего числа функций кривизны. Представим уравнение (13) в виде:

$$\eta''_{\varphi\varphi} + \eta = -K'_{\varphi} \cdot \rho. \quad (16)$$

Выражение в правой части уравнения (16) есть некоторая функция $f(\varphi) = -K'_{\varphi} \cdot \rho$. Чтобы найти функцию $\eta(\varphi)$, следует решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (16). Решение представим в виде $\eta = \bar{\eta} + \eta^*$. Для нахождения $\bar{\eta}$ следует решить уравнение $\eta''_{\varphi\varphi} + \eta = 0$.

Получаем: $\bar{\eta} = C_1 \cdot \sin \varphi + C_2 \cdot \cos \varphi$, где C_1, C_2 – постоянные интегрирования. Определять η^* следует по методу Лагранжа [1, 6]. Тогда решение уравнения (16) должно принять вид: $\eta = C_1(\varphi) \cdot \sin \varphi + C_2(\varphi) \cdot \cos \varphi$.

Для нахождения функций $C_1(\varphi), C_2(\varphi)$ следует воспользоваться системой уравнений:

$$\begin{cases} C'_{1\varphi} \cdot \sin \varphi + C'_{2\varphi} \cdot \cos \varphi = 0; \\ C'_{1\varphi} \cdot \cos \varphi - C'_{2\varphi} \cdot \sin \varphi = -K'_{\varphi} \cdot \rho. \end{cases} \quad (17)$$

Выполнив преобразования, получим:

$$\begin{aligned} C'_{1\varphi} &= -K'_{\varphi} \cdot \rho \cdot \cos \varphi, \\ C'_{2\varphi} &= K'_{\varphi} \cdot \rho \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

После интегрирования получим:

$$C_1(\varphi) = I_1 + C_1, \quad C_2(\varphi) = I_2 + C_2, \quad \text{где } C_1, C_2 \text{ – постоянные интегрирования.}$$

Здесь:

$I_1 = -\int K'_{\varphi} \cdot \rho \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$; $I_2 = \int K'_{\varphi} \cdot \rho \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$ – первообразные функции без учета постоянных величин интегрирования. После этого получаем решение:

$$\eta = C_1 \cdot \sin \varphi + C_2 \cdot \cos \varphi + I_1 \cdot \sin \varphi + I_2 \cdot \cos \varphi.$$

Найдем производную и после преобразований получим:

$$\eta'_{\varphi} = C_1 \cdot \cos \varphi - C_2 \cdot \sin \varphi + I_1 \cdot \cos \varphi - I_2 \cdot \sin \varphi.$$

Таким образом:

$$\eta = (C_1 + I_1) \cdot \sin \varphi + (C_2 + I_2) \cdot \cos \varphi. \quad (18)$$

$$\eta'_{\varphi} = (C_1 + I_1) \cdot \cos \varphi - (C_2 + I_2) \cdot \sin \varphi. \quad (19)$$

$$\eta''_{\varphi\varphi} = I'_{1\varphi} \cdot \cos \varphi - I'_{2\varphi} \cdot \sin \varphi - (C_1 + I_1) \cdot \sin \varphi - (C_2 + I_2) \cdot \cos \varphi. \quad (20)$$

С другой стороны, из уравнения (11) можно получить выражение:

$$\begin{aligned} \rho \cdot K + \eta'_{\varphi} &= \sqrt{1 - \eta^2}; \\ (\rho \cdot K + \eta'_{\varphi})^2 + \eta^2 &= 1; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\rho^2 \cdot K^2 + 2 \cdot \rho \cdot K \cdot \eta'_{\varphi} + \eta'^2_{\varphi} + \eta^2 = 1.$$

Используя формулы (18, 19), получим:

$$\eta^2 = (C_1 + I_1)^2 \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot (C_1 + I_1) \cdot (C_2 + I_2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + (C_2 + I_2)^2 \cdot \cos^2 \varphi;$$

$$\eta'^2_{\varphi} = (C_1 + I_1)^2 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot (C_1 + I_1) \cdot (C_2 + I_2) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + (C_2 + I_2)^2 \cdot \sin^2 \varphi.$$

Тогда:

$$\eta_{\varphi}'^2 + \eta^2 = (C_1 + I_1)^2 + (C_2 + I_2)^2.$$

Представим:

$$\rho^2 \cdot K^2 = \rho^2 \cdot K^2 \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot K^2 \cdot \sin^2 \varphi.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \rho^2 \cdot K^2 \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot K^2 \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot \rho \cdot K \cdot (C_1 + I_1) \cdot \cos \varphi - 2 \cdot \rho \cdot K \cdot (C_2 + I_2) \cdot \sin \varphi + \\ + (C_1 + I_1)^2 + (C_2 + I_2)^2 = (\rho^2 \cdot K^2 \cdot \cos^2 \varphi + 2 \cdot \rho \cdot K \cdot (C_1 + I_1) \cdot \cos \varphi + (C_1 + I_1)^2) + \\ + (\rho^2 \cdot K^2 \cdot \sin^2 \varphi - 2 \cdot \rho \cdot K \cdot (C_2 + I_2) \cdot \sin \varphi + (C_2 + I_2)^2) = (\rho \cdot K \cdot \cos \varphi + (C_1 + I_1))^2 + \\ + (\rho \cdot K \cdot \sin \varphi - (C_2 + I_2))^2 = (\rho \cdot K \cdot \cos \varphi + I_1 + C_1)^2 + (\rho \cdot K \cdot \sin \varphi - I_2 - C_2)^2 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующее выражение:

$$(\rho \cdot K \cdot \cos \varphi + I_1 + C_1)^2 + (\rho \cdot K \cdot \sin \varphi - I_2 - C_2)^2 = 1. \quad (22)$$

Находим постоянные интегрирования C_1, C_2 из выражений (18–19), используя следующие начальные условия: $\varphi = \varphi_0, \eta = \sin \gamma_0, \eta'_{\varphi} = \cos \gamma_0 - \rho(\varphi_0) \cdot K(\varphi_0)$. После преобразований получаем:

$$\begin{cases} \sin \gamma_0 = (C_1 + I_1(\varphi_0)) \cdot \sin \varphi_0 + (C_2 + I_2(\varphi_0)) \cdot \cos \varphi_0; \\ \cos \gamma_0 - \rho(\varphi_0) \cdot K(\varphi_0) = (C_1 + I_1(\varphi_0)) \cdot \cos \varphi_0 - (C_2 + I_2(\varphi_0)) \cdot \sin \varphi_0. \end{cases}$$

$$C_1 = \cos(\gamma_0 - \varphi_0) - \rho(\varphi_0) \cdot K(\varphi_0) \cdot \cos \varphi_0 - I_1(\varphi_0). \quad (23)$$

$$C_2 = \sin(\gamma_0 - \varphi_0) + \rho(\varphi_0) \cdot K(\varphi_0) \cdot \sin \varphi_0 - I_2(\varphi_0). \quad (24)$$

Представим, что:

$$A = \cos(\gamma_0 - \varphi_0) - \rho(\varphi_0) \cdot K(\varphi_0) \cdot \cos \varphi_0. \quad (25)$$

$$B = \sin(\gamma_0 - \varphi_0) + \rho(\varphi_0) \cdot K(\varphi_0) \cdot \sin \varphi_0. \quad (26)$$

Тогда постоянные интегрирования примут вид:

$$C_1 = A - I_1(\varphi_0). \quad (27)$$

$$C_2 = B - I_2(\varphi_0). \quad (28)$$

Подставим данные выражения в формулы (18-20) и получим:

$$\eta = A \cdot \sin \varphi + B \cdot \cos \varphi + (I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \sin \varphi + (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \cos \varphi. \quad (29)$$

$$\eta'_{\varphi} = A \cdot \cos \varphi - B \cdot \sin \varphi + (I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \cos \varphi - (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \sin \varphi. \quad (30)$$

$$\eta''_{\varphi\varphi} = -A \cdot \sin \varphi - B \cdot \cos \varphi - (I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \sin \varphi - (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \cos \varphi + I'_{1\varphi} \cdot \cos \varphi - I'_{2\varphi} \cdot \sin \varphi.$$

Поскольку $I_1 = -\int K'_{\varphi} \cdot \rho \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi; I_2 = \int K'_{\varphi} \cdot \rho \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$, получаем что:

$$I'_{1\varphi} \cdot \cos \varphi - I'_{2\varphi} \cdot \sin \varphi = -K'_{\varphi} \cdot \rho \cdot \cos^2 \varphi - K'_{\varphi} \cdot \rho \cdot \sin^2 \varphi = -K'_{\varphi} \cdot \rho.$$

Тогда:

$$\eta''_{\varphi\varphi} = -A \cdot \sin \varphi - B \cdot \cos \varphi - (I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \sin \varphi - (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \cos \varphi - K'_{\varphi} \cdot \rho. \quad (31)$$

Для особой части решения уравнения принимаем обозначения, а затем выражаем производные:

$$\mu_1 = (I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \sin \varphi. \quad (32)$$

$$\mu_2 = (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \cos \varphi. \quad (33)$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = (I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \sin \varphi + (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \cos \varphi. \quad (34)$$

$$\mu'_{\varphi} = \mu'_{1\varphi} + \mu'_{2\varphi} = (I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \cos \varphi - (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \sin \varphi. \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mu''_{\varphi\varphi} = \mu''_{1\varphi\varphi} + \mu''_{2\varphi\varphi} = -(I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \sin \varphi + I'_{1\varphi} \cdot \cos \varphi - (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \cos \varphi - I'_{2\varphi} \cdot \sin \varphi = \\ = -(I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \sin \varphi - (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \cos \varphi - K'_{\varphi} \cdot \rho. \end{aligned} \quad (36)$$

При начальном значении угла $\varphi = \varphi_0$ будут выполняться условия:

$$\mu_1(\varphi_0) = 0, \mu_2(\varphi_0) = 0, \mu(\varphi_0) = 0, \mu'_{1\varphi}(\varphi_0) = 0, \mu'_{2\varphi}(\varphi_0) = 0, \mu'_{\varphi}(\varphi_0) = 0.$$

Следовательно:

$$\eta = A \cdot \sin \varphi + B \cdot \cos \varphi + \mu. \quad (37)$$

$$\eta'_{\varphi} = A \cdot \cos \varphi - B \cdot \sin \varphi + \mu'_{\varphi}. \quad (38)$$

$$\eta''_{\varphi\varphi} = -A \cdot \sin \varphi - B \cdot \cos \varphi + \mu''_{\varphi\varphi}. \quad (39)$$

Используя формулы (13), (37), (39), получаем:

$$\rho = -\frac{(\mu''_{\varphi\varphi} + \mu)}{K_{\varphi}}. \quad (40)$$

Решение по формуле (40) будет находиться по отдельной методике для каждой функции кривизны. В тех случаях, когда функция кривизны представляет собой сложное выражение, следует применять другие методы. Например, в ряде случаев поиск решения можно рационализировать, если в исходном уравнении $K \cdot \eta''_{\varphi\varphi} - K'_{\varphi} \cdot \eta'_{\varphi} + K \cdot \eta + K'_{\varphi} \cdot \sqrt{1 - \eta^2} = 0$, заменить выражение с квадратным корнем – разложением в ряд по формуле бинома Ньютона [1]:

$$\sqrt{1 - \eta^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \eta^2 - \frac{1}{8} \cdot \eta^4 - \frac{1}{16} \cdot \eta^6 - \frac{5}{128} \cdot \eta^8 - \frac{7}{256} \cdot \eta^{10} - \frac{21}{1024} \cdot \eta^{12} - \frac{33}{2048} \cdot \eta^{14} - \frac{429}{32768} \cdot \eta^{16} - \frac{715}{65536} \cdot \eta^{18} - \\ - \frac{2431}{262144} \cdot \eta^{20} - \frac{4199}{524288} \cdot \eta^{22} - \frac{29393}{4194304} \cdot \eta^{24} - \frac{52003}{8388608} \cdot \eta^{26} - \frac{185725}{33554432} \cdot \eta^{28} - \frac{334305}{67108864} \cdot \eta^{30}.$$

Также, можно получить решение в виде многочлена, используя систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \rho'_{\varphi} = \frac{\rho \cdot \eta}{\lambda}; \\ \eta'_{\varphi} = \lambda - K \cdot \rho; \\ \lambda'_{\varphi} = K \cdot \rho'_{\varphi} - \eta. \end{cases} \quad (41)$$

Используя систему (41), можно избежать лавинообразного усложнения выражений для производных высокого порядка, что позволит повысить точность разложения в ряд для искомой функции $\rho(\varphi)$. Здесь функция кривизны $K(\varphi)$ задана, неизвестными функциями являются $\eta(\varphi) = \sin \gamma$, $\lambda(\varphi) = \cos \gamma$, а также уравнение кривой $\rho(\varphi)$ в полярных координатах. Таким образом, с помощью системы (41) можно получить приближенное решение уравнения (1) для любой непрерывной, бесконечно дифференцируемой функции кривизны $K(\varphi)$, производные любого порядка которой не имеют разрывов на всей области определения.

Выводы. Приведенное теоретическое обоснование необходимо для разработки методик построения плоских кривых, определяемых законом изменения кривизны в полярных координатах. Должна обеспечиваться реализация расчетов плоских кривых для конкретных функций кривизны, не имеющих бесконечных разрывов. Областью применения описанных методов дифференциальной геометрии являются системы автоматизированного проектирования. В результате, облегчается решение задач инженерной практики при проектировании колесно-шагающих ходовых систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воднев, В. Т. Основные математические формулы: Справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович; под ред. Ю.С. Богданова. – Мн.: Вышэйшая школа, 1995. – 380 с.

2. Жуковец, В. Н. Профиль плоского кулачка в виде замкнутой кривой, описанной системой уравнений в параметрическом виде / В. Н. Жуковец // Весці НАН Беларусі. – 2006. – № 1. – С. 76–86.
3. Скойбеда, А. Т. Колесно-шагающий движитель и его динамические преимущества по сравнению с колесом / А. Т. Скойбеда, И. М. Комяк, В. Н. Жуковец // Механика-2011: сб. науч. тр. V Белорусского конгресса по теорет. и прикладной механике; Минск, 26–28 окт. 2011 г.: в 2 т. – Минск, 2011. – Т. 1. – С. 138–144.
4. Скойбеда, А. Т. Рациональный профиль опорных башмаков колесно-шагающего движителя / А. Т. Скойбеда, В. Н. Жуковец // Наука и техника. Международный научно-технический журнал. – 2013. – № 6. – С. 38–42.
5. Скойбеда, А. Т. Колесно-шагающие движители для транспортного средства высокой проходимости / А. Т. Скойбеда, В. Н. Жуковец // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». – Минск, 2013. – Вып. 28. – С. 228–233.
6. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1965. – 704 с.
7. Зайцев, В. Ф. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М.: Факториал, 1997. – 512 с.
8. Скойбеда, А. Т. Решение автономного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка при построении плоских кривых / А. Т. Скойбеда, В. Н. Жуковец // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. Вып. 33. – 2018. – С. 388–397.

Поступила: 30.01.2021

ВЫПУЧИВАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ, ОТКРЫТОГО ТОНКОСТЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ВСЛЕДСТВИЕ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА

¹Мартыненко Т. М., ²Скляр О. Н., ²Мартыненко И. М., ²Куранова О. В.

¹Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск

²Белорусский национальный технический университет, Минск

Ни одна задача в области изучения сопротивления материалов не имеет такую историю, как теория выпучивания сжатых элементов металлических конструкций. Причины затруднений, встречающихся при исследовании задач выпучивания, обусловлены частично особенностями самих задач и частично особенностями материала, из которого выполнены металлические конструкции. Часто расчет конструкции заключается в определении напряжений, которое основано на предположении о существовании между внутренними и внешними силами устойчивого равновесия, т. е. равновесия, при котором любое незначительное изменение условий нагружения в определенных пределах не вызывает увеличения напряжений или непропорциональных упругих искривлений системы. Следовательно, введение в расчет напряжения, называемого допускаемым напряжением, обеспечивает степень безопасности конструкции. Совершенно с другой точки зрения рассматривается задача о выпучивании, а именно исследование возможного неустойчивого равновесия между внешней нагрузкой и внутренним сопротивлением конструкции. Дополнительным затруднением является тот факт, что явление выпучивания вообще зависит от сложного соотношения напряжений и деформаций рассматриваемого материала, что вызывает большие затруднения как в области теоретических, так и в области экспериментальных исследований [1, 2].

Рассмотрим стержень постоянного, но вообще произвольного открытого поперечного сечения, составленного из n тонких плоских пластин (рис. 1). Пластины могут иметь переменную толщину, но должны быть достаточно тонкими для того, чтобы можно было пренебречь их поперечной жесткостью по сравнению с жесткостью в их собственной плоскости, а длина стержня велика по сравнению с размерами поперечного сечения. Выберем систему координат X, y, z с началом O в центре тяжести сечения; X и y являются главными осями сечения, а z – продольной осевой линией. Наряду с системой координат X, y, z в каждом поперечном сечении проводим проходящие через центр тяжести первоначально параллельные главным осям, связанные с сечением оси ξ и η . Вследствие перемещения поперечных сечений оси ξ и η будут двигаться вместе с ними, а составляющие перемещения центра тяжести, параллельные к этим осям, будут соответственно u и v . Под действием внешних нагрузок стержень будет деформироваться; предположим, что деформация не вызывает искривления поперечных сечений стержня. Следовательно, составляющие перемещения любой точки, находящейся в плоскости поперечного сечения, будут определены координатами \bar{x} и \bar{y} центра тяжести и углом закручивания β . С другой стороны, эти перемещения определяются компонентами \bar{u} и \bar{v} перемещения центра тяжести и углом β . Переменные $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}$, и β являются функциями координаты z .

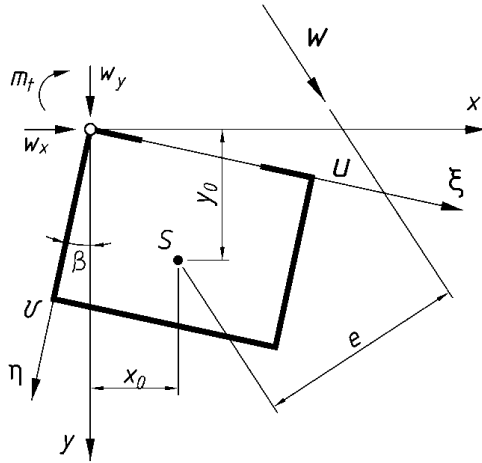


Рис. 1. Стержень постоянного открытого поперечного сечения

Учитывая вышеизложенное, выведем теперь основное дифференциальное уравнение кручения и изгиба на основе теоремы о стационарном значении потенциальной энергии. Потенциальная энергия U состоит из двух частей: из потенциальной энергии внешних нагрузок и энергии деформации V – деформированного стержня. В рассмотренном случае V можно разделить на две части: V_1 , обусловленная продольными, нормальными напряжениями, и V_2 обусловленная напряжениями сдвига.

Согласно теореме о стационарном значении потенциальной энергии величины деформации \bar{u} , \bar{v} , β и ε должны быть такими, чтобы выражение для полной потенциальной энергии принимало минимальное значение. Такую задачу можно решить с помощью вариационного исчисления; U принимает стационарное значение, при удовлетворении уравнения Эйлера. Составим систему уравнений для нахождения неизвестных:

$$EJ_y \bar{u}'''' + ER_y \beta'''' = w_x; \quad (1)$$

$$EJ_x \bar{v}'''' + ER_x \beta'''' = w_y; \quad (2)$$

$$ER_y \bar{u}'''' + ER_x \bar{v}'''' + ER_\beta \beta'''' - GK \beta'' = \bar{m}_t; \quad (3)$$

$$EA \varepsilon = 0, \quad (4)$$

где J_x , J_y – главные осевые моменты инерции, R_x , R_y коэффициенты которые обращаются в 0, в случае симметрии поперечного сечения относительно оси x или y , при двойной симметрии $R_x = R_y = 0$, но не R_β , G – модуль сдвига K – постоянная кручения.

Согласно обычной теории изгиба имеем следующие уравнения [3]:

$$EJ_y \bar{u}'' = w_x; \quad EJ_x \bar{v}'' = w_y;$$

дифференцируя дважды, получим:

$$EJ_y \bar{u}'''' = w_x; \quad EJ_x \bar{v}'''' = w_y. \quad (5)$$

Эти уравнения отличаются от уравнений (1) и (2), которые содержат добавочные члены, зависящие от R_x , R_y .

Исследуя кручение двутавровых балок, Тимошенко С. П. [4] получил следующее уравнение: $C \beta' - \frac{Dh^2}{2} \beta = M_z$, где M_z – действующий крутящий момент, а C идентичен GK в уравнении (3). Дифференцируя это уравнение и принимая во внимание, что

$\frac{dM_z}{dz} = -\bar{m}_t$, получим:

$$\frac{Dh^2}{2} \beta'''' - GK \beta'' = \bar{m}_t; \quad (6)$$

Если отождествлять ER_β с членом $\frac{Dh^2}{2}$, то уравнение (3) совпадает с (6), за исключением членов, содержащих R_x и R_y . Не будем обсуждать уравнение (4); оно отражает тот факт, что средняя продольная деформация равна нулю, так как продольная сила отсутствует. Выбором соответствующих координатных осей можно упростить уравнения (1), (2) и (3).

Рассмотрим точку S в каждом поперечном сечении с координатами x_0, y_0 в результате изгиба балки эта точка займет положение S' . Координаты u и v определим как компоненты перемещения точки S , параллельные подвижным координатным осям ξ и η . При малых значениях β , $\cos \beta = 1$ и $\sin \beta = \beta$ из рис. 1 получим следующие соотношения:

$$\bar{u} = u + y_0 \beta; \quad \bar{v} = v - x_0 \beta. \quad (7)$$

Можно использовать любые значения x_0 и y_0 . Если положить, что $x_0 = \frac{R_x}{J_x}$ и $y_0 = -\frac{R_y}{J_y}$, то уравнение (7) примет вид:

$$\bar{u} = u - \frac{R_y}{J_y} \beta; \quad \bar{v} = v - \frac{R_x}{J_x} \beta. \quad (8)$$

Подставляя эти уравнения в уравнения (1), (2) и (3), получим:

$$EJ_y u'''' = w_x; \quad (9)$$

$$EJ_x v'''' = w_y; \quad (10)$$

$$ER_y u'''' + ER_x v'''' + E \left(R_\beta - \frac{R_x^2}{J_x} - \frac{R_y^2}{J_y} \right) \beta'''' - GK \beta'' = \bar{m}_t. \quad (11)$$

Первые два уравнения можно использовать для того, чтобы исключить u'''' и v'''' , а третье, используя выражения для x_0 и y_0 , перепишем в следующем виде:

$$E \left(R_\beta - \frac{R_x^2}{J_x} - \frac{R_y^2}{J_y} \right) \beta'''' - GK \beta'' = \bar{m}_t + y_0 w_x - x_0 w_y. \quad (12)$$

Если компоненты внешних сил w_x, w_y и \bar{m}_t заменить силами, действующими в точке S , значения w_x и w_y останутся неизменными, но крутящий момент составит $\bar{m}_t = ew$. Легко убедиться, что $m_t = \bar{m}_t + y_0 w_x - x_0 w_y$, которое идентично выраже-

нию правой части уравнения (12). Кроме того, если определить постоянную Γ с помощью выражения $\Gamma = R_\beta - \frac{R_x^2}{J_x} - \frac{R_y^2}{J_y}$, тогда можно переписать уравнения (9), (10) и (12)

в следующем виде:

$$EJ_y u'''' = w_x; \quad (13)$$

$$EJ_x v'''' = w_y; \quad (14)$$

$$E\Gamma \beta'''' - GK \beta'' = m_t. \quad (15)$$

Эти уравнения идентичны по форме с уравнениями (5) и (6) обычной теории изгиба и кручения, но координаты \bar{u} , \bar{v} и β необходимо отсчитывать от начала S , а крутящий момент m_t определять относительно той же точки. На основании уравнения (15) можно заключить, что в случае, если стержень не закручен ($\beta = 0$), m_t должно равняться нулю; это означает, что равнодействующая внешних сил W должна проходить через точку S . Это обстоятельство служит основой для определения центра сдвига поперечного сечения, а точка S должна являться центром сдвига. В случае, когда стержень закручивается, но не изгибается, $u = v = 0$, и из уравнений (13) и (14) получим $w_x = w_y = 0$; это показывает, что центр сдвига S в случае чистого кручения представляет собой центр кручения поперечного сечения.

Подставляя значения u и v из уравнений (8), получим выражение для V в его окончательной форме:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} \int (ER_y u''^2 + ER_x v''^2 + E\Gamma \beta''^2 + GK \beta'^2 + BA\varepsilon^2) dz. \quad (16)$$

Выводы. В данном изложении подразумевается, что центр сдвига S определяется единственным образом при условии, если стержень не закручивается, когда равнодействующая внешних сил проходит через точку S . Новожилов В. В. [5] показал, что граничные условия на торцах стержня влияют на положение центра сдвига. Допущение, что геометрическая форма поперечных сечений стержня не меняется, распространяется также на концевые сечения, и определение центра сдвига обусловлено единственно этим граничным условием. Из этого допущения следует, что коэффициент Пуассона равен нулю. Совершенно очевидно, что без предположения о недеформируемости поперечных сечений стержня возникнут затруднения при определении центра сдвига. Если поперечные сечения искривляются, то каждая часть поперечного сечения будет иметь свой собственный центр кручения, и возможность определения центра сдвига как общего центра кручения всего поперечного сечения исчезает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
2. Власов, В. З. Общая теория оболочек / В. З. Власов. – М. : Физматгиз, 1949. – 784 с.
3. Блейх, Ф. Устойчивость металлических конструкций / Ф. Блейх. – М. : Физматгиз, 1959. – 544 с.

4. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П.Тимошенко, С. В. Войковский-Кригер. – М. : Физматгиз, 1963.
5. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1962.– 432 с.
6. Abaqus. Analysis User's Manual. Introduction, Spatial Modeling, and Execution. Publisher Simulia. – 2008. – P. 711.

Поступила: 29.01.2021

АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ ПЛАСТИНЧАТОГО ОСТЕОСИНТЕЗА ПРИ ОСКОЛЬЧАТОМ ПЕРЕЛОМЕ БЕРЦОВОЙ КОСТИ

Сукиасов В. Г.

Калининградский государственный технический университет, Калининград

В настоящее время одним из наиболее эффективных способов фиксации переломов считается пластинчатый остеосинтез с несущим элементом в виде металлической планки [1]. В данной работе ставится задача сопоставления различных вариантов конструктивного исполнения ортопедических фиксаторов пластинчатого типа с точки зрения механических аспектов восприятия синтезированной костью физиологических нагрузок в ходе восстановительного периода. Основу исследования составляет конечноэлементный анализ статического деформирования объемной модели сломанной кости с установленным на ней фиксатором. Традиционным способом является полноконтактная фиксация, при которой планка непосредственно крепится на кость с помощью шурупов, расположенных в одной плоскости. Альтернативный способ (многоплоскостная фиксация) состоит в установке на кость фиксирующей планки посредством промежуточных элементов в виде полукольцевых захватов, при этом шурупы, скрепляющие с костью как захваты, так и собственно планку, располагаются в разных плоскостях. Полукольца крепятся к планке с помощью винтов. Объемные модели кости и фиксаторов двух типов представлены на рис. 1.

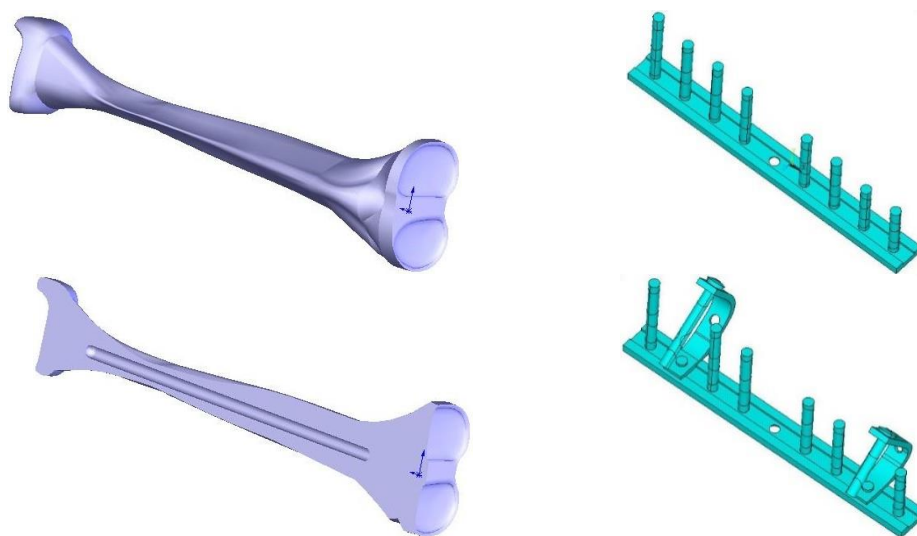


Рис. 1. Модели большой берцовой кости (целиком и в разрезе) и двух типов фиксаторов

Проблемы прочности и жесткости фиксации двумя указанными способами для случаев прямого и косого переломов изучены в [2]. В данном исследовании предполагается наличие оскольчатого (бамперного) перелома в центральной части кости, при этом плоскости разъемов образуют с осевой линией углы 50° . Осевой зазор между торцевыми поверхностями частей кости в месте перелома составляет 1,5 мм. Для каждого из двух сопоставляемых способов фиксации созданы модели трех вариантов: а) с восемью крепежными шурупами, два из которых соединяют планку, фрагмент кости и осколок; б) с девятью крепежными шурупами, отличающийся наличием добавочного шурупа для соединения осколка с верхним фрагментом; в) с восемью крепежными шурупами, два из

которых соединяют осколок с фрагментами кости. Соответствующие модели показаны на рис. 2 для случая многоплоскостной фиксации.

Дискретизация объемов выполнена 10-узловыми тетраэдральными элементами. Достоверность полученных решений обоснована сопоставлением результатов, полученных с применением сеток различной густоты.

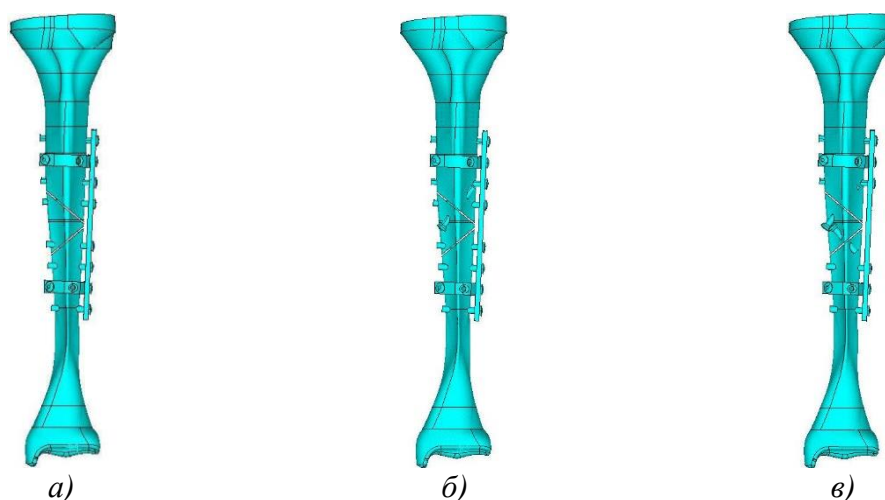


Рис. 2. Модели многоплоскостной фиксации оскольчатого перелома: а – без репозиционных шурупов; б – с одним репозиционным шурупом; в – с двумя репозиционными шурупами

Рассматриваемые модели рассчитывались при действии осевого сжатия, имитирующего физиологическую нагрузку на синтезированную кость. Количественно оценивалась подвижность фрагментов сломанной кости, а также уровень напряженного состояния всей модели.

Материал фиксатора и крепежных деталей – сталь с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$. Имеющиеся в настоящее время сведения о механических характеристиках костной ткани носят довольно отрывочный характер, при этом неоспоримым фактом является значительный разброс экспериментальных данных и их существенная зависимость от возрастных особенностей и других факторов [3–6]. На основе изучения публикаций для большой берцовой кости приняты значения упругих свойств $E = 1 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0,36$ в центральной части, а в области суставов – $E = 9 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,38$. Величина сжимающей силы составляет 800 Н.

Для количественной оценки степени подвижности фиксации в зоне перелома подсчитываются относительные перемещения характерных точек на торцевых поверхностях скрепляемых частей кости. При оскольчатом переломе таких частей три: верхний фрагмент, осколок и нижний фрагмент. Поэтому, в отличие от случаев прямого и косого переломов, приходится учитывать как взаимное смещение верхнего фрагмента и осколка в зоне верхнего разъема, так и взаимное смещение осколка и нижнего фрагмента в зоне нижнего разъема. В качестве характерных выбраны 4 точки, лежащие на контуре сечения и наиболее удаленные от осевой линии кости. Их положение показано на рис. 3, где изображены две торцевые поверхности обломка в проекции на плоскость поперечного сечения кости (вид со стороны коленного сустава вместе с торцевым сечением планки для варианта «а» полноконтактной фиксации).

Относительные смещения смежных частей кости подсчитываются для каждой из упомянутых точек в трех направлениях как разности соответствующих компонент перемещений:

$$\Delta u_x = u_x^{(\text{верх})} - u_x^{(\text{низ})}; \quad \Delta u_y = u_y^{(\text{верх})} - u_y^{(\text{низ})}; \quad \Delta u_z = u_z^{(\text{верх})} - u_z^{(\text{низ})}. \quad (1)$$

Эти величины характеризуют сближение (положительные значения) либо удаление друг от друга (отрицательные значения) соответствующих точек в данном направлении

в результате действия внешней нагрузки. Для более полной оценки жесткости фиксации перелома можно также использовать значение суммарного взаимного смещения, которое подсчитывается в характерных точках по формуле

$$\Delta u = \sqrt{\Delta u_x^2 + \Delta u_y^2 + \Delta u_z^2}. \quad (2)$$

Полученные результаты приведены в таблицах 1–6. Жирным шрифтом выделены значения, соответствующие более жесткой фиксации одного из двух сопоставляемых способов.

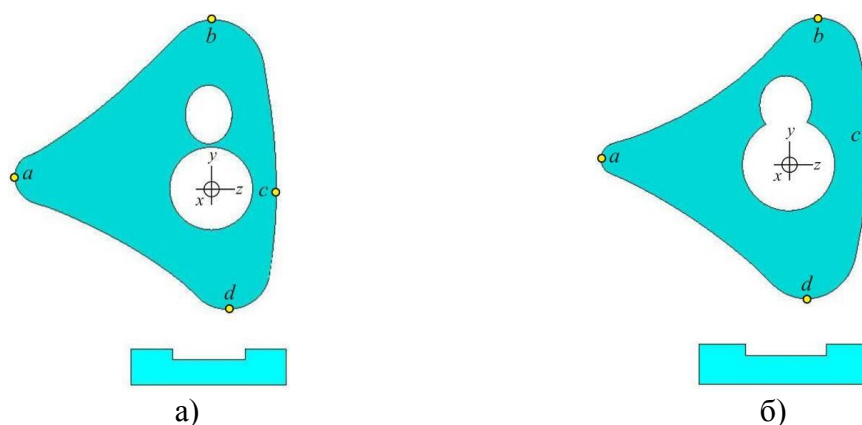


Рис. 3. Положение характерных точек в верхнем разрезе (а) и в нижнем разрезе (б)

Таблица 1 – Взаимное смещение фрагментов, вариант «а», верхний разрез

Точка	Многоплоскостная фиксация				Полноконтактная фиксация			
	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu , мм	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu , мм
a	0,00253	0,00304	0,01435	0,01488	0,00239	0,00355	0,01405	0,01468
b	0,03502	0,02200	0,02056	0,04618	0,03386	0,02276	0,02044	0,04563
c	0,01632	0,00156	0,00776	0,01814	0,01599	0,00243	0,01026	0,01915
d	0,00875	-0,00387	0,00733	0,01205	0,00424	-0,00528	0,00764	0,01021

Таблица 2 – Взаимное смещение фрагментов, вариант «а», нижний разрез

Точка	Многоплоскостная фиксация				Полноконтактная фиксация			
	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu , мм	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu , мм
a	0,00622	0,01923	0,01385	0,02450	0,00527	0,01924	0,01394	0,02434
b	0,04759	-0,01214	0,00569	0,04944	0,04575	-0,01103	0,00580	0,04742
c	0,02845	0,00945	0,01834	0,03514	0,02703	0,00948	0,01806	0,03387
d	0,00494	0,02601	0,01982	0,03307	0,00292	0,02626	0,01953	0,03286

Таблица 3 – Взаимное смещение фрагментов, вариант «б», верхний разрез

Точка	Многоплоскостная фиксация				Полноконтактная фиксация			
	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu , мм	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu , мм
a	-0,01075	0,00382	0,01449	0,01845	-0,00945	0,00463	0,01438	0,01782
b	0,03007	0,02008	0,02548	0,04423	0,02891	0,02052	0,02507	0,04342
c	0,01536	0,00268	0,00844	0,01773	0,01512	0,00361	0,01093	0,01900
d	0,00424	-0,00256	0,00290	0,00574	0,00067	-0,00350	0,00373	0,00516

Таблица 4 – Взаимное смещение фрагментов, вариант «б», нижний разрез

Точка	Многоплоскостная фиксация				Полноконтактная фиксация			
	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu , мм	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu , мм
a	0,01399	0,01268	0,01432	0,02370	0,01215	0,01278	0,01466	0,02293
b	0,04571	-0,01081	0,00601	0,04736	0,04405	-0,00980	0,00601	0,04553
c	0,02672	0,01124	0,01856	0,03442	0,02548	0,01122	0,01841	0,03338
d	0,00869	0,02379	0,02168	0,03334	0,00615	0,02432	0,02190	0,03330

Таблица 5 – Взаимное смещение фрагментов, вариант «в», верхний разъем

Точка	Многоплоскостная фиксация				Полноконтактная фиксация			
	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu , мм	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu , мм
a	0,02662	0,02991	0,02130	0,04535	0,02376	0,02909	0,02014	0,04262
b	0,02773	0,00795	0,04288	0,05168	0,04071	0,01574	0,04318	0,06140
c	0,00665	-0,01825	0,01355	0,02368	0,00975	-0,01629	0,01911	0,02694
d	0,01556	-0,00567	-0,00195	0,01667	0,00458	-0,01488	-0,00374	0,01601

Таблица 6 – Взаимное смещение фрагментов, вариант «в», нижний разъем

Точка	Многоплоскостная фиксация				Полноконтактная фиксация			
	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu , мм	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu , мм
a	-0,02829	0,02691	0,01836	0,04314	-0,02563	0,02568	0,01769	0,04036
b	0,21434	-0,06099	-0,05022	0,22844	0,20005	-0,05650	-0,04503	0,21269
c	0,16881	-0,00316	0,00946	0,16910	0,15684	-0,00270	0,00934	0,15714
d	0,02955	0,07491	0,09163	0,12198	0,02720	0,07046	0,08522	0,11387

Как показали расчеты, при осевом нагружении полноконтактная фиксация вдоль оси сжатия однозначно жестче для вариантов «а» и «б» и преимущественно жестче для варианта «в»; суммарно полноконтактная фиксация также в основном жестче. При этом в поперечных направлениях для вариантов «а» и «б» большую жесткость обнаруживает в основном многоплоскостная фиксация. Сопоставление вариантов «а» и «б» обнаруживает повышение жесткости фиксации обоими способами за счет дополнительного шурупа, что выглядит вполне закономерным.

Уровень напряженного состояния фиксатора и фрагментов кости оценивался по величине интенсивности напряжений, подсчитываемой по координатным компонентам согласно выражению

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)}. \quad (3)$$

Поля интенсивностей напряжений (Па) в планке для варианта «а» (см. рис. 2) представлены на рис. 4.

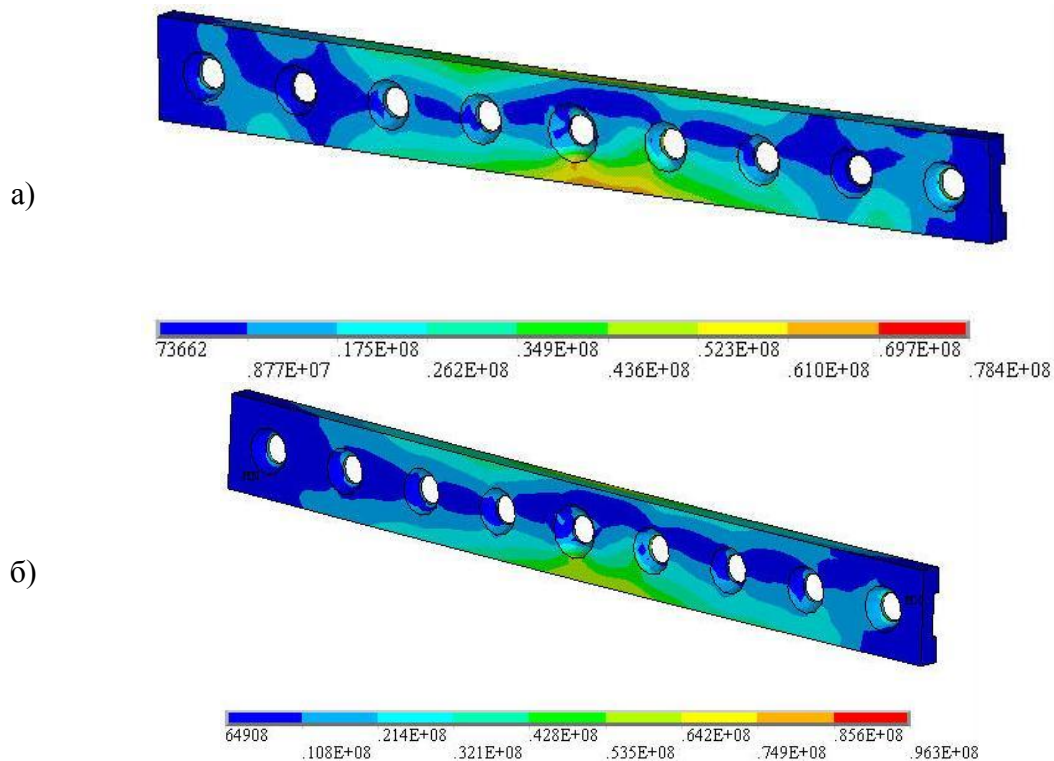


Рис. 4. Напряженное состояние планки при осевом сжатии для случаев многоплоскостной (а) и полноконтактной (б) фиксации, вариант «а»

Данные о максимальных напряжениях приведены в табл. 7–9.

Таблица 7 – Напряженное состояние составных частей модели синтезированной кости, вариант «а»

Характеристика напряженного состояния	$\sigma_{i \max}$, Па	
	Многоплоскостная	Полноконтактная
Способ фиксации		
Планка	$0,78377 \cdot 10^8$	$0,96298 \cdot 10^8$ (+23 %)
Шурупы	$0,10466 \cdot 10^9$	$0,97453 \cdot 10^8$ (-7 %)
Полукольца	$0,58599 \cdot 10^8$	–
Винты	$0,12500 \cdot 10^8$	–
Центральная зона кости	$0,11213 \cdot 10^9$	$0,11241 \cdot 10^9$ (+0 %)
Краевые зоны кости	$0,86892 \cdot 10^7$	$0,90991 \cdot 10^7$ (+5 %)

Таблица 8 – Напряженное состояние составных частей модели синтезированной кости, вариант «б»

Характеристика напряженного состояния	$\sigma_{i \max}$, Па	
	Многоплоскостная	Полноконтактная
Способ фиксации		
Планка	$0,79938 \cdot 10^8$	$0,96325 \cdot 10^8$ (+20 %)
Шурупы	$0,10215 \cdot 10^9$	$0,95592 \cdot 10^8$ (-6 %)
Полукольца	$0,59501 \cdot 10^8$	–
Винты	$0,12708 \cdot 10^8$	–
Центральная зона кости	$0,10841 \cdot 10^9$	$0,10912 \cdot 10^9$ (+1 %)
Краевые зоны кости	$0,86268 \cdot 10^7$	$0,90991 \cdot 10^7$ (+5 %)

Таблица 9 – Напряженное состояние составных частей модели синтезированной кости, вариант «в»

Характеристика напряженного состояния	$\sigma_{i \max}$, Па	
	Многоплоскостная	Полноконтактная
Способ фиксации		
Планка	$0,22673 \cdot 10^9$	$0,17096 \cdot 10^9$ (-25 %)
Шурупы	$0,45690 \cdot 10^9$	$0,41435 \cdot 10^9$ (-9 %)
Полукольца	$0,14211 \cdot 10^9$	–
Винты	$0,30945 \cdot 10^8$	–
Центральная зона кости	$0,13612 \cdot 10^9$	$0,11386 \cdot 10^9$ (-16 %)
Краевые зоны кости	$0,93551 \cdot 10^7$	$0,88336 \cdot 10^7$ (-6 %)

Анализ приведенных данных позволяет установить, что при осевом сжатии для вариантов «а» и «б» многоплоскостная фиксация выглядит предпочтительнее с точки зрения уровня напряженного состояния фиксатора и кости. Вариант «в» по сравнению с вариантами «а» и «б» дает более высокий уровень наибольших напряжений при обоих способах фиксации.

Таким образом, теоретически изучена реакция скрепленной фиксатором большой берцовой кости на действие физиологической нагрузки в виде осевого сжатия, при наличии оскольчатого перелома. Ни в одном из рассмотренных расчетных вариантов не было отмечено соприкосновения между собой скрепляемых частей кости под действием нагрузки. Это избавило от необходимости постановки и решения нелинейных контактных задач.

Как показали полученные результаты, при действии осевого сжатия ни многоплоскостной, ни полноконтактный способы не обнаруживают однозначного преимущества по жесткости фиксации оскольчатого перелома. В то же время, с позиций длительного

применения, надежность многоплоскостной фиксации несомненно выше, поскольку предотвращает сход фиксатора с кости вследствие проскальзывания шурупов.

Что касается напряженного состояния изученных моделей и их составных частей, то за счет сложности геометрии и особенностей нагружения оно характеризуется существенной неоднородностью. В частности, локальные области с резким возрастанием уровня напряжений наблюдаются на контурах свободных отверстий планки и полуколец, а также на кромках отверстий, занятых шурупами. В центральной зоне кости местное возмущение напряженного состояния локализуется также на кромках, где шуруп входит в кость.

Табл. 10 дает возможность сопоставить два способа фиксации с точки зрения напряженного состояния. Здесь символ «■» означает предпочтительный вариант, т.е. меньший уровень напряжений.

Таблица 10 – Сопоставление по уровню напряжений двух способов фиксации оскольчатого перелома

Способ фиксации Объект	Многоплоскостная		Полноконтактная	
	Фиксатор	Кость	Фиксатор	Кость
Вариант «а»	■	■		
Вариант «б»	■	■		
Вариант «в»			■	■

Выводы. В качестве общего вывода можно утверждать, что с позиций механических аспектов фиксации, в случае оскольчатого перелома, многоплоскостной способ представляется более выгодным и перспективным по сравнению с традиционным полноконтактным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner, T. N. Rapid application fracture fixators – an evaluation of mechanical performance / T. N. Gardner, H. Simpson, J. Kenwright // *Clinical Biomechanics*. – 2001. – Vol. 16. – P. 151–159.
2. Lvov, G. I. Computer-Aided Design of the Shinbone Osteosynthesis / G. I. Lvov, V. G. Sukiasov, V. P. Chaplynskiy // *Proceedings of ICTE 2011 II International Conference on Tissue Engineering*. – Lisbon, Portugal: Ist Press, 2011. – P. 181–188.
3. Weiner, S. Lamellar Bone: Structure–Function Relations / S. Weiner, W. Traub, H. D. Wagner // *J. of Struct. Biology*. – 1999. – Vol. 126. – P. 241–255.
4. Choi, K. The elastic moduli of human subchondral, tra-becular, and cortical bone tissue and the size-dependency of cortical bone modulus / K. Choi [et al.] // *J. Biomech*. – 1990. – No 23(11). – P. 1103–1113.
5. Rho J. Y. Young's modulus of trabecular and cortical bone material: ultrasonic and microtensile measurements / J. Y. Rho, R. B. Ashman, C. H. Turner // *J. Biomech*. – 1993. – Vol. 26(2). – P. 111–119.
6. Березовский, В. А. Биофизические характеристики тканей человека / В. А. Березовский, Н. П. Колотилов. – Киев: Наукова думка, 1990. – 224 с.

Поступила: 31.01.2021

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЙ ВИТКОВ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРУЖИНЫ

¹Докукова Н. А., ²Кафтайкина Е. Н.

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Иностранное общество с ограниченной ответственностью «Плэйтिका Бел», Минск

Рассматриваются напряженно-деформированные состояния витой цилиндрической пружины, состоящей из однородного упругого материала. Этот конструкционный элемент является одним из основных во многих технических устройствах, поскольку принимает участие в гашении вертикальных колебаний и смягчает удары от запредельных внешних сил [1–3]. Пружина обладает несколькими функциональными свойствами. Она обязана обеспечить стабильную поддержку силовых агрегатов и быть оптимально жесткой. С дугой стороны, должна создавать условия для наилучшего гашения вредных вибраций, устойчивой управляемости, плавности движений при перегрузках.

В постановке динамической задачи теории упругости были приняты гипотеза плоского сечения при кручении и изгибе и гипотеза ненадавливания слоев. Получена математическая модель перемещений изгибов соприкасающейся плоскости к виткам и поворотов поперечных сечений проволоки пружины. Представлены аналитические решения и графические зависимости.

Упругая пружина используется во многих отраслях промышленности: нефтегазовой, горной, энергетической, аэрокосмической и др. Представленный аналитический расчет витой цилиндрической пружины имеет методическое значение в учебном процессе, поскольку выведенные законы движений используемых переменных смещения и угла закручивания поперечного сечения весьма полезны для облегчения понимания ее работы. Полученные расчетные уравнения в общем виде могут быть использованы для проектирования виброизоляторов и подвесок автомобилей.

Для формирования системы уравнений движений рассматривается равновесие элемента ds витой цилиндрической пружины с радиусом витка R и радиусом проволоки r , находящегося в сложном нагрузочном режиме, рис. 1, *a* и *б*. В общем случае нагружения пружина испытывает изгиб в своей плоскости, кручение в поперечных сечениях проволоки, продольное и радиальное растяжение – сжатие. При его достаточно больших величинах прикладываемых нагрузок форма пружины может стать неустойчивой. Динамические уравнения движений элемента пружины ds таковы:

$$L_1(x_3) + d_{12}(x_4) = \psi_1 \sin(\eta\varphi) \sin(pt), \quad (1)$$

$$d_{21}(x_3) + L_2(x_4) = \psi_2 \sin(\eta\varphi) \cos(pt). \quad (2)$$

Здесь

$$L_1 = \frac{1}{R} \partial_{\varphi\varphi\varphi\varphi}^4 - \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \partial_{\varphi\varphi}^2 + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \partial_{tt}^2,$$

$$L_2 = -\frac{GJ_k}{EJ_1} \partial_{\varphi\varphi}^2 + 1 + \frac{m_0 R^3 r}{EJ_1} \partial_{tt}^2,$$

$$d_{12} = \left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \partial_{\varphi\varphi}^2 + \frac{m_0 R^3 r}{EJ_1} \partial_{tt}^2,$$

$$d_{21} = \left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \frac{1}{R} \partial_{\varphi\varphi}^2 + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \partial_{tt}^2,$$

η – любое нецелое действительное положительное число, p – частота внешних воздействий на пружину, $F_1(\varphi, t) = \psi_1 \sin(\eta\varphi) \sin(pt)$ и $F_2(\varphi, t) = \psi_2 \sin(\eta\varphi) \cos(pt)$ – внешние нагрузки, количество витков пружины равно 2,5 или $\varphi \in [0, 5\pi]$ рад. на рис. 1, а.

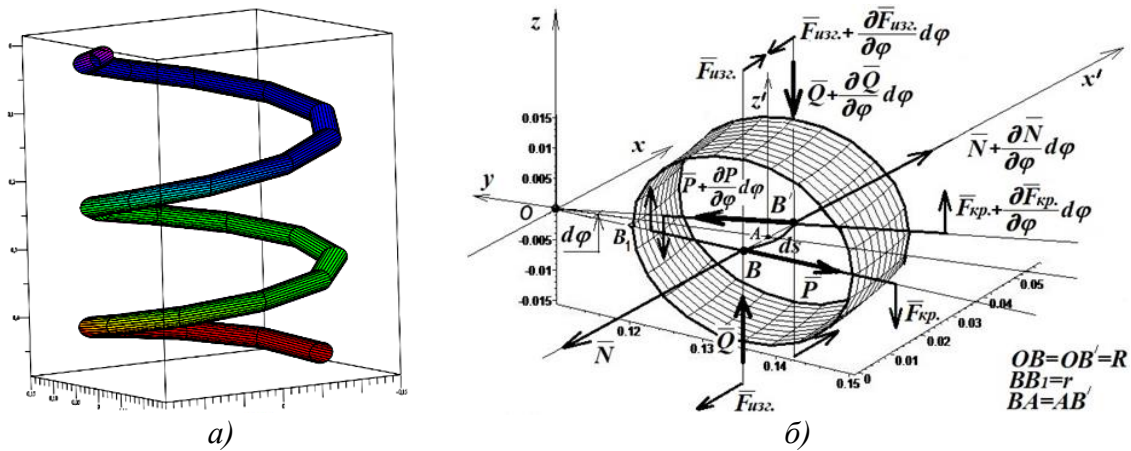


Рис. 1. Пружина с 2,5 витками на (а) и ее бесконечно малый элемент ds с приложенными нагрузками на (б)

Каноническое представление общей системы уравнений динамики напряженно-деформируемого состояния пружины с особым нагрузочным режимом [4, 5]:

$$-\frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^6 x_3}{\partial \varphi^6} + \frac{m_0 R^2 r}{EJ_1} \frac{\partial^6 x_3}{\partial \varphi^4 \partial t^2} - 2 \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^4 x_3}{\partial \varphi^4} - \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \left(1 + \frac{r}{R}\right) \left(1 + 2 \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \frac{\partial^4 x_3}{\partial \varphi^2 \partial t^2} - \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} = W(\varphi, t), \quad (3)$$

$$-\frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^6 x_4}{\partial \varphi^6} + \frac{m_0 R^2 r}{EJ_1} \frac{\partial^6 x_4}{\partial \varphi^4 \partial t^2} - 2 \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^4 x_4}{\partial \varphi^4} - \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \left(1 + \frac{r}{R}\right) \left(1 + 2 \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \frac{\partial^4 x_4}{\partial \varphi^2 \partial t^2} - \frac{GJ_k}{EJ_1 R} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^3}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_4}{\partial t^2} = Q(\varphi, t), \quad (4)$$

где правые части формул (3) и (4)

$$W(\varphi, t) = \left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1} k^2 - p^2 r \frac{m_0 R^3}{EJ_1}\right) \psi_1 \sin(\eta\varphi) \sin(pt) + \left(\left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) k^2 + p^2 r \frac{m_0 R^3}{EJ_1}\right) \psi_2 \sin(\eta\varphi) \cos(pt), \quad (5)$$

$$Q(\varphi, t) = \left(\left(1 + \frac{GJ_k}{EJ_1}\right) \frac{k^2}{R} + p^2 \frac{m_0 R^3}{EJ_1}\right) \psi_1 \sin(\eta\varphi) \sin(pt) + \left(\frac{k^4}{R} + \frac{GJ_k}{EJ_1 R} k^2 - p^2 \frac{m_0 R^3}{EJ_1}\right) \psi_2 \sin(\eta\varphi) \cos(pt). \quad (6)$$

Методом разделения переменных из уравнения, например, (3) получаются два независимых уравнения, при этом $x_3^c(\varphi, t) = X_3(\varphi)T_1(t)$ является решением однородной системы (3), (4),

$$X_3^{(6)} + \left(2 + \frac{r}{R} \lambda\right) X_3^{(4)} + \left(1 - \lambda \left(1 + \frac{r}{R}\right) (1 + 2a_1 R)\right) X_3'' + \lambda X_3 = 0, \quad (7)$$

$$T_1'' + \frac{a_1 \lambda}{a_5} T_1 = 0, \quad (8)$$

где $a_1 = \frac{GJ_k}{EJ_1 R}$, $a_5 = \frac{m_0 R^3}{EJ_1}$, λ – произвольная положительная константа, $\lambda > 0$.

Начальные условия для однородной системы (3), (4)

$$x_3^o(\varphi, 0) = \theta_1(\varphi), \quad x_4^o(\varphi, 0) = \theta_2(\varphi), \quad (9)$$

$$\partial_t(x_3^o(\varphi, 0)) = 0, \quad \partial_t(x_4^o(\varphi, 0)) = 0, \quad (10)$$

и граничные условия неподвижных концов

$$x_3^o(0, t) = 0, \quad \partial_\varphi(x_3^o(0, t)) = 0, \quad (11)$$

$$\partial_{\varphi\varphi}^2(x_3^o(0, t)) = 0, \quad \partial_{\varphi\varphi\varphi}^3(x_3^o(0, t)) = 0, \quad (12)$$

$$x_4^o(0, t) = 0, \quad \partial_\varphi(x_4^o(0, t)) = 0. \quad (13)$$

Здесь θ_1 и θ_2 – некоторые функции, зависящие от переменной φ .

Используем начальные условия для частного решения системы (3), (4)

$$x_3^*(\varphi, 0) = \theta_3 \sin(\eta\varphi), \quad x_4^*(\varphi, 0) = \theta_4 \sin(\eta\varphi), \quad (14)$$

$$\partial_t(x_3^*(\varphi, 0)) = \theta_5 \sin(\eta\varphi), \quad \partial_t(x_4^*(\varphi, 0)) = \theta_6 \sin(\eta\varphi), \quad (15)$$

и граничные, не противоречащие физической сути задачи, для одного закрепленного сечения S и колеблющегося противоположного сечения на другом конце пружины со скоростью v_0 по закону $x_0 \sin(pt + \alpha)$, где $x_0 = v_0/p$

$$x_3^*(0, t) = 0, \quad x_4^*(5\pi, t) = v_0 \sin(pt + \alpha)/p, \quad (16)$$

$$\partial_{\varphi\varphi}^2(x_3^*(0, t)) = 0, \quad \partial_{\varphi\varphi}^2(x_4^*(5\pi, t)) = -v_0 \eta^2 \sin(pt + \alpha)/p, \quad (17)$$

$$x_4^*(0, t) = 0, \quad \partial_\varphi(x_4^*(5\pi, t)) = 0. \quad (18)$$

Объединяя частные решения и решения однородной системы дифференциальных уравнений в частных производных, получим окончательные общие решения задачи (1), (2) в общем виде

$$x_3(\varphi, t) = \cos(p_1 t) (\sigma_1 \cos(\omega_1 \varphi) + \sigma_2 \sin(\omega_1 \varphi) + \sigma_3 \cos(\omega_2 \varphi) + \sigma_4 \sin(\omega_2 \varphi) + \sigma_5 \cos(\omega_3 \varphi) + \sigma_6 \sin(\omega_3 \varphi)) + \left(\frac{q_{11}}{\delta^2 - p^2} \sin(pt) + \frac{q_{12}}{\delta^2 - p^2} \cos(pt) \right) \sin(\eta\varphi), \quad (19)$$

$$x_4(\varphi, t) = \cos(p_1 t) (h_{21} (\sigma_1 \cos(\omega_1 \varphi) + \sigma_2 \sin(\omega_1 \varphi)) + h_{22} (\sigma_3 \cos(\omega_2 \varphi) + \sigma_4 \sin(\omega_2 \varphi)) + h_{23} (\sigma_5 \cos(\omega_3 \varphi) + \sigma_6 \sin(\omega_3 \varphi))) + \left(\frac{q_{21}}{\delta^2 - p^2} \sin(pt) + \frac{q_{22}}{\delta^2 - p^2} \cos(pt) \right) \sin(\eta\varphi). \quad (20)$$

Для численной реализации решений напряженно-деформированного состояния пружины, находящейся в условиях внешнего нагрузочного режима, выберем следующие коэффициенты: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ н/м², $G = 8,0 \cdot 10^{10}$ н/м², $\rho^* = 7,86 \cdot 10^3$ кг/м³, $\mu = 0,35$ – коэффициент Пуассона; $J_1 = 3,21 \cdot 10^{-4}$ м⁴, $J_k = 7,95 \cdot 10^{-8}$ м⁴, $m_0 = 6,897$ кг/м, $R = 0,15$ м, $r = 0,015$ м, $p = 1,8$ рад/с, $\eta = 0,05$, $\theta_1 = 0,2$, $\psi_1 = 10^{-6}$, $\psi_2 = 0,0$, $v_0 = 1,152$ м/с, $\alpha = 0$ рад., угол наклона витков – 15°. Тогда вычисляются параметры: $\lambda = 0,1103311115$, $\omega_1 = 0,5241683003$ рад/с, $\omega_2 = 1,208934347$ рад/с, $\omega_3 = 0,5241740626$ рад/с, $p_1 = 448,3661465$ рад/с.

Численные значения общих решений (19), (20) примут вид:

$$x_3(\varphi, t) = 1016.840644 \cos(448.3661465 t) \sin(0.5241683003 \varphi) + 0.002244434 \cos(448.3661465 t) \sin(1.208934347 \varphi) - 1016.834642 \cos(448.3661465 t) \sin(0.5241740626 \varphi) + 0.639952346 \sin(1.8 t) \sin(0.05 \varphi) \quad (21)$$

$$x_4(\varphi, t) = 1862.729261 \cos(448.3661465 t) \sin(0.5241683003 \varphi) + 0.021867831 \cos(448.3661465 t) \sin(1.208934347 \varphi) - 1862.759219 \cos(448.3661465 t) \sin(0.5241740626 \varphi) + 0.010666876 \sin(1.8 t) \sin(0.05 \varphi) \quad (22)$$

В справедливости полученных решений можно убедиться, если их подставить в уравнения исходной задачи (1), (2) и ее краевые условия (9)–(18) [6–15].

Трехмерное представление напряженно-деформированного состояния витой цилиндрической пружины вследствие вынужденного динамического нагружения представлены на рис. 2, полученные путем использования формул (21) и (22) – законов движений смещения и угла закручивания поперечного сечения проволоки в пакете символьного моделирования Maple. На всех рисунках крайний верхний конец пружины от которого отсчитывается угол φ не меняет своего положения в начале выбранной системы координат $x = 0,15$ м, $y = 0,0$ м, $z = 0,0$ м, $\varphi = 0$ рад., поскольку по условию задачи и ее граничным условиям оно закреплено и неподвижно. На первом рис. 2 в момент времени $t = 0$ с, на остальных показаны развивающиеся вынужденные колебания в последующие моменты времени.

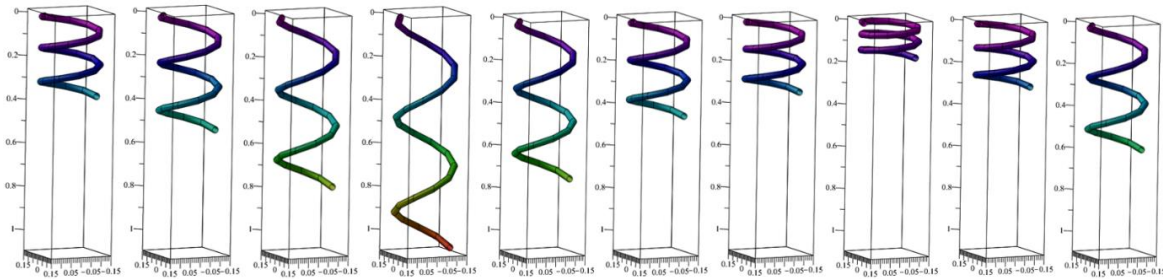


Рис. 2. Пространственные вынужденные колебания цилиндрической пружины со смещениями ее витков в различные моменты времени

Компоненты перемещений в цилиндрической системе координат, с учетом гипотезы плоских сечений, таковы:

$$u_\varphi = 0, \quad u_\rho = \rho - \sqrt{\rho^2 - (x_3(\varphi, t) + r \cos(x_4(\varphi, t)))^2}, \quad u_z = x_3(\varphi, t) + r \cos(x_4(\varphi, t)), \quad (23)$$

здесь r – радиус поперечного сечения проволоки цилиндрической пружины, который равен 0,015 м, ρ – расстояние от неподвижного центра цилиндрической системы координат до поверхности проволоки, поэтому $\rho \in [0,135; 0,165]$ м. При $\rho = 0,15$ м, $\varphi \in [0; 5\pi]$ рад. и $z \in [0; 0,35]$ м кривая линия витой пружины в цилиндрической системе координат описывает среднюю линию.

Компоненты тензора относительной деформации упругого материала пружины: – нормальные

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; \quad (24)$$

– касательные

$$2\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{\rho z} = \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} = 0, \quad 2\varepsilon_{\rho\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}. \quad (25)$$

После подстановки формул (21) и (22) в (23)–(25) получаются графики деформаций в относительных единицах, представленные на рис. 3.

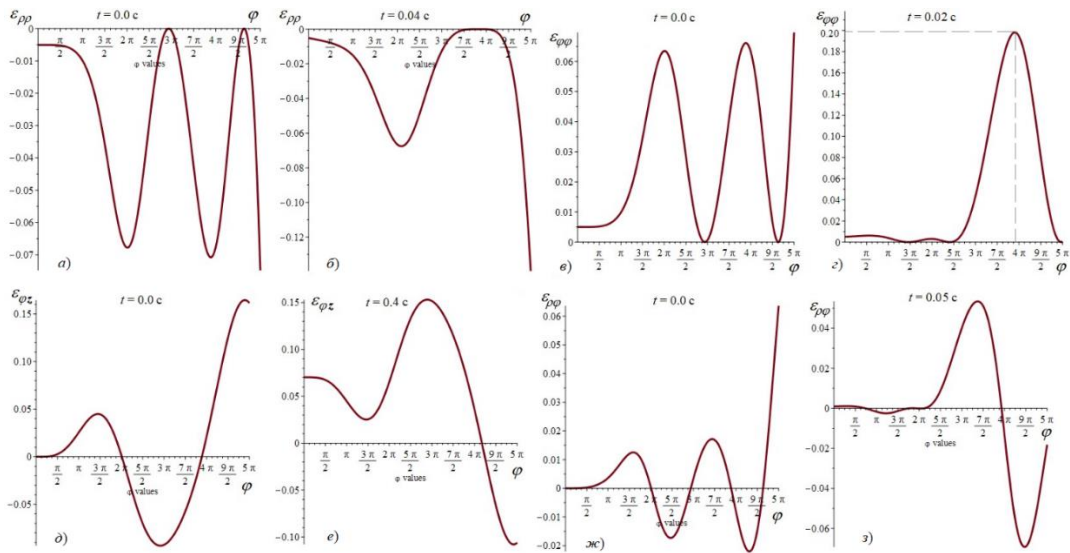


Рис. 3. Деформации цилиндрической пружины на (а), (в), (д) и (ж) в начальный момент времени, на (б), (г), (е) и (з) в различные моменты времени от 0,02 с до 0,4 с

Пространственное напряженно-деформированное состояние цилиндрической пружины, находящейся в сложном нагрузочном режиме показано на рис. 4. Для всех расчетов значительно преувеличены нагрузки за пределами усилиями без учета их критических значений для наилучшего визуального наблюдения в анимационных файлах за движением и сложным напряженно-деформированным состоянием. Силы и моменты превышают величины $5,0 \cdot 10^6$ Н и $5,0 \cdot 10^5$ Нм для стальной пружины диаметром 30 см и радиусом сечения 1,5 см.

Как видно на рис. 4, б поперечное сечение 4π повернуто почти на $2\pi/5$ относительно близлежащего сечения. Произведем простейшие расчеты. Некоторое сечение, находящееся в положении $\varphi = 4\pi$ рад. закручено на угол $\Delta\chi_4(\varphi, t) \approx 2\pi/5$ рад. или чуть меньше четверти окружности по отношению к соседнему. Вычислим на какую долю повернуто исходное сечение или относительную деформацию $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, если целым является полная окружность,

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{|\Delta\chi_4(4\pi, 0.02)|}{2\pi} = 0,2. \quad (26)$$

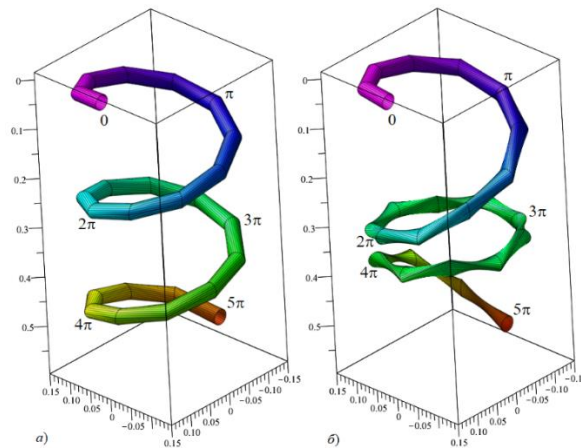


Рис. 4. Пространственное напряженно-деформированное состояние цилиндрической пружины, находящейся в сложном нагрузочном режиме

Сравним этот результат с рис. 3, з при $t = 0,02$ с и $\varphi = 4\pi$ рад. Они практически совпадают.

Выводы. Математическая модель пространственного напряженно-деформированного состояния цилиндрической пружины, находящейся в динамическом сложном

нагрузочном режиме, выведена верно, о чем свидетельствуют сопоставленные величины тензора деформаций (24), (25) и графические явные схемы на рис. 4, полученные на основании аналитических решений (19) и (20) полностью проинтегрированной задачи математической физики относительно неизвестных двухпараметрических функций $x_3(\varphi, t)$ и $x_4(\varphi, t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман, В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
2. Василевич, Ю. В. Механика материалов: учебное пособие / Ю. В. Василевич. – Минск: БНТУ, 2005.
3. Чигарев, А.В. Введение в мехатронику: учебное пособие / А. В. Чигарев, К. Циммерманн, В. А. Чигарев. – Минск: БНТУ, 2013. – 388 с.
4. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
5. Dokukova, N. A. General laws governing in mechanical vibratory systems / N. A. Dokukova, P. N. Konon // JEPT. – 2006. – Vol. 79, No. 4. – P. 824–831.
6. Докукова, Н. А. Метод линеаризации и его применение для анализа нелинейных колебательных систем / Н. А. Докукова, М. Д. Мартыненко // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук. – 1999. – Т. 3. – С. 108–111.
7. Мартыненко, М. Д. О колебательных процессах в механических системах / М. Д. Мартыненко, Н. А. Докукова, Л. И. Бойко // Инженерно-физический журнал. – 1999. – Т. 72(3). – С. 491–494.
8. Dokukova, N. A. Equivalence of the Impedance Method and the Method of Amplitude-Frequency Characteristics for Investigations of Vibrations in Hydraulically Powered Supports / N. A. Dokukova, P. N. Konon // Journal of engineering physics and thermophysics. – 2003. – Vol. 76(6). – P. 1401–1404.
9. Dokukova, N. A. Generalities of passive vibration dampers isolating vibrations / N. A. Dokukova, P. N. Konon // Journal of engineering physics and thermophysics. – 2006. – Vol. 79(2). – P. 412–417.
10. Высоцкий, М. С. Метод исследования механических колебательных систем с помощью дифференциальных операторов / М. С. Высоцкий, Н. А. Докукова, П. Н. Конон // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2006. – Т. 50. – С. 114–119.
11. Dokukova, N. A. Nonnatural vibrations / N. A. Dokukova, P. N. Konon, E. N. Kaftaikina // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2008. – Vol. 81(6). – P. 1191–1196.
12. Dokukova, N. A. / Nonlinear vibrations of hydraulic / N. A. Dokukova, M. D. Martynenko, E. N. Kaftaikina // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2008. – Vol. 81(6). – P. 1197–1200.
13. Dokukova, N. A. General patterns of improper vibrations of dynamical systems with arbitrary number of degrees of freedom / N. A. Dokukova, E. N. Kaftaikina, V. V. Zenkovich // Proceedings of scientific progress – 2011: Proceedings of the 7th International Scientific Conference, Sofia. – 2011. – Vol. 9. – P. 56–64.
14. Kaftaikina, E. N. General characteristic equation of dynamic multielement system / E. N. Kaftaikina [et al.] // Математика. Дифференциальные уравнения. – 2015.
15. Dokukova, N. A. One method for solving the dynamics of bending and twisting of the ring / N. A. Dokukova, E. N. Kaftaikina, P. N. Konon // Математика. – 2015.

Поступила: 31.01.2021

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

¹Миронов Д. Н., ²Чигарев А. В.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²Белорусский государственный университет, Минск

Моделирование, исследование и описание колебаний всех элементов и систем летательного аппарата является сложной и практически не решаемой задачей. Двигатель летательного аппарата можно изучить как колебательную систему с шестью степенями свободы, а таких двигателей может быть и два и четыре. В различных системах имеются насосы, компрессоры, генераторы, гидромоторы и порой не в одном экземпляре. Таким образом колебательная система летательного аппарата представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы, которая будет описываться бесконечным числом дифференциальных уравнений [1]. И понятно, что решить эту систему с бесконечным числом уравнений невозможно.

Поэтому необходимо упростить такую колебательную систему путем наложения ограничений и допущений: замена системы с бесконечным числом степеней свободы на систему с конечным числом степеней свободы, замена нескольких масс одной массой соединенной с соседними одинаковыми стержнями, которые представляют собой упругие связи между элементами [2]. Все элементы и связи в процессе эксплуатации подвергаются различным нагрузкам от которых зависит техническое состояние составных элементов и как следствие ресурс модулей, агрегатов и системы в целом. Все модули и элементы в процессе эксплуатации совершают перемещение, которые изменяют свое значение, вызывают дополнительные напряжения, которые сокращают ресурс составных элементов механической системы и системы в целом.

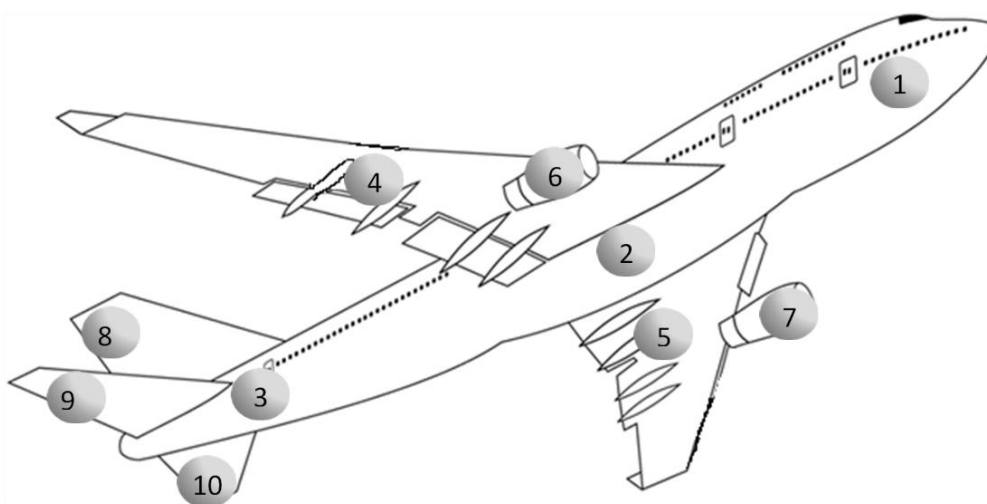


Рис. 1. Замена летательного аппарата массами соединенными стержнями

Одним из наиболее распространенных способов исследования является способ перехода от сложной механической системы к более простой динамической модели, которая по своим свойствам способна заменить исходную системы. При составлении динами-

ческой модели более мелкие детали, агрегаты и элементы заменяются одной массой. Силовое соединение между элементами и модулями представим в виде линий (идеальных стержней) с постоянной жесткостью. Не линейные соединения аппроксимируем в виде линий. Таким образом сложная механическая система изображается в виде материальных масс соединенных линиями (связями).

Рассмотрим транспортный летательный аппарат с двумя двигателями. Фюзеляж летательного аппарата заменим тремя массами (рис. 1): массой 1 заменим носовую часть фюзеляжа, 2 – центральную часть фюзеляжа, 3 – хвостовую часть фюзеляжа. Правую и левую консоль летательного аппарата заменим массами 5 и 4 соответственно. Киль заменим массой 8, а стабилизаторы – массами 9 и 10. Все массы соединим жесткими стержнями. Стержнями представим и три опоры летательного аппарата.

В результате описанных выше преобразований модель летательного аппарата с двумя двигателями можно представить моделью представленной на рис. 2. Где I_1 – момент инерции носовой части фюзеляжа, I_2 – момент инерции центральной части фюзеляжа, I_3 – момент инерции хвостовой части фюзеляжа, I_4 – момент инерции левой консоли, I_5 – момент инерции правой консоли, I_6 – момент инерции левого двигателя, I_7 – момент инерции правого двигателя, I_8 – момент инерции вертикального оперения, I_9 и I_{10} – момент инерции горизонтального оперения; а e_{12} , e_{23} , e_{24} , e_{25} , e_{46} , e_{57} , e_{38} , e_{39} , e_{310} – податливость соответствующих соединений между модулями и элементами.

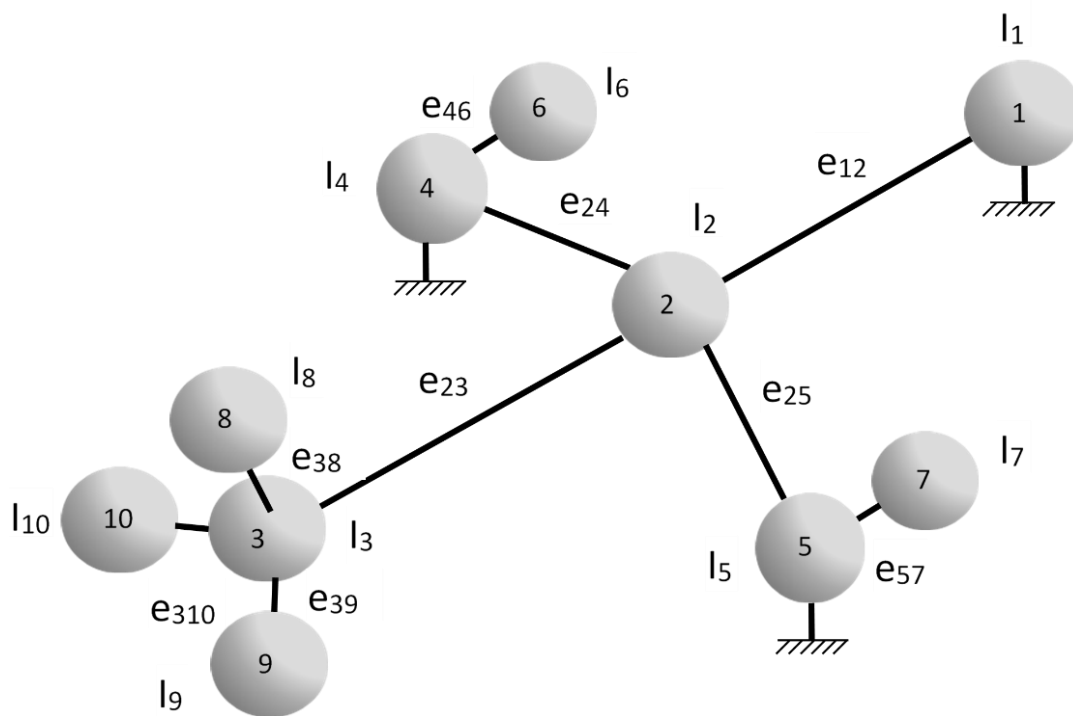


Рис. 2. Модель летательного аппарата с двумя двигателями

Составим математическую модель летательного аппарата, представленного на рис. 2 опираясь на уравнения Лагранжа второго рода [2, 3]:

$$\left\{ \begin{array}{l}
I_1 \ddot{\varphi}_1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{e_{12}} = Q_1; \\
I_2 \ddot{\varphi}_2 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{e_{12}} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{e_{23}} + \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{e_{24}} + \frac{\varphi_2 - \varphi_5}{e_{25}} = Q_2; \\
I_3 \ddot{\varphi}_3 - \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{e_{23}} + \frac{\varphi_3 - \varphi_8}{e_{38}} + \frac{\varphi_3 - \varphi_9}{e_{39}} + \frac{\varphi_3 - \varphi_{10}}{e_{310}} = Q_3; \\
I_4 \ddot{\varphi}_4 - \frac{\varphi_6 - \varphi_4}{e_{46}} + \frac{\varphi_4 - \varphi_2}{e_{24}} = Q_4; \\
I_5 \ddot{\varphi}_5 - \frac{\varphi_7 - \varphi_5}{e_{57}} + \frac{\varphi_5 - \varphi_2}{e_{25}} = Q_5; \\
I_6 \ddot{\varphi}_6 + \frac{\varphi_6 - \varphi_4}{e_{46}} = Q_6; \\
I_7 \ddot{\varphi}_7 + \frac{\varphi_7 - \varphi_5}{e_{57}} = Q_7; \\
I_8 \ddot{\varphi}_8 + \frac{\varphi_8 - \varphi_3}{e_{38}} = Q_8; \\
I_9 \ddot{\varphi}_9 + \frac{\varphi_9 - \varphi_3}{e_{39}} = Q_9; \\
I_{10} \ddot{\varphi}_{10} + \frac{\varphi_{10} - \varphi_3}{e_{310}} = Q_{10}.
\end{array} \right. \quad (1)$$

где $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}$ – внешние обобщенные силы и моменты, а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10}$ – угловые отклонения масс (кручение стержней).

Рассмотрим случай, когда на систему не воздействуют внешние факторы (силы и моменты). В таком случае правые части уравнений системы (1) равны нулю.

Разделим правые и левые части уравнений системы (1) на соответствующие моменты инерции I_i , где $i \in [1, 10]$ и обозначим $\varphi_1 - \varphi_2 = x_{12}$, $\varphi_2 - \varphi_3 = x_{23}$, $\varphi_2 - \varphi_4 = x_{24}$, $\varphi_2 - \varphi_5 = x_{25}$, $\varphi_3 - \varphi_8 = x_{38}$, $\varphi_3 - \varphi_9 = x_{39}$, $\varphi_3 - \varphi_{10} = x_{310}$, $\varphi_6 - \varphi_4 = x_{64}$, $\varphi_7 - \varphi_5 = x_{75}$, тогда

$$\left\{ \begin{array}{l}
\ddot{\varphi}_1 + \frac{x_{12}}{e_{12}I_1} = 0; \\
\ddot{\varphi}_2 - \frac{x_{12}}{e_{12}I_2} + \frac{x_{23}}{e_{23}I_2} + \frac{x_{24}}{e_{24}I_2} + \frac{x_{25}}{e_{25}I_2} = 0; \\
\ddot{\varphi}_3 - \frac{x_{23}}{e_{23}I_3} + \frac{x_{38}}{e_{38}I_3} + \frac{x_{39}}{e_{39}I_3} + \frac{x_{310}}{e_{310}I_3} = 0; \\
\ddot{\varphi}_4 - \frac{x_{64}}{e_{46}I_4} - \frac{x_{24}}{e_{24}I_4} = 0; \\
\ddot{\varphi}_5 - \frac{x_{75}}{e_{57}I_5} - \frac{x_{25}}{e_{25}I_5} = 0; \\
\ddot{\varphi}_6 + \frac{x_{64}}{e_{46}I_6} = 0; \\
\ddot{\varphi}_7 + \frac{x_{75}}{e_{57}I_7} = 0; \\
\ddot{\varphi}_8 - \frac{x_{38}}{e_{38}I_8} = 0; \\
\ddot{\varphi}_9 - \frac{x_{39}}{e_{39}I_9} = 0; \\
\ddot{\varphi}_{10} - \frac{x_{310}}{e_{310}I_{10}} = 0.
\end{array} \right. \quad (2)$$

Обозначим $\varphi_1 - \varphi_2 = x_{12}$, $\varphi_2 - \varphi_3 = x_{23}$, $\varphi_2 - \varphi_4 = x_{24}$, $\varphi_2 - \varphi_5 = x_{25}$, $\varphi_3 - \varphi_8 = x_{38}$, $\varphi_3 - \varphi_9 = x_{39}$, $\varphi_3 - \varphi_{10} = x_{310}$, $\varphi_6 - \varphi_4 = x_{64}$, $\varphi_7 - \varphi_5 = x_{75}$, тогда из обозначений следует, что $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{x}_{12} + \ddot{\varphi}_2$, $\ddot{\varphi}_2 = \ddot{x}_{23} + \ddot{\varphi}_3$, $\ddot{\varphi}_3 = \ddot{x}_{38} + \ddot{\varphi}_8$, $\ddot{\varphi}_4 = \ddot{\varphi}_2 - \ddot{x}_{24}$, $\ddot{\varphi}_5 = \ddot{\varphi}_2 - \ddot{x}_{25}$, $\ddot{\varphi}_6 = \ddot{x}_{64} + \ddot{\varphi}_4$, $\ddot{\varphi}_7 = \ddot{x}_{75} + \ddot{\varphi}_5$, $\ddot{\varphi}_8 = \ddot{\varphi}_3 - \ddot{x}_{38}$, $\ddot{\varphi}_9 = \ddot{\varphi}_3 - \ddot{x}_{39}$, $\ddot{\varphi}_{10} = \ddot{\varphi}_3 - \ddot{x}_{310}$. Вычтя из первого уравнения 2 второе, из второго – третье, из третьего – восьмое, из четвертого – второе, из пятого – второе, из шестого – четвертое, из седьмого – пятое, из восьмого – третье, из девятого – третье, из десятого – третье, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_{12} + \frac{x_{12}}{e_{12}l_2} - \frac{x_{23}}{e_{23}l_2} - \frac{x_{24}}{e_{24}l_2} - \frac{x_{25}}{e_{25}l_2} + \frac{x_{12}}{e_{12}l_1} = 0; \\ \ddot{x}_{23} + \frac{x_{23}}{e_{23}l_3} - \frac{x_{38}}{e_{38}l_3} - \frac{x_{39}}{e_{39}l_3} - \frac{x_{310}}{e_{310}l_3} - \frac{x_{12}}{e_{12}l_2} + \frac{x_{23}}{e_{23}l_2} + \frac{x_{24}}{e_{24}l_2} + \frac{x_{25}}{e_{25}l_2} = 0; \\ \ddot{x}_{38} + \frac{x_{38}}{e_{38}l_8} - \frac{x_{23}}{e_{23}l_3} + \frac{x_{38}}{e_{38}l_3} + \frac{x_{39}}{e_{39}l_3} + \frac{x_{310}}{e_{310}l_3} = 0; \\ -\ddot{x}_{24} + \frac{x_{12}}{e_{12}l_2} - \frac{x_{23}}{e_{23}l_2} - \frac{x_{24}}{e_{24}l_2} - \frac{x_{25}}{e_{25}l_2} - \frac{x_{64}}{e_{46}l_4} - \frac{x_{24}}{e_{24}l_4} = 0; \\ -\ddot{x}_{25} + \frac{x_{12}}{e_{12}l_2} - \frac{x_{23}}{e_{23}l_2} - \frac{x_{24}}{e_{24}l_2} - \frac{x_{25}}{e_{25}l_2} - \frac{x_{75}}{e_{57}l_5} - \frac{x_{25}}{e_{25}l_5} = 0; \\ \ddot{x}_{64} + \frac{x_{64}}{e_{46}l_4} + \frac{x_{24}}{e_{42}l_4} + \frac{x_{64}}{e_{46}l_6} = 0; \\ \ddot{x}_{75} + \frac{x_{75}}{e_{57}l_5} + \frac{x_{25}}{e_{52}l_5} + \frac{x_{75}}{e_{57}l_7} = 0; \\ -\ddot{x}_{38} + \frac{x_{23}}{e_{23}l_3} - \frac{x_{38}}{e_{38}l_3} - \frac{x_{39}}{e_{39}l_3} - \frac{x_{310}}{e_{310}l_3} - \frac{x_{38}}{e_{38}l_8} = 0; \\ -\ddot{x}_{39} + \frac{x_{23}}{e_{23}l_3} - \frac{x_{38}}{e_{38}l_3} - \frac{x_{39}}{e_{39}l_3} - \frac{x_{310}}{e_{310}l_3} - \frac{x_{39}}{e_{39}l_9} = 0; \\ -\ddot{x}_{310} + \frac{x_{23}}{e_{23}l_3} - \frac{x_{38}}{e_{38}l_3} - \frac{x_{39}}{e_{39}l_3} - \frac{x_{310}}{e_{310}l_3} - \frac{x_{310}}{e_{310}l_{10}} = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Анализируя систему 3 видим, что третье и восьмое уравнения одинаковые. А значит третье уравнение можно исключить из системы и приведем подобные слагаемые. В результате получим систему 4, в которой стало на одно уравнение меньше, что значительно упрощает ее решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_{12} + \left(\frac{1}{e_{12}l_2} + \frac{1}{e_{12}l_1} \right) x_{12} - \frac{x_{23}}{e_{23}l_2} - \frac{x_{24}}{e_{24}l_2} - \frac{x_{25}}{e_{25}l_2} = 0; \\ \ddot{x}_{23} + \left(\frac{1}{e_{23}l_3} + \frac{1}{e_{23}l_2} \right) x_{23} - \frac{x_{38}}{e_{38}l_3} - \frac{x_{39}}{e_{39}l_3} - \frac{x_{310}}{e_{310}l_3} - \frac{x_{12}}{e_{12}l_2} + \frac{x_{24}}{e_{24}l_2} + \frac{x_{25}}{e_{25}l_2} = 0; \\ -\ddot{x}_{24} - \left(\frac{1}{e_{24}l_2} + \frac{1}{e_{24}l_4} \right) x_{24} + \frac{x_{12}}{e_{12}l_2} - \frac{x_{23}}{e_{23}l_2} - \frac{x_{25}}{e_{25}l_2} - \frac{x_{64}}{e_{46}l_4} = 0; \\ -\ddot{x}_{25} - \left(\frac{1}{e_{25}l_2} + \frac{1}{e_{25}l_5} \right) x_{25} + \frac{x_{12}}{e_{12}l_2} - \frac{x_{23}}{e_{23}l_2} - \frac{x_{24}}{e_{24}l_2} - \frac{x_{75}}{e_{57}l_5} = 0; \\ \ddot{x}_{64} + \left(\frac{1}{e_{46}l_4} + \frac{1}{e_{46}l_6} \right) x_{64} + \frac{x_{24}}{e_{42}l_4} = 0; \\ \ddot{x}_{75} + \left(\frac{1}{e_{57}l_5} + \frac{1}{e_{57}l_7} \right) x_{75} + \frac{x_{25}}{e_{52}l_5} = 0; \\ -\ddot{x}_{38} - \left(\frac{1}{e_{38}l_3} + \frac{1}{e_{38}l_8} \right) x_{38} + \frac{x_{23}}{e_{23}l_3} - \frac{x_{39}}{e_{39}l_3} - \frac{x_{310}}{e_{310}l_3} = 0; \\ -\ddot{x}_{39} - \left(\frac{1}{e_{39}l_3} + \frac{1}{e_{39}l_9} \right) x_{39} + \frac{x_{23}}{e_{23}l_3} - \frac{x_{38}}{e_{38}l_3} - \frac{x_{310}}{e_{310}l_3} = 0; \\ -\ddot{x}_{310} - \left(\frac{1}{e_{310}l_3} + \frac{1}{e_{310}l_{10}} \right) x_{310} + \frac{x_{23}}{e_{23}l_3} - \frac{x_{38}}{e_{38}l_3} - \frac{x_{39}}{e_{39}l_3} = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Механическая система представленная на рис. 2, находится в состоянии покоя (все системы и агрегаты не функционируют). Единственным внешним воздействием будет удар под воздействием, которого система будет совершать колебания, описанные системой уравнений (4). Механические колебания, как правило, являются гармоническими: протекающими по законам косинуса или синуса. Поэтому положим, что $x_i = A_i \cos(\omega_i t)$, $\ddot{x}_i = A_i \omega_i^2 \cos(\omega_i t)$. Подставив значения соответствующих значений x_i и \ddot{x}_i в систему уравнений при условии, что $k_{122} = \frac{1}{e_{12}l_2}$, $k_{121} = \frac{1}{e_{12}l_1}$, $k_{232} = \frac{1}{e_{23}l_2}$, $k_{242} = \frac{1}{e_{24}l_2}$, $k_{252} = \frac{1}{e_{25}l_2}$, $k_{233} = \frac{1}{e_{23}l_3}$, $k_{383} = \frac{1}{e_{38}l_3}$, $k_{393} = \frac{1}{e_{39}l_3}$, $k_{3103} = \frac{1}{e_{310}l_3}$, $k_{244} = \frac{1}{e_{24}l_4}$, $k_{464} = \frac{1}{e_{46}l_4}$, $k_{255} = \frac{1}{e_{25}l_5}$, $k_{575} = \frac{1}{e_{57}l_5}$, $k_{466} = \frac{1}{e_{46}l_6}$, $k_{424} = \frac{1}{e_{42}l_4}$, $k_{577} = \frac{1}{e_{57}l_7}$, $k_{525} = \frac{1}{e_{52}l_5}$, $k_{388} = \frac{1}{e_{38}l_8}$, $k_{399} = \frac{1}{e_{39}l_9}$, $k_{31010} = \frac{1}{e_{310}l_{10}}$ система примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
-A_{12} \omega_{12}^2 \cos(\omega_{12}t) + (k_{122} + k_{121})A_{12} \cos(\omega_{12}t) - k_{232}A_{23} \cos(\omega_{23}t) - \\
-k_{242}A_{24} \cos(\omega_{24}t) - k_{252}A_{25} \cos(\omega_{25}t) = 0; \\
-A_{23} \omega_{23}^2 \cos(\omega_{23}t) + (k_{233} + k_{232})A_{23} \cos(\omega_{23}t) - k_{383}A_{38} \cos(\omega_{38}t) - \\
-k_{393}A_{39} \cos(\omega_{39}t) - k_{3103}A_{310} \cos(\omega_{310}t) - k_{122}A_{12} \cos(\omega_{12}t) + \\
+k_{242}A_{24} \cos(\omega_{24}t) + k_{252}A_{25} \cos(\omega_{25}t) = 0; \\
A_{24} \omega_{24}^2 \cos(\omega_{24}t) - (k_{242} + k_{244})A_{24} \cos(\omega_{24}t) + k_{122}A_{12} \cos(\omega_{12}t) - \\
-k_{232}A_{23} \cos(\omega_{23}t) - k_{252}A_{25} \cos(\omega_{25}t) - k_{464}A_{64} \cos(\omega_{64}t) = 0; \\
A_{25} \omega_{25}^2 \cos(\omega_{25}t) - (k_{252} + k_{255})A_{25} \cos(\omega_{25}t) + k_{122}A_{12} \cos(\omega_{12}t) - \\
-k_{232}A_{23} \cos(\omega_{23}t) - k_{242}A_{24} \cos(\omega_{24}t) - k_{575}A_{75} \cos(\omega_{75}t) = 0; \\
-A_{64} \omega_{64}^2 \cos(\omega_{64}t) + (k_{464} + k_{466})A_{64} \cos(\omega_{64}t) + k_{424}A_{24} \cos(\omega_{24}t) = 0; \\
-A_{75} \omega_{75}^2 \cos(\omega_{75}t) + (k_{575} + k_{577})A_{75} \cos(\omega_{75}t) + k_{525}A_{25} \cos(\omega_{25}t) = 0; \\
A_{38} \omega_{38}^2 \cos(\omega_{38}t) - (k_{383} + k_{388})A_{38} \cos(\omega_{38}t) + k_{233}A_{23} \cos(\omega_{23}t) - \\
-k_{393}A_{39} \cos(\omega_{39}t) - k_{3103}A_{310} \cos(\omega_{310}t) = 0; \\
A_{39} \omega_{39}^2 \cos(\omega_{39}t) - (k_{393} + k_{399})A_{39} \cos(\omega_{39}t) + k_{233}A_{23} \cos(\omega_{23}t) - \\
-k_{383}A_{38} \cos(\omega_{38}t) - k_{3103}A_{310} \cos(\omega_{310}t) = 0; \\
A_{310} \omega_{310}^2 \cos(\omega_{310}t) - (k_{3103} + k_{31010})A_{310} \cos(\omega_{310}t) + k_{233}A_{23} \cos(\omega_{23}t) - \\
-k_{383}A_{38} \cos(\omega_{38}t) - k_{393}A_{39} \cos(\omega_{39}t) = 0.
\end{array} \right. \quad (5)$$

Используя систему уравнений (5) можно определить амплитуду и частоту колебаний для каждой массы, которая представляет собой модуль летательного аппарата. Предположим, что колебания системы будут свободными и допустим, что $A_{64} = A_{75} = A_{310} = A_{39} = A_{38} = A_{25} = A_{24} = A_{23} = A_{12} = A$ и $\omega_{310} = \omega_{75} = \omega_{64} = \omega_{39} = \omega_{38} = \omega_{25} = \omega_{24} = \omega_{23} = \omega_{12} = \omega$ и разделив правую и левую части уравнений системы (5) на $A \cos(\omega t)$ получим:

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\omega^2 + (k_{122} + k_{121}) - k_{232} - k_{242} - k_{252} = 0; \\
-\omega^2 + (k_{233} + k_{232}) - k_{383} - k_{393} - \\
-k_{3103} - k_{122} + k_{242} + k_{252} = 0; \\
\omega^2 - (k_{242} + k_{244}) + k_{122} - k_{232} - k_{252} - k_{464} = 0; \\
\omega^2 - (k_{252} + k_{255}) + k_{122} - k_{232} - k_{242} - k_{575} = 0; \\
-\omega^2 + (k_{464} + k_{466}) + k_{424} = 0; \\
-\omega^2 + (k_{575} + k_{577}) + k_{525} = 0; \\
\omega^2 - (k_{383} + k_{388}) + k_{233} - k_{393} - k_{3103} = 0; \\
\omega^2 - (k_{393} + k_{399}) + k_{233} - k_{383} - k_{3103} = 0; \\
\omega^2 - (k_{3103} + k_{31010}) + k_{233} - k_{383} - k_{393} = 0.
\end{array} \right. \quad (6)$$

В системе (6) получены уравнения из которых можно выразить и найти значения ω и k_i . В реальности не возможен случай свободных колебаний с постоянными амплитудами и частотами всех составных элементов сложной механической системы. Но приравняв любые из уравнений системы (6) по ω^2 получаем равенство сумм k_i , которые зависят от моментов инерции составных элементов и податливости их соединений. Для примера приравняем два первых уравнения системы (6)

$$\begin{aligned}
& -k_{233} - 2k_{232} + k_{383} + k_{393} + k_{3103} + 2k_{122} - \\
& -2k_{242} - 2k_{252} + k_{121} = 0.
\end{aligned} \quad (7)$$

Выводы. В результате получено уравнение, связывающее моменты инерции и податливость составных элементов системы. Такие зависимости позволяют оптимально подобрать размеры, массу и материал составных элементов сложных механических систем.

Полученная система дифференциальных уравнений (6) позволяет определить параметры собственных колебаний элементов сложной механической системы по изменениям которых можно оценить изменение ее технического состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вибродиагностика / Ф. Я. Балицкий [и др.]. – М.: Машиностроение, 2005. – Т. 7, Кн. 2. – 828 с.
2. Микулик, Н. А. Основы теории динамических систем транспортных средств: монография / Н. А. Микулик. – Мн.: БНТУ, 2007. – 218 с.
3. Добронравов, В. В. Курс теоретической механики : учебник для вузов / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин, А. Л. Дворников. – М.: Высшая школа, 1974. – 3-е изд., перераб. – 528 с.

Поступила: 02.02.2021

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМАЦИОННЫХ СОСТОЯНИЙ ТКАНЕЙ ЗУБА В СИСТЕМАХ «ЗУБ–ВОЛНОВОД» И «ЗУБ–ВОЛНОВОД–ПЛОМБА»

¹Костецкий Ю. А., ²Савченко А. Л., ³Рубникович А. С.

¹Белорусская медицинская академия последипломного образования, Минск

²Белорусский национальный технический университет, Минск

³Белорусский государственный медицинский университет, Минск

Многие врачи стоматологи считают, что успех лечения осложненного кариеса связан с необходимостью дальнейшего совершенствования материалов и методов качественной герметизации системы корневого канала [1]. Современная наука для эндодонтического лечения зубов предлагает большой арсенал пломбировочных материалов, призванных обеспечить герметизацию корневого канала [2]. Однако большой клинический опыт отечественных и зарубежных стоматологов свидетельствует о высоком проценте неудач эндодонтического лечения [3] по причине нарушения стабильности и долговечности корневой пломбы [4, 5, 6].

Данная работа посвящена изучению целесообразности и перспективности использования низкочастотного ультразвука при пломбировании корневых каналов зубов, а также исследованию эффективности эндодонтического лечения зубов при помощи низкочастотного ультразвука.

Метод конденсации эндодонтических пломбировочных материалов при помощи низкочастотного ультразвука с высокой долей вероятности может быть использован в практическом здравоохранении для эндодонтического лечения зубов. Исследуемые физико-химические свойства низкочастотного ультразвука позволяют гомогенно пломбировать корневой канал, пломбировать мелкие латеральные каналы. В особенности, интенсивные колебательные движения с большими ускорениями частиц, позволяют компонентам пломбировочного материала (силера) проникать в пористую структуру дентина (эффект насыщения поверхности), улучшая адаптацию и адгезию пломбировочного материала к стенкам корня, тем самым, предохраняя внутреннюю полость канала корня зуба от проникновения со стороны тканей периодонта жидкости [7, 8, 9].

Поэтому, используя положительные свойства низкочастотного ультразвука для пломбировки корневых каналов зубов можно уменьшить риск развития осложнений в тканях периодонта и сохранить функциональную эффективность зуба.

Совместно с кафедрой «Конструирование и производство приборов» БНТУ было разработано устройство для ультразвуковой пломбировки корневых каналов зубов (рис. 1). Предложенный нами способ пломбирования корневых каналов зубов позволяет гомогенно запломбировать корневой канал. Низкочастотный ультразвук позволяет компонентам пломбировочного материала (силера) проникать в пористую структуру дентина (эффект насыщения поверхности), пломбуя мелкие латеральные каналы, улучшает адаптацию и адгезию пломбировочного материала к стенкам корня. Предохраняя полость корня от микропротечек со стороны тканей периодонта в дальнейшем, низкочастотный ультразвук позволяет быстро и качественно запломбировать канал корня зуба.

Для исследования напряженно-деформационного состояния (НДС) тканей зуба при использовании низкочастотного ультразвука и для обоснования его применения была построена математическая двухмерная модель депульпированного резца нижней челюсти (рис. 2). Построение математической модели резца проводилось с учетом анатомо-топографического строения зуба.

Модель зуба представляется в виде цилиндроконической формы с конусным отверстием.



Рис. 1. Модель генератора и наконечника для низкочастотных продольных и поперечных ультразвуковых колебаний

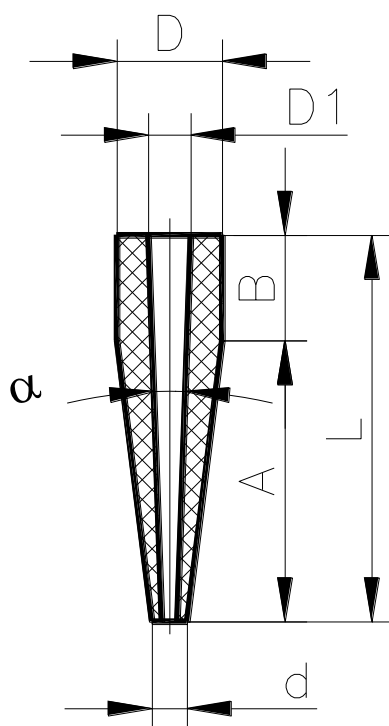


Рис. 2. Модель корня зуба

Физико-механические свойства материалов [10, 11], принятые для расчетов, представлены в табл. 1.

Модель построена в условиях жесткого закрепления корня зуба в альвеоле посредством периодонта, упругие свойства которого считались незначительными. Механические свойства тканей, составляющих резец, предполагались однородными, изотропными и линейно упругими. Механические свойства аппроксимировались набором констант теории упругости: модуль Юнга (E), коэффициент Пуассона (ν), предельные напряжения при сжатии (σ).

Численные расчеты НДС были проведены при условии генерации низкочастотных колебаний на ткани корня зуба без пломбирочного материала, а также при условии пломбирования корневого канала зуба гуттаперчей и корневыми силерами.

Таблица 1 – Показатели механических свойств, составляющих математической модели

Материалы	Модуль Юнга, ГПа	Прочность при сжатии, кг/мм ²	Коэффициент Пуассона
Эмаль	41,0	38,0	0,3
Дентин	18,6	16,7	0,31
Периодонт	0,0689	20,0	0,45
Гуттаперча	0,00069	–	0,45
Титан	102,0	–	0,3
Стеклоиономерный цемент	21	31,2	0,35
Цинкоксидэвгенол содержащая паста	4,6	11,8	0,31
Силер на основе эпоксидной смолы	7,1	23,4	0,28

Задача расчета – определение максимальных напряжений σ в твердых тканях зуба и в пломбировочном материале.

Модель построена в условиях жесткого закрепления корня зуба в альвеоле посредством периодонта, упругие свойства которого считались незначительными. Механические свойства тканей, составляющих резец, предполагались однородными, изотропными и линейно упругими. Механические свойства аппроксимировались набором констант теории упругости: модуль Юнга (E), коэффициент Пуассона (ν), предельные напряжения при сжатии (σ).

Численные расчеты НДС были проведены при условии генерации низкочастотных колебаний на ткани корня зуба без пломбировочного материала, а также при условии пломбирования корневого канала зуба гуттаперчей и корневыми силерами.

Задача расчета – определение максимальных напряжений σ в твердых тканях зуба и в пломбировочном материале.

Изучалось введение волновода на всю длину корневого канала зуба с учетом его анатомического строения.

Рассматривались следующие варианты параметров взаимодействия волновода (эндодонтического инструмента) с зубом:

1) волновод контактирует с каналом непосредственно при глубине погружения в корневой канал на $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ его длины;

2) волновод контактирует с твердыми тканями внутренних стенок канала через пломбировочный материал при глубине погружения в корневой канал на $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ его длины.

При анализе НДС прикладывались нагрузки, направленные вдоль продольной оси зуба.

1 случай: исследование напряженно-деформационного состояния (НДС) тканей зуба [12] в системах «зуб-волновод»:

$$\sigma_r = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right); \quad (1)$$

$$\sigma_t = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right); \quad (2)$$

$$\sigma_z = \frac{F \cos \alpha}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}, \quad (3)$$

где p – давление на стенки канала, $p = \frac{F \sin \frac{\alpha}{2}}{S}$, F – сила, действующая на инструмент; S – площадь канала:

$$S = \frac{\pi L}{\cos \frac{\alpha}{2}} \left(D_1 - L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = 90,76 \text{ мм}^2, \quad (4)$$

r_1 – внутренний радиус канала, r_2 – наружный радиус канала.

$$p = 192,3F \text{ Па} = 115 \text{ Па}.$$

По энергетической теории прочности:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_z - \sigma_t)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2}. \quad (5)$$

Сила F является пульсирующей, так как создается статической нагрузкой $P_{\text{ст}}$ и ультразвуковыми колебаниями. Ее можно определить как $F = 2P_{\text{ст}}D = 29,4P_{\text{ст}} = 0,6 \text{ Н}$ [13], где D – безразмерный коэффициент:

$$D = 1 + \beta/C, \quad C = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\alpha + \beta)}}{2(1 + \alpha/\beta)}, \quad (6)$$

где α и β – безразмерные коэффициенты,

$$\alpha = \frac{m v_1^2 c}{4P_{\text{cm}}^2}, \quad \beta = \frac{A_0 m \omega_{\text{ак}} v_1 c}{\pi P_{\text{cm}}^2}, \quad (7)$$

где $m = 1 \text{ г}$ – масса колеблющейся части инструмента, v_1 – скорость инструмента в момент контакта со стенками канала, $v_1 = 2\sqrt{g(A_0 - 2P_{\text{cm}}/c)}$, $v_1 = 0,0198 \text{ м/с}$ ($P_{\text{ст}} = 0,02 \text{ Н}$), c – жесткость зуба при сжатии, $c = 10^7 \text{ Н/м}$, A_0 – амплитуда ультразвуковых колебаний (составляющая, направленная перпендикулярно стенкам канала), $\omega_{\text{ак}}$ – угловая частота ультразвуковых колебаний, равная 22 кГц . Величину A_0 можно определить как $A_0 = A_a \sin \frac{\alpha}{2} + A_r \cos \frac{\alpha}{2}$, где $A_a = 2 \text{ мкм}$ и $A_r = 10 \text{ мкм}$ – осевая и радиальная составляющая ультразвуковых колебаний. Статическая нагрузка является радиальной составляющей статической силы, действующей на инструмент: $P_{\text{cm}} = P \sin \frac{\alpha}{2}$ (при $P = 1 \text{ Н}$ $P_{\text{ст}} = 0,02 \text{ Н}$).

Для расчета НДС в формулу (5) подставляются значения, вычисленные по приведенным формулам, величины r_1 и r_2 изменяются в зависимости от координаты сечения по высоте зуба, радиус r принимается равным r_1 , так как максимальными будут напряжения на внутренних стенках канала.

Результаты расчета приведены на рис. 3, где максимальные значения напряженно-деформационного состояния (НДС) тканей зуба определялись на выходе из корневого канала и составили 377 840 Па .



Рис. 3. Расчет изменения напряжений на стенки канала при введении волновода на глубину от 0 мм до 18 мм без пломбировочного материала

2 случай: исследование напряженно-деформационного состояния (НДС) тканей зуба [12] в системах «зуб-волновод-пломба»:

$$\sigma_r = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{pr_1^2 r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} = \frac{pr_1^2 (r^2 - r_2^2)}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}, \quad (8)$$

$$\sigma_t = \frac{pr_1^2 (r^2 + r_2^2)}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}. \quad (9)$$

Давление p создается ультразвуковой волной (акустическое давление) и определяется по методике [14]:

$$p = \frac{\gamma + 1}{8} \rho_0 v_0^2, \quad (10)$$

где $\gamma = 2,5$ – показатель политропы для пломбировочной массы, $\rho_0 = 1600 \text{ кг/м}^3$ – плотность пломбировочной массы, v_0 – скорость частиц пломбировочной массы на поверхности инструмента:

$$\begin{aligned} v_{0max} &= A_0 \cdot 2\pi f = 1,38 \text{ м/с.} \\ p &= 966 \text{ Па.} \end{aligned} \quad (11)$$

Результаты расчета приведены на рис. 4, где максимальные значения напряженно-деформационного состояния (НДС) тканей зуба определялись на выходе из корневого канала и составили 2 517 Па.

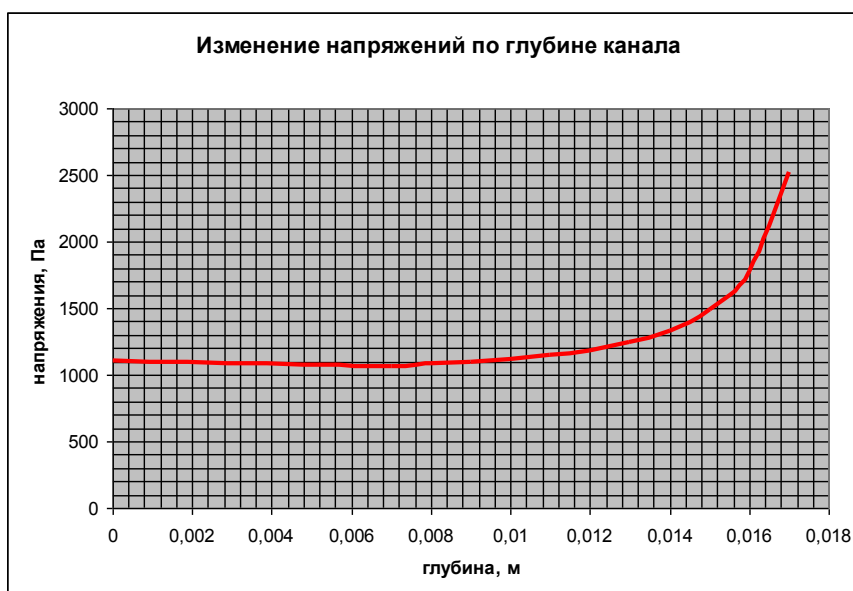


Рис. 4. Расчет изменения напряжений на стенки канала через пломбировочный материал при введении волновода на глубину от 0 мм до 18 мм

Выводы. Учитывая, что рассчитанные напряжения могут действовать совместно, результирующее НДС напряжений будет равно их сумме и составит 380 357 Па. Допускаемые напряжения для зубной ткани дентина корня составляют около 10 МПа, то есть запас по прочности зуба составляет 26,3 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровский, Е. В. Отказ от пломбирования корневого канала методом одной пасты – неотложная задача эндодонтии / Е. В. Боровский, Л. Ю. Мылзенова // Клинич. стоматология. – 2000. – № 4. – С. 18–20.
2. Beer, R. Klinische Untersuchung der Guttaperchawurzelkanalfüllung mit Apexit als Sealer / R. Beer, M. A. Baumann // Zahbarztl. Welt/Reform. – 1994. – Bd. 103. – P. 65.
3. Кабак, Ю. С. Распространенность, рентгенологические и морфологические проявления хронического периодонтита и отдаленные результаты его консервативного лечения: автореф. дис. ... канд. мед. наук / Ю. С. Кабак. – Мн., 2005. – 20 с.
4. Дмитриева, Л. А. Сравнительная оценка цинкэвгеноловой пасты и разогретой гуттаперчи для заполнения корневых каналов при лечении пульпита и периодонтита / Л.А. Дмитриева [и др.] // Стоматология. – 1999. – № 1. – С. 25–27.
5. Дмитриева, Л. А. Сравнительная характеристика антибактериальной активности новых антисептиков и перспективы их применения в стоматологической практике / Л. А. Дмитриева [и др.] // Стоматология. – 1997. – № 2. – С. 26–27.
6. Сулковская, С. П. Зависимость качества эндодонтического лечения от вида корневых наполнителей / С. П. Сулковская // Актуальные вопросы клинической и экспериментальной медицины – 2000: тезисы доклада междунар. науч-практ. конф. молодых ученых. – Минск: БелМАПО, 2000. – 257 с.
7. Лоцилов, И. В. Использование ультразвуковой и других видов энергии в терапии / И. В. Лоцилов, Г. Я. Герцик // Медицинская техника. – 2000. – № 4. – С. 52–55.
8. Акопян, В. Б. Основы взаимодействия ультразвука с биологическими объектами. Ультразвук в медицине, ветеринарии и экспериментальной биологии / В. Б. Акопян, Ю. А. Ершов, С. И. Щукина. – М., 2005. – 224 с.
9. Сперанский, А. П. Ультразвук и его лечебное применение / А. П. Сперанский, В. И. Рокитянский // Медицина. – М., 1970. – 214 с.

10. Чистякова, Г. Г. Сравнительная оценка эффективности применения силеров при эндодонтическом лечении: автореферат диссертации ... канд. мед наук: 14.00.21 / Г. Г. Чистякова. – Мн.: Бел. гос. мед. ун-т, 2006. – 21 с.
11. Ching-Chang, K. Effect of posts on dentin stress distribution in pulpless teeth / K. Ching-Chang // S. Prosthet. Dent. – 1992. – Vol. 68, № 3. – P. 421–427.
12. Справочник машиностроителя. В 6 т. / под ред. С. В. Серенсена. – М.: Машгиз, 1962. – Т. 3. – 654 с.
13. Киселев, М. Г. Ультразвук в поверхностной обработке материалов / М. Г. Киселев, В. Т. Минченя, В. А. Ибрагимов. – Минск: Тесей, 2001. – 344 с.
14. Основы физики и техники ультразвука: учеб. пособие для вузов / Б. А. Агранат [и др.]. – М.: Высшая школа, 1987. – 352 с.

Поступила: 04.02.2021

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН В SOLIDWORKS И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА

Бочарова Н. В.

Брестский государственный технический университет, Брест

Введение. При создании сложных объемных деталей часто сталкиваемся с проблемой ее математического расчета из-за нестандартных форм и размеров. В таком случае возможно использование программного комплекса SolidWorks [1] при помощи которого в несколько раз упрощается процесс проектирования необходимой детали или механизма вне зависимости от конфигурации.

Система автоматизированного проектирования SolidWorks содержит широкий набор функций трехмерного твердотельного моделирования, что особенно важно при работе над электронными моделями узлов и деталей в процессе проектирования изделий. SolidWorks позволяет в кратчайшие сроки проводить конструкторскую подготовку производства, включая промышленный дизайн и анализ технологичности на этапе проектирования; технологическую подготовку производства от проектирования оснастки до разработки управляющих программ изготовления изделий; управление данными и процессами. При работе с единой электронной моделью изделия обеспечивается электронный оборот технической документации, поддерживаются технологии коллективной разработки [2].

Физическая динамика – позволяет увидеть реалистичное движение компонентов сборки. Все детали отождествляются с абсолютно упругими телами и при попытке смещения/поворота одного из них выполняется попытка повторить кинематику движений всего механизма, описанную множеством сопряжений (т. е. происходит перемещение или вращение всей цепочки затрагиваемых компонентов в пределах допустимых степеней свободы). Таким образом, имеется возможность моделирования подвижных узлов и выполнить визуализацию движения механизма.

Проектирование сборочного узла «Планетарный механизм» [3]. «Планетарный механизм» (планетарная передача) – механическая передача вращательного движения, за счет своей конструкции способна в пределах одной геометрической оси вращения изменять, складывать и раскладывать подводимые угловые скорости и/или крутящий момент. Обычно является элементом трансмиссии различных технологических и транспортных машин.

С точки зрения теоретической механики планетарная передача – это механическая система с двумя и более степенями свободы. Эта особенность, являющаяся прямым следствием конструкции, есть важное отличие планетарной передачи от каких-либо других передач вращательного движения, всегда имеющих только одну степень свободы. В аспекте воздействия на угловые скорости вращения, планетарная передача может не только редуцировать эти скорости, но и складывать и раскладывать их, что, в свою очередь, делает ее основным механическим исполнительным узлом не только различных планетарных редукторов, но таких устройств, как дифференциалы и суммирующие планетарные передачи.

Рассмотрим простую планетарную передачу (рис. 1), используемую в коробке передач автомобиля. В наиболее распространенной планетарной передаче, иногда называемой планетарной передачей Симпсона, используются солнечная и кольцевая шестерни с одним или более сателлитами, как изображено на рис. 1. В этой конструкции входной и выходной валы соединены с солнечной и кольцевой шестерней, соответственно, а

фрикционный тормозной механизм обеспечивает удержание кольцевой шестерни в неподвижном положении, когда необходим принудительный привод через передачу.

Когда тормозной механизм включен, естественное сопротивление перемещению рычага заставляет сателлит действовать как промежуточную шестерню. В результате вращающаяся в определенном направлении солнечная шестерня заставляет кольцевую шестерню вращаться в противоположном направлении.

Приложение тормозного усилия заставляет кольцевую шестерню остановиться; в этом случае солнечная шестерня будет приводить сателлит, заставляя его поворачиваться внутри кольцевой шестерни; в результате этого рычаг и выходной вал будут перемещаться в том же направлении, что и входной вал, но со значительно меньшей скоростью.

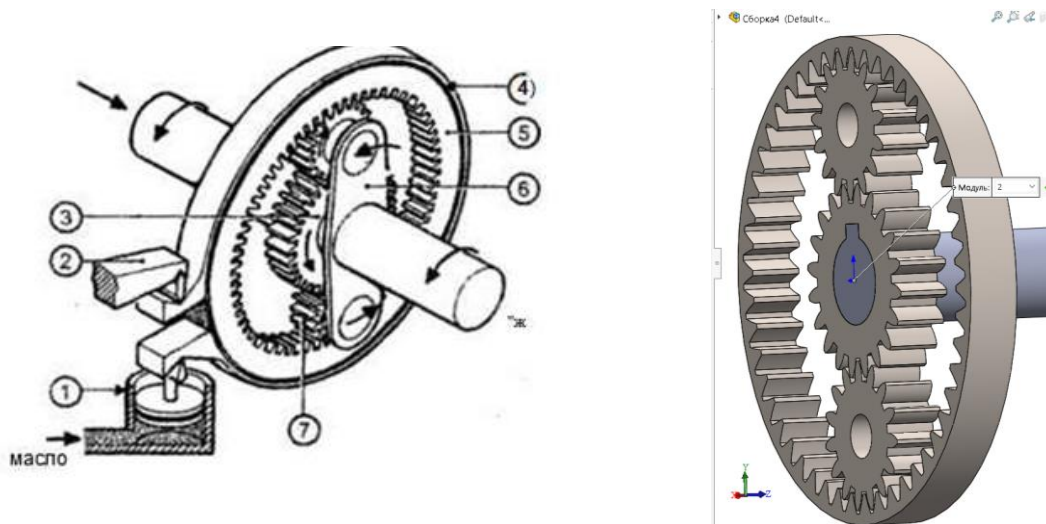


Рис. 1. Простая планетарная передача: 1 – тормоз; 2 – неподвижный якорь; 3 – солнечная шестерня; 4 – тормозная накладдка; 5 – кольцевая шестерня; 6 – пластина водила; 7 – сателлит

Выполнена твердотельная параметрическая модель вала со шпонкой, зубчатые колеса и шестерни с помощью инструментов программного комплекса SolidWorks. Выполнен сборочный узел, состоящий из компонентов: ведущий вал со шпонкой, внешнее зубчатое колесо, шестерня (×2), внутреннее зубчатое колесо. При вращении вала, уже можно получить движение механизма в области модели, чтобы выполнить именно анализ движения сборочного узла (запустить планетарный механизм), активируется инструмент SolidWorks «Двигатель» на ведущий вал (рис. 2).

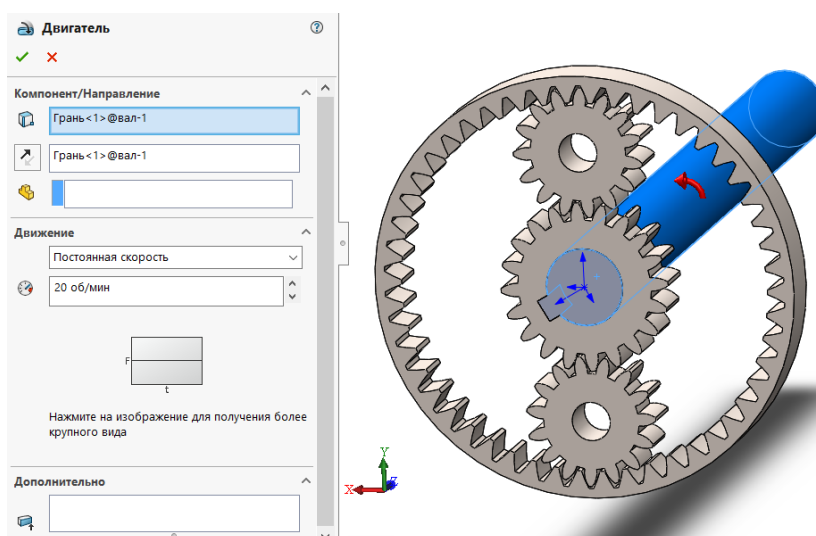


Рис. 2. Назначение двигателя на ведущий вал планетарного механизма

Для анализа угловых скоростей колес, задаем параметры для вывода эпюр угловых скоростей, после этого можем визуально оценить изменение угловой скорости во времени при движении механизма. Как можно заметить, при скорости двигателя 20 об/мин не наблюдается изменение угловой скорости с течением времени, но если повысить скорость двигателя до 50 об/мин, тогда получим эпюры угловой скорости, которые представляют прямо пропорциональную зависимость от времени.

Проектирование сборочного узла «Карданная передача» [3]. Выполнен сборочный узел, состоящий из компонентов: ведущий вал, ведомый вал, крестовина, основание станда, используя сопряжения «концентрический» – крепления для валов на основании станда с самими валами и крестовина с отверстиями в широкой части валов; «совпадение» – выступающие элементы крестовины и внутренняя часть валов. При движении одного из валов, уже можно получить движение механизма в области модели. Чтобы выполнить анализ движения сборочного узла, необходимо активировать инструмент SolidWorks «Двигатель» на ведущий вал (рис. 3).

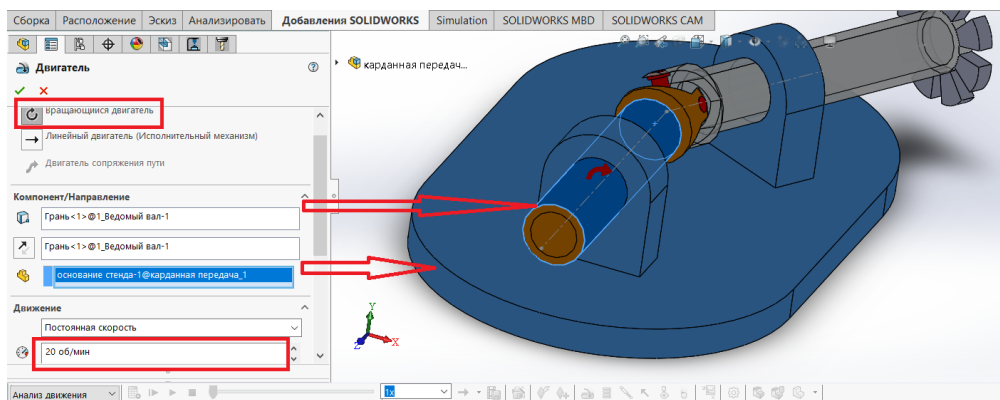


Рис. 3. Назначение двигателя на ведущий вал карданной передачи

Для анализа угловых скоростей валов заданы параметры для вывода эпюры угловой скорости, что позволяет визуально оценить изменение угловой скорости при движении механизма в реальном времени (рис. 4):

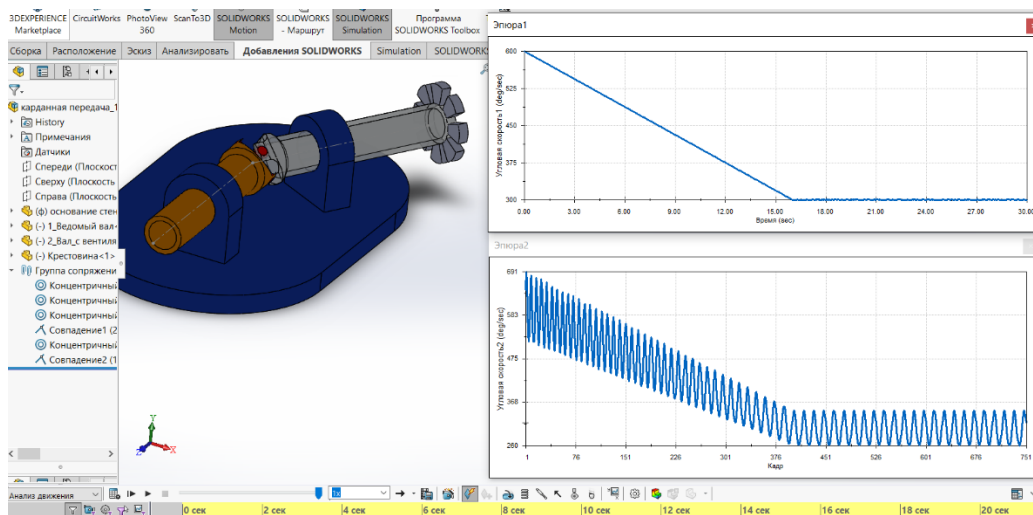


Рис. 4. Эпюры угловых скоростей при $t = 30$ с

Выводы. Современный расчет деталей и машин невозможно представить без использования программных комплексов, которые предоставляют пользователю большое число инструментов в области автоматизированного проектирования. Используя один из

доступных программных комплексов SolidWorks, выполнено моделирование сборочных узлов «Планетарный механизм» и «Карданная передача», исследование угловых скоростей при движении механизма. Изучены возможности вывода результатов в виде эпюр угловых скоростей, что позволяет анализировать работоспособность механизма и тестировать работу механизмов, найти оптимальный вариант для заданных параметров на этапе проектирования конструкции сборки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дударева, Н. Ю. SolidWorks 2009 для начинающих / Н. Ю. Дударева, С. А. Загайко. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 440 с.
2. Зиновьев, Д. В. Основы моделирования в SolidWorks / Д. В. Зиновьев. – М.: ДМК Пресс, 2017. – 240 с.
3. Игнатюк, В. И. Лабораторные работы по дисциплине «Численные методы механики»: методические указания для студентов специальностей 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» дневной формы обучения / В. И. Игнатюк, Н. В. Бочарова. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2020. – 70 с.

Поступила: 31.01.2021

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ КРУГЛОЙ МИШЕНИ ПРИ НИЗКОСКОРОСТНОМ УДАРЕ

¹Пилипчук А. П., ¹Грибков Ю. А., ¹Девойно Д. Г., ¹Летко К. Н., ¹Мокшин А. В.,
²Мишин А. А.

¹Военная академия Республики Беларусь, Минск
²Белорусская государственная академия авиации, Минск

Введение. В процессе эксплуатации машин и механизмов элементы конструкций подвергаются различным ударным воздействиям [1]. При исследовании динамических свойств материалов традиционно выделяют несколько типов ударов - низкоскоростные, высокоскоростные, гиперскоростные, однако отсутствуют общепринятые четкие границы данных диапазонов [2]. Например, в работе [3] различают четыре типа (диапазона) скоростей:

- малые: $V = 0,01-0,1$ км/с;
- средние: $V = 0,1-1$ км/с;
- высокие: $V = 1$ км/с – V_n , $V_n = 5-10$ км/с;
- сверхвысокие: $V > V_n$.

Для определения низкоскоростных полей поражения в работе [5] принята скорость до 300 м/с. В работе [4] ударная нагрузка разделяется на несколько категорий:

- нагрузки малых скоростей (воздействие на скоростях ниже 10 м/с);
- нагрузки средних скоростей (воздействие на скоростях от 10 до 50 м/с);
- высокоскоростные/баллистические нагрузки (до 1000 м/с).

Для космической техники актуальной задачей является обеспечение стойкости конструкций космических аппаратов к ударам высокоскоростных техногенных частиц и осколков «космического мусора». Определение деформации при низкоскоростном ударном взаимодействии тел имеет значение для различных отраслей науки и техники. При эксплуатации авиационной техники наиболее вероятными и критическими событиями являются столкновение с птицей, град, удар фрагментом покрышки шасси (малые и средние скорости). Кроме того, возможны случайные ударные воздействия в ходе штатных эксплуатационных, поверочных и ремонтных работ. Системы коллективной и индивидуальной бронезащиты, элементы защиты автомобильной техники [6] предназначены для функционирования в условиях низко- и среднескоростного воздействия пуль и осколков.

В настоящее время обосновано применение математического моделирования для сокращения количества натурных экспериментов при разработке защитных элементов. Применение моделирования позволяет выяснить, как различные свойства мишени и параметры удара влияют на деформацию мишени, что позволяет решить задачу оптимизации защитной структуры [3, 7]. Однако, применение моделирования целесообразно лишь в случае адекватности модели реальному физическому процессу. Отмеченное обстоятельство определяет актуальность задачи создания и совершенствования методики расчета и оценки деформации преграды кинетическим элементом.

Целью представленной работы является математическое моделирование процесса деформирования круглой пластины при низкоскоростном ударе на основе использования основных положений контактной теории Герца и результатов теории изгиба пластин.

Моделирование процесса взаимодействия сферического ударника и круглой пластины. Рассмотрим взаимодействие тела вращения с мишенью в виде круглой пластины. Предполагается, что 1) ударник-сфера радиусом R_1 , движущаяся со скоростью V ,

2) мишень толщиной h и радиусом R_2 изготовлена из линейно-упругого материала, 3) удар наносится по нормали к поверхности мишени (рис. 1). Выбор круглой мишени определяется тем, что при решении задачи о расчете пластин с прямоугольным очертанием контура прогиба и напряжения определяются в функции не одного, а двух независимых переменных [9–11].

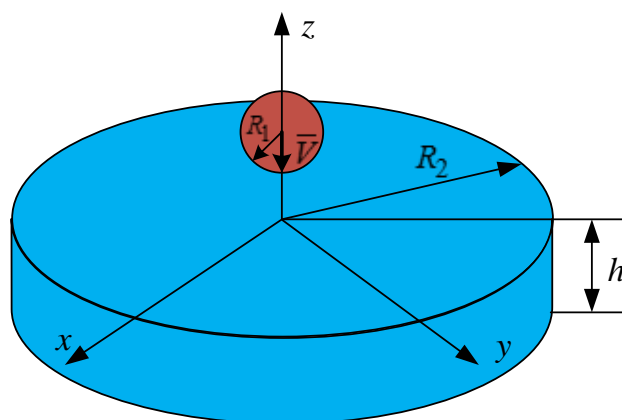


Рис. 1. Расчетная схема удара

Для определения прогиба пластины будем использовать решение задачи изгиба круглой пластинки, нагруженной симметрично относительно центра [9, 10]. При воздействии ударника на мишень возникает сила, действующая на небольшую площадку, размеры которой определяют величину возникающих напряжений. Максимальный прогиб в центре свободно опертой круглой пластинки, в которой нагрузка распределена равномерно по внутренней части пластины, ограниченной окружностью радиуса a , при условии, что величина полной нагрузки P сохраняет заданное конечное значение может быть определен:

$$W_{r=0} = \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} R_2^2 + a^2 \ln \frac{a}{R_2} - \frac{7+3\nu}{4(1+\nu)} a^2 \right], \quad (1)$$

где $D = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu^2)}$ – жесткость пластинки при изгибе, ν – коэффициент Пуассона материала пластины.

Формула (1) представляет собой точное решение для пластинки с малыми прогибами, но может быть использовано при решении задач, когда прогибы срединной плоскости уже не малы в сравнении с толщиной пластины [12, с. 459]

Для гибкой мишени в виде пластины поверхностное давление, площадь контакта и длительность удара будут зависеть от скорости ударника, свойств материалов ударника и мишени, а также изгибной жесткости пластины и граничных условий. При заданной скорости удара ударная сила P будет убывать с ростом гибкости мишени (или с уменьшением ее толщины). Увеличение гибкости мишени будет приводить также к росту длительности удара и уменьшению площади контакта. Приближенное решение задачи о реакции на удар гибкой пластины можно построить на основе схемы деформации, принятой в работе [7]. В этом случае в точке контакта пластина приобретает контактную деформацию по Герцу α , а также изгибную деформацию δ_p . Закон Герца, несмотря на то что он установлен для статических условий и базируется на определенных идеальных условиях, широко применяется и остается наиболее распространенным принципом моделирования ударного поведения [7, 8].

Соотношение Герца между силой и деформацией для контактной задачи имеет вид:

$$P_k = n\alpha^{\frac{3}{2}}. \quad (2)$$

Величина n определяется выражением:

$$n = 4\sqrt{R_1}/3\pi(k_1 + k_2), \quad (3)$$

где R_1 – радиус сферического ударника,

$$k_1 = (1 - \nu_1^2)/\pi E_1;$$

$$k_2 = (1 - \nu_2^2)/\pi E_2,$$

где E_1 – модуль Юнга ударника; E_2 – модуль Юнга мишени; ν_1 – коэффициент Пуассона ударника; ν_2 – коэффициент Пуассона мишени.

Для контактной задачи Герца о вдавлении сферы в плоскую поверхность силой P соотношение, связывающее P и a (где a – радиус площадки контакта), имеет вид [7]:

$$a = \left[\frac{3\pi P}{4} (k_1 + k_2) R_1 \right]^{1/3}. \quad (4)$$

Комбинируя (3) и (4), получаем выражение для максимального радиуса площадки контакта между плоской мишенью и сферическим ударником

$$a = \sqrt{R_1} (5V^2/4Mn)^{1/5}. \quad (5)$$

Соотношение между силой и прогибом для пластины, подверженной действию сосредоточенной нагрузки, будет иметь вид

$$P_u = K_u \delta_u, \quad (6)$$

где K_u – «пружинная» константа пластины.

Параметр K_u является функцией упругих постоянных материала пластины, а также граничных условий для нее. Предполагая, что пластина до удара находится в покое, можно записать уравнение для баланса энергии системы [7] в виде:

$$\frac{1}{2} m_1 V^2 = \int_0^{\delta_{\max}} P_u d\delta_p + \int_0^{\alpha_1} P_k d\alpha. \quad (7)$$

Подставляя выражений для сил и принимая во внимание, что $P_u = P_k$ после вычисления интегралов получаем:

$$\frac{1}{2} m_1 V^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{P^2}{K_u} \right) + \frac{2}{5} \left[\frac{P^{5/3}}{n^{2/3}} \right]. \quad (8)$$

Для круглой изотропной пластины радиусом R_2 и толщиной h , опертой по внешней границе, [7]

$$K_u = \frac{P}{\delta} = \frac{4\pi E h^3}{3(1 - \nu^2)(3 + \nu) R_2^2}. \quad (9)$$

Окончательно получим для круглой пластины, опертой по краю:

$$P^2 \frac{3(1 - \nu)(1 + \nu) R^2}{8\pi E h^3} + \frac{2}{2} \frac{P^{5/3}}{(4\sqrt{R_1}/3\pi(k_1 + k_2))^{2/3}} - \frac{1}{2} m_1 V^2 = 0. \quad (10)$$

Первое слагаемое в левой части (10) учитывает изгиб пластины, второе – контактное взаимодействие по Герцу. Соотношение (10) можно разрешить относительно P и получить зависимость ударной силы от скорости удара и свойств ударника и гибкой мишени.

Таким образом, моделирование процесса деформирования пластины включает следующие этапы:

- определение механических и геометрических параметров ударника и мишени;
- определение радиуса площадки контакта по формуле (5);
- определение силы взаимодействия в результате численного решения уравнения (10);
- определение величины прогиба по формуле (1).

Выполнен расчет прогиба в центре круглой стальной ($E = 200 \text{ ГПа}$) пластины радиусом 150 мм при воздействии свинцового ($E = 0,18 \text{ ГПа}$) сферического ударника радиусом 5 мм со скоростью 315 м/с в зависимости от толщины пластины (рис. 2).

Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными (мишень – стальная пластина толщиной 2,5 мм, ударник – пуля ПМ) показывает удовлетворительное соответствие результатов моделирования (10,6 мм) и эксперимента (8,7 мм) (рис. 3).

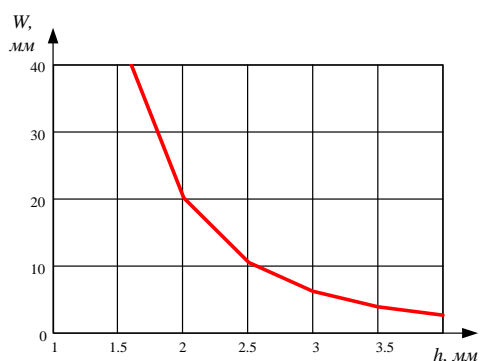


Рис. 2. Прогиб пластины W в зависимости от толщины h

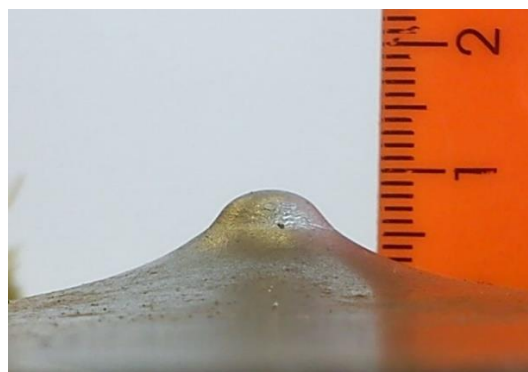


Рис. 3. Результат эксперимента

Выводы. Выполнено математическое моделирование процесса деформирования круглой пластины при низкоскоростном ударе на основе использования основных положений контактной теории Герца и результатов теории изгиба пластин.

Представлены результаты расчета значения прогиба в центре круглой стальной пластины при воздействии свинцового сферического ударника в зависимости от толщины пластины. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными показывает удовлетворительное соответствие результатов моделирования и эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубинский, А. В. Обзор некоторых нетрадиционных приложений инженерной теории высокоскоростного проникания / А. В. Дубинский // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 3. – С. 125–139.
2. Беклемышева, К. А. Моделирование разрушения гибридных композитов под действием низкоскоростного удара / К. А. Беклемышева, И. Б. Петров // Математическое моделирование. – 2018. – Т. 30, № 11. – С. 27–43.
3. Аптуков, В. Н. Прикладная теория проникания / В. Н. Аптуков, Р. Т. Мурзакаев, А. В. Фонарев. – М.: Наука, 1992. – 104 с.
4. Кудрин, А. М. Определение предела прочности полимерного композиционного материала на сжатие после удара в соответствии со стандартом ASTM D 7137 / А. М. Кудрин [и др.] // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2018. – Т. 14, № 2. – С. 164–169.
5. Репин, А. Е. Определении характеристик низкоскоростных (до 300 м/с) осколочных полей поражения / Репин А. Е. [и др.] // Вестник концерна ВКО «Алмаз – Антей». – 2016. – № 4(19). – С. 58–63.

6. Григорян, В. А. Материалы и защитные структуры для локального и индивидуального бронирования / В. А. Григорян [и др.]. – М.: Изд. РадиоСофт, 2008. – 406 с.
7. Зукас, Дж. А. Динамика удара: Пер. с англ. / Дж. А. Зукас [и др.]. – М.: Мир, 1985. – С. 296.
8. Баженов, В. А. Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия / В. А. Баженов [и др.] // Проблемы прочности. – 2008. – №. 6. – С. 82–90.
9. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
10. Биргер, И. А. Стержни, пластинки, оболочки / И. А. Биргер. – М.: Физматлит, 1992. – 392 с.
11. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 10-е изд., перераб. и доп. – 592 с.
12. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

Поступила: 01.02.2021

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ ПРИ СОПРЯЖЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ И СИЛОВЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ И РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НАГРУЗОК

¹Мартыненко Т. М., ²Пронкевич С. А., ³Скляр О. Н., ³Мартыненко И. М.

¹Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск

²Белорусский государственный университет, Минск

³Белорусский национальный технический университет, Минск

Для проектирования зданий и сооружений гражданского и промышленного назначения необходимо исследовать все возможные факторы, вызывающие деформации и напряжения в элементах строительных конструкций под действием внешних сил. Данные задачи требуют решения большого количества важных и трудных проблем как в теоретическом, так и в практическом планах. Проектирование рациональных несущих конструкций следует связывать с непосредственным использованием принципов, которым подчинено деформирование твердого тела. Прикладной характер этих исследований подтверждается тем, что они служат для разработки и обоснования методов расчета инженерных конструкций и сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. Вопросы устойчивости, вызываемого неравномерным нагревом или охлаждением, имеют большое значение для обеспечения прочности и эффективного функционирования строительных конструкций. Поэтому решению данных вопросов уделялось много внимания авторами [1–4]. До настоящего времени эти исследования не утратили свою актуальность ввиду меняющихся требований к современным конструкциям.

Известно, что термоупругие напряжения могут вызвать появление трещин в элементах конструкций, возникновение и развитие пластических деформаций, которые способствуют прогрессирующему разрушению конструкций [5]. С практической точки зрения для проектирования конструкций, работающих в термических и силовых полях, возникает вопрос о приведении в соответствие не только механических, но и термодинамических свойств тела и его пространственного устройства. Поэтому актуальной проблемой является изучение и создание современных, методик прогнозирования нестандартных тепловых режимов в зданиях, что в свою очередь требует разработки теплофизических моделей, позволяющих определять поля температуры.

При повышении температуры упругие характеристики стали изменяются [6]. На рис. 1 представлена зависимость модуля упругости и модуля сдвига углеродистой стали от температуры. Как видно при 600 °С модуль упругости уменьшается примерно на 30 %. Коэффициент Пуассона становится при этом весьма близким к 0,5.

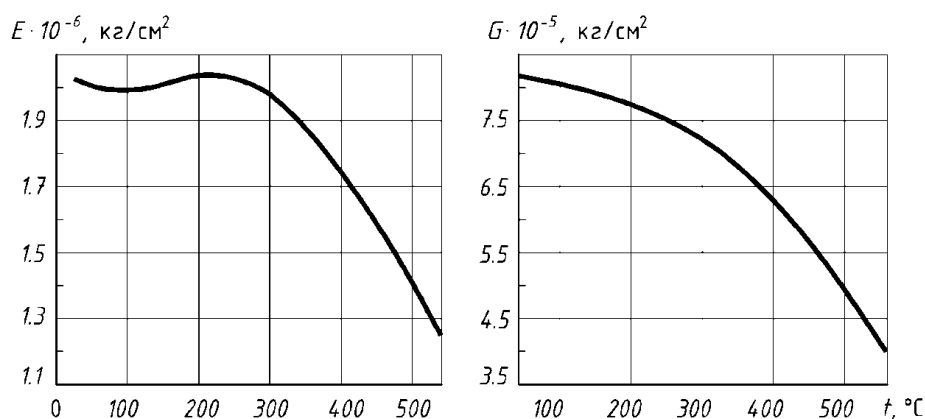


Рис. 1. Зависимость модуля упругости и модуля сдвига углеродистой стали от температуры

Исследования заключались в изучение устойчивости учебно-тренировочного комплекса (УТК) по критерию начальных параметров, при силовых и стационарных термических воздействиях в диапазоне температур 200–600 °С. На основании полученных теоретических и экспериментальных исследований определялись термоупругое напряженно-деформированное состояние (НДС) возникающие в УТК. Решение обозначенной задачи проводились на основе программного обеспечения ANSYS и осуществлялась в следующей последовательности:

- анализ силовых характеристик конструкции;
- исследование влияния распределения полей напряжения и температуры на структурные элементы УТК.

Особенностью системы конечно-элементного анализа ANSYS, в которой проводился расчет, является вычисление значения критической силы, при которой произойдет потеря устойчивости, в качестве множителя к приложенной силе. В комплексе ANSYS проверка устойчивости равновесия выполнялась в классическом Эйлеровом смысле для упругой системы.

Режим проверки устойчивости позволил дать ответ на следующие вопросы:

- каков коэффициент запаса устойчивости, т. е. во сколько раз нужно увеличить нагрузку, чтобы произошла потеря устойчивости;
- какова форма потери устойчивости;
- чему равны расчетные длины стержневых элементов.

Кроме того, имеется возможность увидеть энергетическую картину и понять какие части системы относятся к толкающим, а какие – к удерживающим.

Виртуальные испытания статического напряженно-деформированного состояния, возникающего в случае, когда действует температура 600 °С на поперечную несущую конструкцию, проводим применительно к модулю 40-футового морского контейнера, входящий в состав УТК.

Морской 40-футовый контейнер, имеет следующие характеристики: длина – 1219 см, ширина – 243 см, высота – 259 см, вес пустого контейнера составляет – 3900 кг, максимальный вес груза – 26 580 кг, объем 40-футового контейнера – 67,7 м³.

Расчетная схема представлена на рис. 2. Контейнер закреплен по четырем опорным точкам и к нему приложена вертикальная силовая нагрузка 5000 кг, имитирующая вес контейнера, находящегося сверху. На рис. 2, 3 показано напряженно-деформированное состояние, возникающее в модуле УТК.

L: Copy of Copy of Static Structural
Static Structural
Time: 1, 5
A Fixed Support
B Force: 50000 N

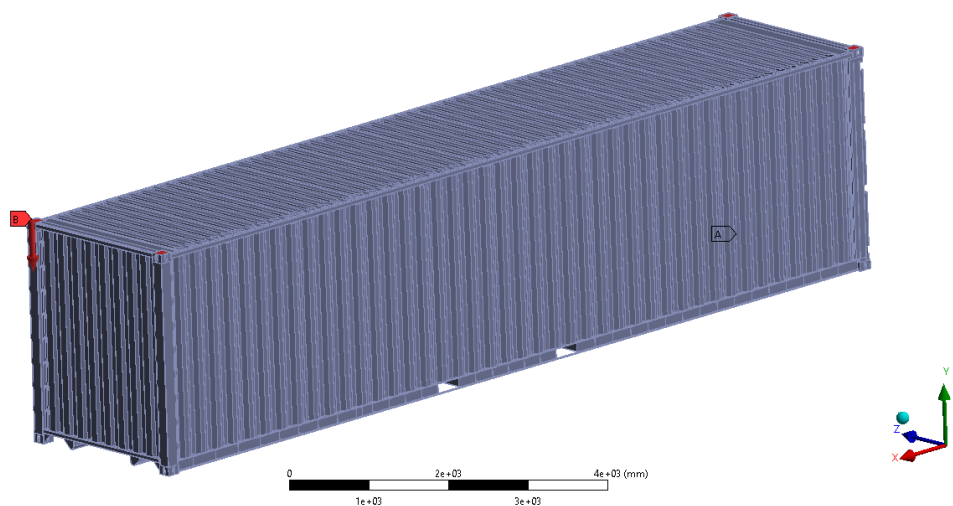


Рис. 2. Расчетная схема

L: Copy of Copy of Static Structural
Equivalent Stress
Type: Equivalent (von-Mises) Stress
Unit: MPa
Time: 1
Custom
Max: 102,01
Min: 0,00018447

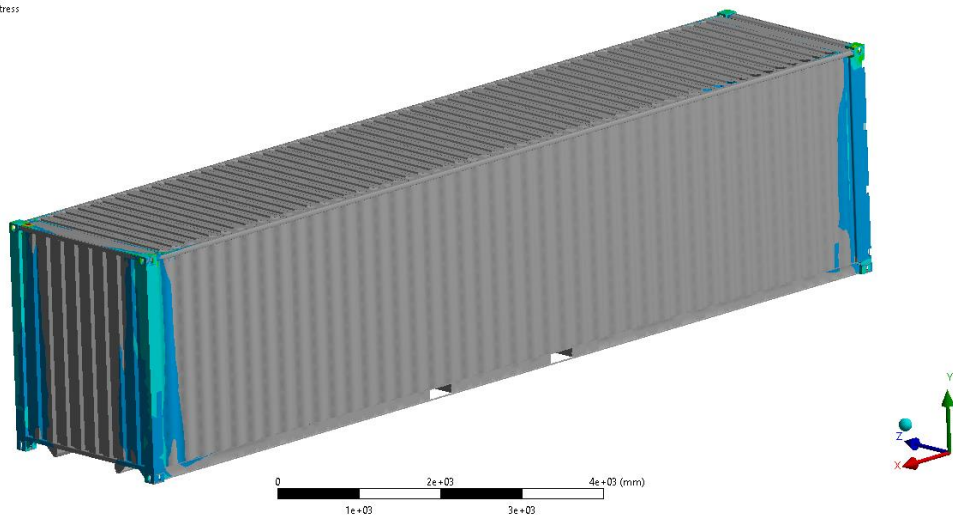
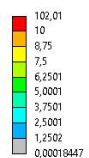


Рис. 3. Распределение эквивалентных напряжений. Максимальное напряжение составляет 102 МПа

L: Copy of Copy of Static Structural
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: mm
Time: 1
Max: 0,046238
Min: 0

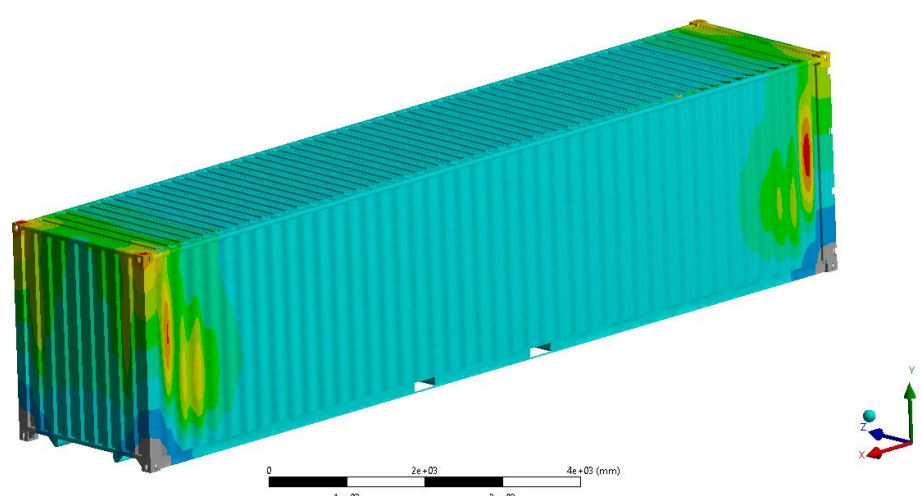
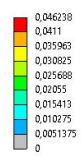


Рис. 4. Распределение деформаций

На рис. 5, 6 показаны первая и пятая формы потери устойчивости контейнера.

В данном случае приложена нагрузка 5000 кг, а множитель для первой формы потери устойчивости равен 324. Таким образом, для вычисления критической силы необходимо приложенную силу умножить на вычисленный системой множитель.

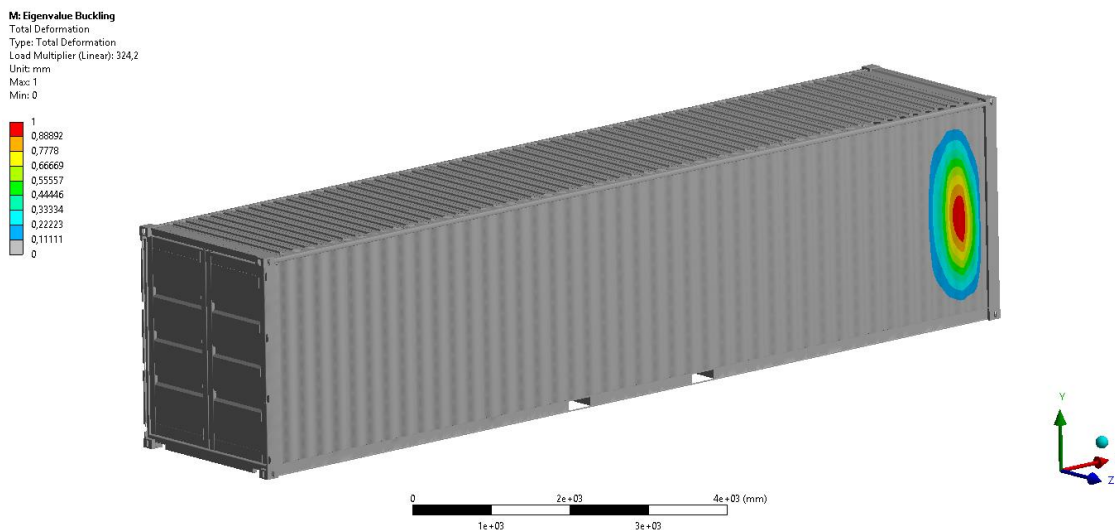


Рис. 5. Первая форма потери устойчивости. Значение множителя равно 324

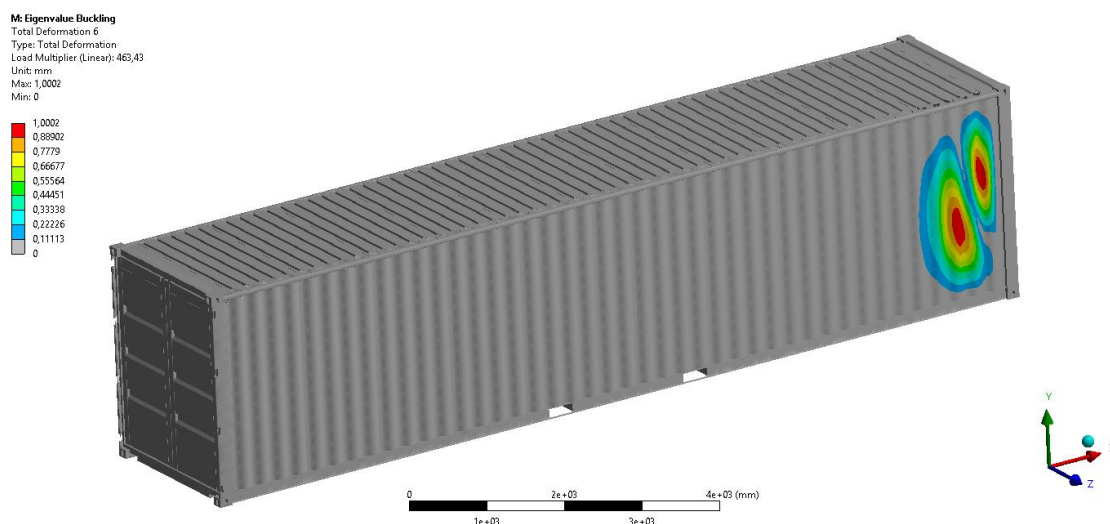


Рис. 6. Пятая форма потери устойчивости. Значение множителя равно 463

Рассмотрим расчетную схему 2. В дополнении к расчетной схеме 1 прикладывается температурная нагрузка 600 °C (рис. 6).

На рис. 7, 8 показано напряженно-деформированное состояние контейнера при заданной нагрузке.

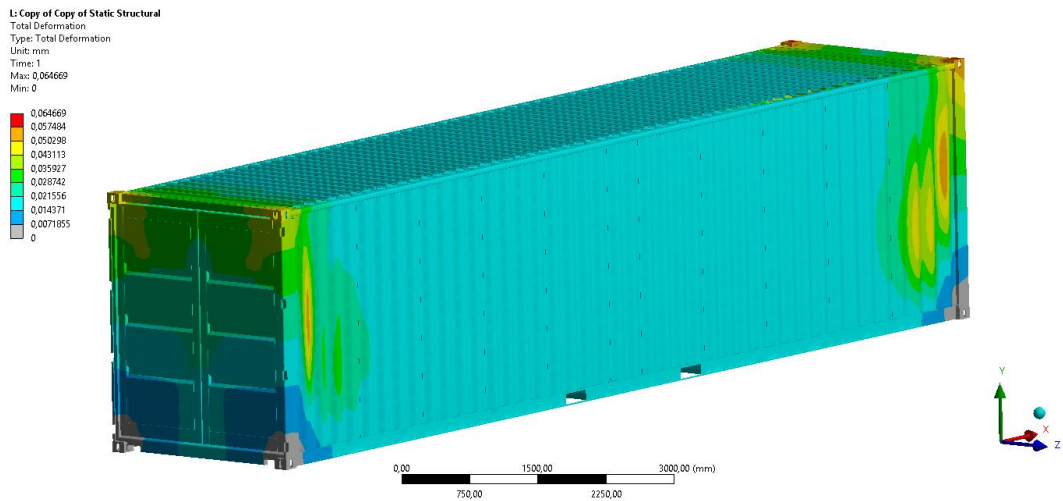


Рис. 7. Распределение деформаций в модуле УТК

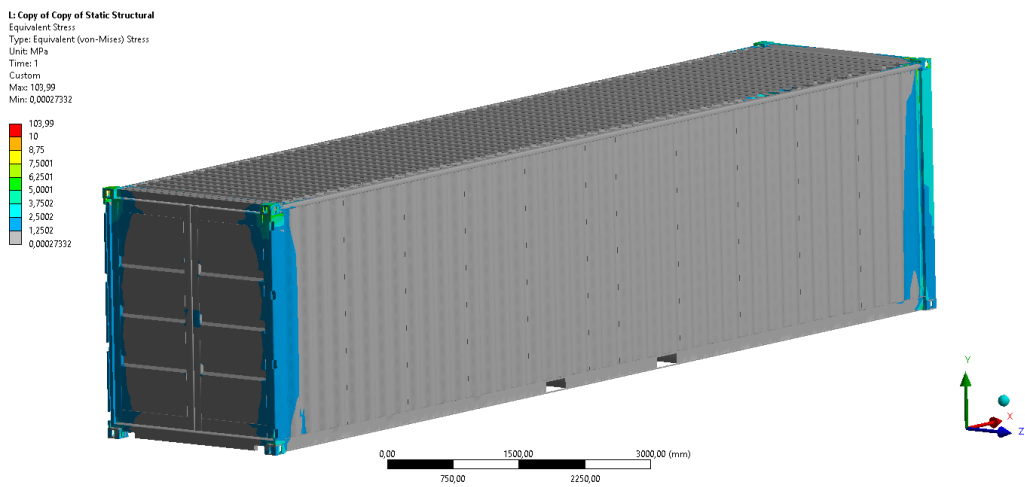


Рис. 8. Распределение эквивалентных напряжений. Максимальное напряжение составляет 104 МПа

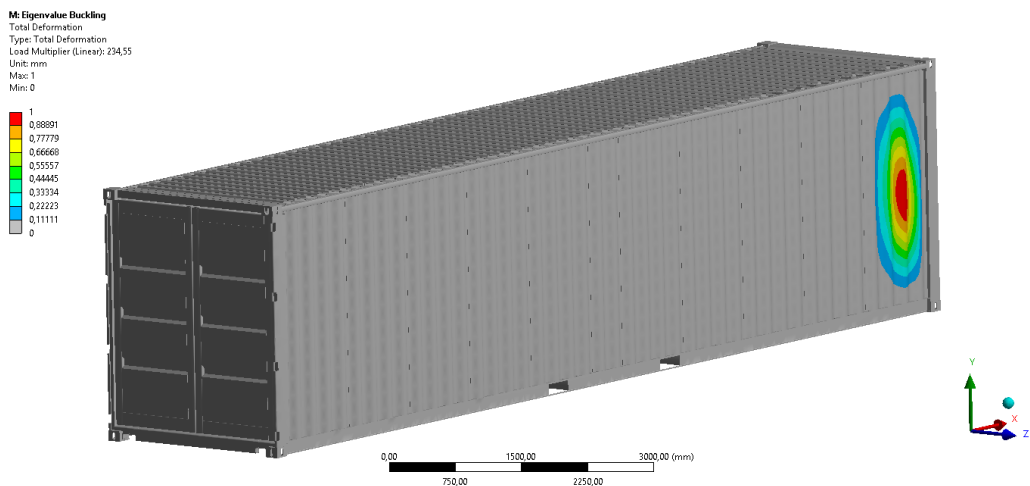


Рис. 9. Первая форма потери устойчивости при комбинированной силовой и температурной нагрузках. Значение множителя равно 234

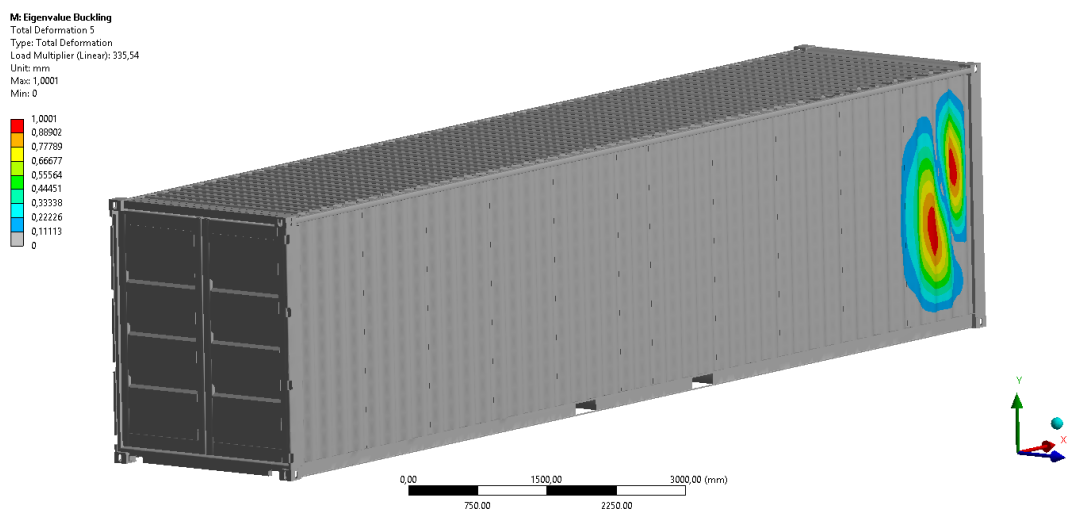


Рис. 10. Пятая форма потери устойчивости при комбинированной силовой и температурной нагрузках. Значение множителя равно 335

Выводы. Как видно из результатов расчета, в случае силового воздействия контейнер обладает значительным запасом прочности, однако при комбинированном (силовом и температурном) нагружении запас прочности уменьшается приблизительно на 30 %, что может привести к существенным ограничениям по его эксплуатации. Полученные результаты согласуются с работами авторов Bangash M. Y. H. [3], Новожилов В. В. [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. Белов, Н. Н. Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки / Н. Н. Белов [и др.]. – Томск: STT, 2004. – 465 с.
3. Bangash, M. Y. H. Explosion-Resistant Building Structures / M. Y. H. Bangash, T. Bangash // Design, Analysis, and Case Studies. – Berlin: Springer, 2006. – 450 с.
4. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
5. Власов, В. З. Общая теория оболочек / В. З. Власов. – М.: Физматгиз, 1949. – 784 с.
6. Matsagar, V. A. Computing stress and displacement response of composite plates under blast / V. A. Matsagar // Disaster Advances. – 2014. – Vol. 7, No 1. – P. 23–38.

Поступила: 29.01.2021

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕГРАДАЦИИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

^{1,2}Каюмов Р. А., ¹Сулейманов А. М., ¹Страхов Д. Е.

¹Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань

²Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, Казань

Применение несущих конструкций из композитных материалов в настоящее время сдерживается недостаточной изученностью как механических характеристик новых композитных материалов, так и механизмов развития повреждений этих материалов, оказывающих влияние на несущую способность и долговечность как самих элементов, так и их соединений.

Недостатки точных опытных данных, а также многообразие составов модифицированных композитных элементов с различными эксплуатационными свойствами является существенным препятствием при разработке методик расчета конструкций из полимерных композитных материалов, обеспечивающих прогнозируемую долговечность, а также описание их реологических свойств, оценка характеристик длительного разрушения на сегодняшнее время являются достаточно актуальными задачами.

Из множества различных внешних воздействий, влияющих на свойства композитного материала в сложных условиях эксплуатации, важнейшими являются температура, водяная, щелочная либо кислая среда, влияние атмосферы, различные биоповреждения, приводящие к климатическому и естественному старению материалов [1–10].

Также установлено, влияние солнечного излучения на рост трещин при совместном воздействии нагрузки и УФ-излучения [11]. В [12] исследован армированный стекловолокном композитный полимерный материал в виде плоских протяженных элементов, в различных агрессивных средах. Деформирование исследуемых образцов (рис. 1) с методом продольного изгиба [13–15].

Работоспособность композитного материала зависит от термостойкости, прочности, жесткости и характеризуется набором физических констант, где изменение одного параметра влияет на изменение других. Учет процесса деградации полимерного композита должен являться частью инженерных расчетов элементов конструкции и их соединений. Выполнив моделирование процесса старения можно осуществить прогноз долговечности материала.

Предлагаемое исследование может быть использовано при разработке методик прогнозирования срока службы несущих конструкций из полимерных композитных материалов, обеспечивающих прочностную надежность с учетом воздействия различных агрессивных факторов, влияющих на понижение характеристик исследуемого материала во времени.

Исследование плоских протяженных элементов, армированных стекловолокном.

В качестве различных сред кроме воздушной для исследования были выбраны дистиллированная вода и водные растворы щелочи. Водный раствор щелочи моделирует воздействие бетона. Чтобы исключить взаимодействие с CO₂ воздуха и испарения, щелочной раствор находился в закрытой емкости. Выполнено механическое деформирование исследуемых образцов согласно тому, как это изображено на рис. 1. При проведении промежуточных контрольных измерений оснастку разбирали и после выполнения необходимых замеров вновь собирали. Температура испытаний была принята 18±3 градусов. Образцы выдерживались в выбранных средах до 600 дней.



Рис. 1. Общий вид исследуемых образцов. Деформирование принято 20, 30, и 60 % от разрушающей величины

В растворе щелочи, выявлено разрушение полимерной матрицы в виде трещин шириной до 0,3 мм (см. рис. 2). После испытаний в водной и воздушной средах разрушения полимерной матрицы не выявлено. Получены необходимые зависимости остаточных деформаций от времени.



Рис. 2. Разрушение полимерной матрицы по направлению армирования в виде трещин шириной до 0,3 мм, щелочной состав, 600 дней

Определены величины разрушающей нагрузки после 600 дней испытаний. Общий вид испытания приведен на рис. 3, полученные значения представлены в табл. 1.



Рис. 3. Проведение разрушающих испытаний образцов

Таблица 1 – Зависимости величин прогибов и разрушающих нагрузок от используемых сред

Испытание	Величина прогиба v_{\max} , см	Нагрузка F , кг
Удвоенный щелочной состав	3	14,41
	2,5	15,02
	1,5	15,34
Щелочной состав	3	16,39
	2,5	16,62
	1,5	17,1
Водная среда	3	56,2
	2,5	56,8
	1,5	58,1
Воздушная среда	3	58,2
	2,5	60,4
	1,5	68,2

Выявлено, что через восемнадцать суток остаточный прогиб $f^{\text{остат}}$ практически перестает изменяться [12]. Поэтому можно в запас прочности считать, что за упругую часть прогиба может быть принята следующая величина:

$$f^{\text{упр}} = f - f^{\text{остат}}. \quad (1)$$

Тогда по формулам, приведенным, например, в [1], можно найти максимальную деформацию в середине образца, которая остается постоянной в любой момент времени:

$$\varepsilon_{\max} = \pm \frac{100b}{2\rho};$$

$$\rho = L / \left(\pi \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3+0.252\delta^2+0.077\delta^3+0.079\delta^4}{0.125-0.015\delta-0.008\delta^2}} \right), \quad (2)$$

где L и b – длина и толщина образца [11].

Напряжение определяется по закону Гука:

$$\sigma_{\max} = E \cdot \varepsilon_{\max}^{\text{упр}} = E \cdot (\varepsilon_{\max} - \varepsilon^{\text{остат}}). \quad (3)$$

Для отыскания величины $\varepsilon_{\max}^{\text{упр}}$ воспользуемся пропорцией:

$$\frac{f^{\text{упр}}}{f} = \frac{\varepsilon^{\text{упр}}}{\varepsilon_{\max}}. \quad (4)$$

Теперь можно найти истинные значения сжимающей силы F :

$$\sigma_{\max} = \frac{F \cdot f^{\text{упр}}}{W}. \quad (5)$$

В результате расчета получены следующие значения искомых характеристик (табл. 2):

Таблица 2 – Характеристики, полученные по результатам расчета

№ эксперимента	f	$f^{\text{ост}}$	$f^{\text{упр}}$	$F/F_{\text{разр}}$	$\sigma/\sigma_{\text{разр}}$
1	38,61	8,53	30,08	0,156	0,156
2	48,1	9,61	38,44	0,240	0,240
3	52,71	11,13	41,58	0,394	0,394
4	63,7	13,04	50,46	0,477	0,477

Здесь и в (5) под F понимается реальная сжимающая сила, действующая на образец после релаксации напряжений.

Из (5) вытекает, что

$$\frac{\sigma}{\sigma_{\text{разр}}} = \frac{F}{F_{\text{разр}}}. \quad (6)$$

Далее $\sigma_{\text{разр}}$ будем называть пределом прочности и для краткости обозначать также буквой R .

Для моделирования процесса старения материала под действием УФ учтем, что в первые моменты времени происходит увеличение его прочности.

Выберем следующую аппроксимацию для предела прочности, как функцию времени t и интенсивности (мощности) облучения γ при отсутствии напряжения:

$$R_0(t, \gamma) = R_{00} \frac{1 + t\gamma/k_0}{1 + c(t\gamma/k_0)^2}. \quad (7)$$

Здесь k_0, c – искомые из эксперимента константы материала; R_{00} – начальная прочность; $R_0(t, \gamma)$ – прочность, которую приобретает ненапряженный материал через время t при облучении УФ.

Ясно, что разрушающие нагрузки пропорциональны $R_0(t, \gamma)$ и R_{00} :

$$m \cdot F_0^{\text{разр}}(t, \gamma) = R_0(t, \gamma), \quad (8)$$

$$m \cdot F_{00}^{\text{разр}}(0, 0) = R_{00}, \quad (9)$$

где m – коэффициент пропорциональности.

Подставляя (8) и (9) в (7), получим:

$$F_0^{\text{разр}}(t, \gamma) = \frac{1 + t\gamma/k_0}{1 + c(t\gamma/k_0)^2} \cdot F_{00}^{\text{разр}}(0, 0). \quad (10)$$

Из эксперимента известно значение $F_0^{\text{разр}}(t_{\text{max}}, \gamma)$ и значение $F_{00}^{\text{разр}}(0, 0)$:

$$F_{00}^{\text{разр}}(0, 0) = 57 \text{ кгс}, \quad (11)$$

$$F_0^{\text{разр}}(t_{\text{max}}, \gamma) = 63 \text{ кгс}. \quad (12)$$

Здесь

$$t_{\text{max}} = 56 \text{ сут}, \gamma = 2,0 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}. \quad (13)$$

Для получения дополнительного условия предположим, что при

$$t > t_{\text{max}} = 56 \text{ сут.}$$

дальнейшего упрочнения можно не ожидать, это идет в запас прочности. Тогда это условие можно записать в виде:

$$F_{\text{max}}^{\text{разр}} = F_0^{\text{разр}}(t_{\text{max}}, \gamma) = 63 \text{ кгс}. \quad (14)$$

По теореме Ферма получим:

$$\left. \frac{\partial F_0^{\text{разр}}(t, \gamma)}{\partial t} \right|_{t=t_{\text{max}}} = 0. \quad (15)$$

Решая совместно систему уравнений (13), (10) при $t = t_{\text{max}}$ найдем k_0, c :

$$c = \frac{[F_{00}^{\text{разр}}]^2}{4[F_{\text{max}}^{\text{разр}} - F_{00}^{\text{разр}}] \cdot F_{\text{max}}^{\text{разр}}}. \quad (16)$$

$$k_0 = \frac{F_{00}^{\text{разр}} \cdot t_{\text{max}} \cdot \gamma}{2[F_{\text{max}}^{\text{разр}} - F_{00}^{\text{разр}}]}. \quad (17)$$

Примечание: уравнение (15) после дифференцирования и упрощений имеет следующий вид:

$$k_0^2 - c \cdot t \cdot \gamma \cdot (t \cdot \gamma + 2k_0) = 0. \quad (18)$$

После подстановки в систему значений (11)–(13) и ее решения получим:

$$k_0 = 532 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^2}, \quad c = 2,15. \quad (19)$$

Вид функции (10) представлен на рис. 4, а. Он характеризует изменение прочности $R_0(t, \gamma) = m \cdot F_0^{\text{разр}}(t, \gamma)$ от воздействия УФ.

Далее введем аппроксимацию для остаточной прочности $R(t, \gamma, \sigma)$, которая изменяется вследствие воздействия напряжения, а именно в виде:

$$R(t, \gamma, \sigma) = R_0(t, \gamma) \cdot e^{-\beta \cdot |\sigma| \cdot t}. \quad (20)$$

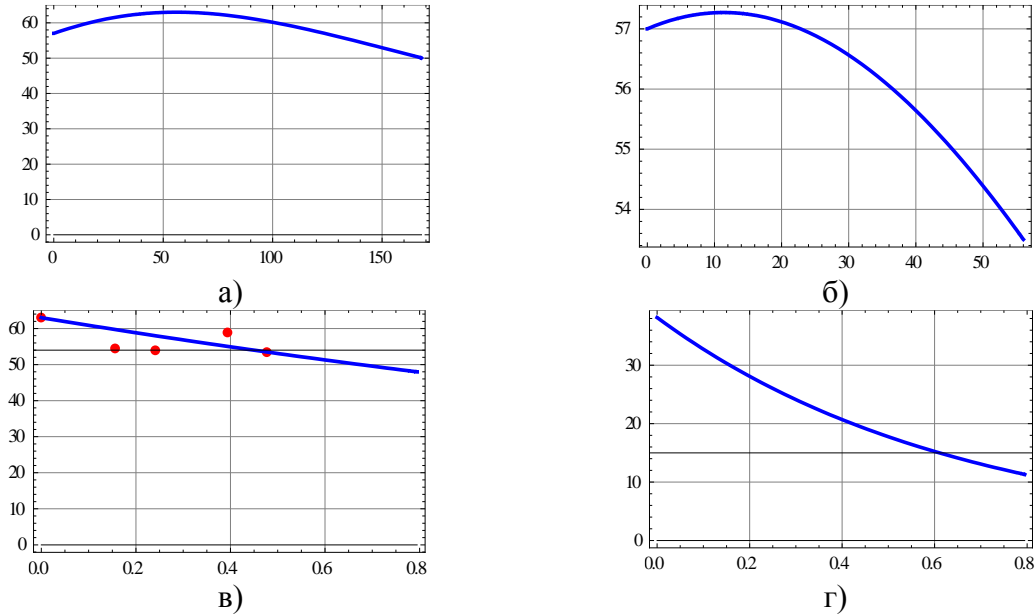


Рис. 4. Графики зависимостей разрушающих нагрузок: а) расчетная зависимость разрушающей нагрузки $F_0^{\text{разр}}(t, \gamma)$ (в кгс) от времени (в сутках) для ненапряженного образца при воздействии только УФ облучения мощностью $\gamma = 2,0 \text{ кВт/м}^2$; б) зависимость разрушающей нагрузки $F^{\text{разр}}(t, \gamma, \sigma)$ (в кгс) от времени (в сутках) для последнего образца при воздействии и УФ, и напряжения $\sigma/\sigma_{\text{разр}} = 0,47$ (иллюстрация авторов); в) зависимость разрушающей нагрузки $F^{\text{разр}}(t_{\text{max}}, \gamma, \sigma)$ (в кгс) от относительного напряжения $\sigma/\sigma_{\text{разр}}$ через $t_{\text{max}} = 56$ суток при воздействии и УФ, и напряжения. Маркерами обозначены экспериментальные, сплошной линией – расчетные значения; г) зависимость разрушающей нагрузки $F^{\text{разр}}(t_{\text{max}}, \gamma, \sigma)$ (в кгс) от относительного напряжения $\sigma/\sigma_{\text{разр}}$ через $t_{\text{max}} = 250$ суток при воздействии и УФ и напряжения при $\gamma = 2,0 \text{ кВт/м}^2$

То есть от воздействия напряжения σ прочность предполагается уменьшающейся по экспоненциальному закону.

Для получения значения константы β нужно иметь один эксперимент. Снова считаем, что:

$$\frac{R(t, \gamma, \sigma)}{R_0(t, \gamma)} = \frac{F^{\text{разр}}(t, \gamma, \sigma)}{F_0^{\text{разр}}(t, \gamma)}. \quad (21)$$

Тогда из (20) и (21) вытекает выражение для β :

$$\beta = \frac{1}{|\sigma|t} \{ \ln[F_0^{\text{разр}}(t, \gamma)] - \ln[F^{\text{разр}}(t, \gamma, \sigma)] \}. \quad (22)$$

В качестве $F^{\text{разр}}(t, \gamma, \sigma)$ примем значение, полученное из эксперимента при максимальном значении прогиба:

$$F^{\text{разр}}(t_{\text{max}}, \gamma, \sigma^{\text{разр}} \cdot 0,477) = 0,477 \cdot F_{00}^{\text{разр}}; \quad (23)$$

$$F_0^{\text{разр}}(t_{\text{max}}, \gamma) = 63 \text{ кгс}. \quad (24)$$

Результаты расчетов дают значение:

$$\beta = 0,00647.$$

Выводы. На рис. 4, б приводится зависимость разрушающей нагрузки от времени в интервале [0–56 суток] для последнего образца с прогибом $f = 63,7$ мм.

На рис. 4, в приведены экспериментальные значения разрушающей нагрузки в зависимости от отношения $\frac{\sigma}{\sigma_{\text{разр}}} = 0,156; 0,240; 0,394; 0,477$ при выдержке $t_{\text{max}} = 56$ суток и расчетная зависимость $F^{\text{разр}}(t_{\text{max}}, \gamma, \sigma)$ от напряжений.

Отметим, что эта зависимость близка к линейной ввиду малого значения коэффициента β и малого интервала времени. Если увеличить интервал времени облучения, то нелинейность зависимости $F^{\text{разр}}(t_{\text{max}}, \gamma, \sigma)$ от относительного напряжения $\sigma/\sigma_{\text{разр}}$ будет проявляться сильнее. Это видно и из рис. 4, г), при этом время выдержки под облучением $\gamma = 2,0$ кВт/м² было принято 250 суток

Работа выполнена в рамках РФФИ (проект № 19-08-00349) и РНФ (проект № 19-00059).

ЛИТЕРАТУРА

1. Блазнов, А. Н. Влияние температуры на прочность базальто- и стеклопластиков / А. Н. Блазнов [и др.] // Ползуновский вестник. – 2014. – № 4, Т. 2. – С. 154–159.
2. Федоров, Ю. Ю. Влияние факторов холодного климата на механические свойства композитных стержней из стекло- и базальтопластиков / Ю. Ю. Федоров [и др.] // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). – 2012. – № 2. – С. 56–61.
3. Блазнов, А. Н. Прогнозирование прочности композитных стержней в условиях воздействия щелочной среды / А. Н. Блазнов, В. Ф. Савин, А. А. Краснов // Южно-сибирский научный вестник. – 2014. – № 4(8). – С. 12–14.
4. Sen, R. Durability of E-Glass. Vinylester Reinforcement in Alkaline Solution / R. Sen, G. Mullins, T. Salem // ACI Structural Journal. – 2002. – Vol. 99, № 3. – P. 369–375.
5. Cabral-Fonseka, S. Artificial accelerated ageing of GFRP pultruded profiles made of polyester and vinylester resins: characterisation of physical–chemical and mechanical damage / S. Cabral-Fonseka, [at el.] // Strain, 2012. – № 48. – P. 162–173.
6. Корецкая, Л. Влияние воды на свойства стеклопластиков / Л. Корецкая, Т. Александрова // Технологии и материалы. – 2011. – № 1(31). – С. 38–41.
7. Николаев, Е. В. «Комплексное исследование воздействия климатических и эксплуатационных факторов на новое поколение эпоксидного связующего и полимерных композиционных материалов на его основе» / Е. В. Николаев [и др.] // Труды ВИАМ. – 2016. – Часть 4. Натурные климатические испытания полимерных композиционных материалов на основе эпоксидной матрицы. – № 6(42).
8. Каблов, Е. Н. Климатическое старение композиционных материалов авиационного назначения. III. Значимые факторы старения / Е. Н. Каблов [и др.] // Деформация и разрушение материалов. – 2011. – № 1.
9. Ефимов, В. А. Исследование полимерных конструкционных материалов при воздействии климатических факторов и нагрузок в лабораторных и натуральных условиях / В. А. Ефимов [и др.] // Авиационные материалы и технологии. – 2013. – С. 68–73
10. Карапетян, К. А. Сопротивление деформированию и разрушению армированных пластиков / К. А. Карапетян. – Ер.: Гитутюн НАН РА, 2014. – 164 с.
11. Ратнер, С. Б. Физическая механика пластмасс. Как прогнозируют работоспособность / С. Б. Ратнер, В. П. Ярцев. – М.: Химия, 1992. – 320 с.

12. Kayumov, R. The study of the rheological properties of composite materials of power elements of building structures / R. Kayumov, D. Strakhov // International Scientific Conference on Socio-Technical Construction and Civil Engineering (STCCE – 2020) 29 April – 15 May 2020, Kazan, Russian Federation.

13. Арнаутов, А. К., Продольный изгиб как метод определения изгибной прочности композитных материалов / А. К. Арнаутов, Ю. М. Тарнопольский // Механика композитных материалов. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 25–42.

14. Савин, В. Ф. Метод определения долговременной прочности стеклопластиковой арматуры / В. Ф. Савин, А. Н. Блазнов // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях: межвузовский сборник. – 2001. – С. 214–219.

15. Савин, В. Ф. Продольный изгиб как средство контроля механических характеристик композиционных конструкционных материалов / В. Ф. Савин [и др.] // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях: межвузовский сборник. – 2002. – С. 167–172.

Поступила: 30.01.2021

ПРОРАСТАНИЕ СКВОЗНОЙ ТРЕЩИНЫ В СЛОИСТОМ ПОКРЫТИИ И ПРОЕКТИРОВАНИИ ТРЕЩИНОСТОЙКОГО ИНСТРУМЕНТА

¹Чигарев А. В., ¹Ботогова М. Г., ²Савицкая А. В.

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Белорусский национальный технический университет, Минск

Упрочнение режущего инструмента с помощью слоистых покрытий должно обеспечивать повышение его жесткостных, прочностных, термомеханических свойств, как локально, так и макроскопически (в среднем). Надежность, живучесть инструмента в целом (макроскопически и локально) имеют важное значение для выполнения его функций [1, 2].

Рассмотрим вычисление осредненных величин на основе 2D модели слоистого тела, находящегося под воздействием силовых или термосиловых нагрузок, вызывающих распространение трещины поперек слоев. В результате осреднения нужно получить математика-механическую модель слоистого пакета, для которого решаются конкретные задачи [3–5].

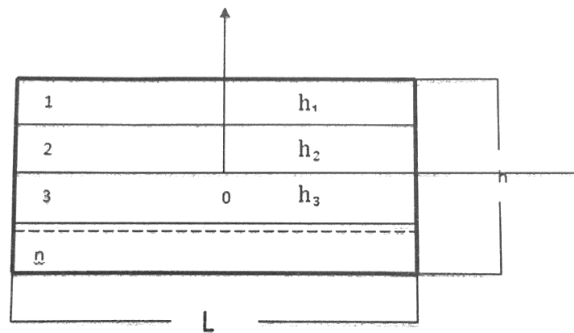


Рис. 1. Схема слоистого покрытия

Рассмотрим вычисление эффективных физико-механических коэффициентов материала слоя толщины $h = \sum_{i=1}^n h_i$, где h_i – толщина i -ого слоя. Считая материалы слоев однородными и изотропными будет описывать их упругие свойства с помощью модулей Юнга E_i и коэффициентов Пуассона ν_i . Как известно, коэффициенты Пуассона разных металлов различаются незначительно, поэтому положим

$$\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n = \nu. \quad (1)$$

Эффективный модуль Юнга слоя толщины h может быть вычислен по формулам

$$E_R = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n h_i E_i, \quad (2)$$

Или

$$E_F^{-1} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n h_i E_i^{-1}. \quad (3)$$

Схемы (2), (3) дают верхнюю и нижнюю оценки истинного макроскопического модуля Юнга упрочняющего слоя толщины h .

Обозначим $\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)}$ – напряжения в сечении i -ого слоя. Так как толщина каждого слоя h_i значительно меньше толщины всего покрытия, срединная плоскость покрытия является плоскостью симметрии. Средние перемещения u, v по осям x, y и средние деформации e_x, e_y, e_{xy} всех слоев одинаковы в соответствующих точках, расположенных на одной и той же нормали к срединной плоскости. Таким образом, реализуется плоское напряженное состояние, описываемое средними усилиями

$$\begin{aligned} N_x &= \sum_{i=1}^n N_x^{(i)}, N_y = \sum_{i=1}^n N_y^{(i)}, N_{xy} = \sum_{i=1}^n N_{xy}^{(i)}, \\ \sigma_x &= \frac{1}{2} N_x, \sigma_y = \frac{1}{2} N_y, \sigma_{xy} = \frac{1}{2} N_{xy}, \\ N_x^{(i)} &= h_i \sigma_x^{(i)}, N_y^{(i)} = h_i \sigma_y^{(i)}, N_{xy}^{(i)} = h_i \sigma_{xy}^{(i)}, \end{aligned} \quad (4)$$

Закон Гука в i -том слое запишем в виде [3,5]

$$\begin{aligned} N_x^{(i)} &= \frac{2E_i h_i}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right); \\ N_y^{(i)} &= \frac{2E_i h_i}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right); \\ N_{xy}^{(i)} &= \frac{E_i h_i}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения равновесия в i -том слое имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(i)}}{\partial y} + X^i &= 0; \\ \frac{\partial N_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial N_y^{(i)}}{\partial y} + Y^i &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Осредняя уравнения (5), (6) с учетом (1)–(4), получим

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right); \\ N_y &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right); \\ N_{xy} &= \frac{2Eh}{1-\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Связь между микро и макронапряжением определяется формулами

$$\sigma_x^{(i)} = \sigma_x \frac{E_i}{E}, \sigma_y^{(i)} = \sigma_y \frac{E_i}{E}, \tau_{xy}^{(i)} = \tau_{xy} \frac{E_i}{E}. \quad (9)$$

Здесь $\sigma_\alpha^{(i)}$ – микронапряжения в i -том слое, σ_α – осредненные напряжения. В случае чисто хрупкого разрушения распространение трещины поперек слоя происходит так, что на границах слоев не происходит изменения траектории трещины вследствие расслоения. Тогда макроскопические коэффициенты интенсивности напряжений для всего упрочняющего слоя и для отдельных слоев вычисляются как осредненные по толщине

слоев величины. Предельное состояние в слое определяется формулами для коэффициентов интенсивности напряжений

$$K_Q^{(i)} = \frac{E_i}{E} K_{QC}^{(i)}, K_Q^{(i)} = K_{QC}^{(i)}, Q = I, II, III, i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Здесь символ Q отмечает тип трещины (I – чистого разрыва, II – сдвига, III – изгиба). Символ C – предельное значение.

Макроскопическое значение коэффициента интенсивности напряжений вычисляется по формуле

$$K_Q = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n h_i K_Q^{(i)}. \quad (11)$$

Предельное состояние покрытия определяется условием

$$K_Q = K_{QC}, Q = I, II, III. \quad (12)$$

Рассмотрим чисто хрупкое разрушение покрытия сквозной трещиной, распространяющейся поперек слоев от внешней границы рис. 2. Обозначим $\sigma_i, i = \overline{1, n}$ – напряжения, при которых в i -том слое достигается предельная деформация e_i к моменту его разрушения.

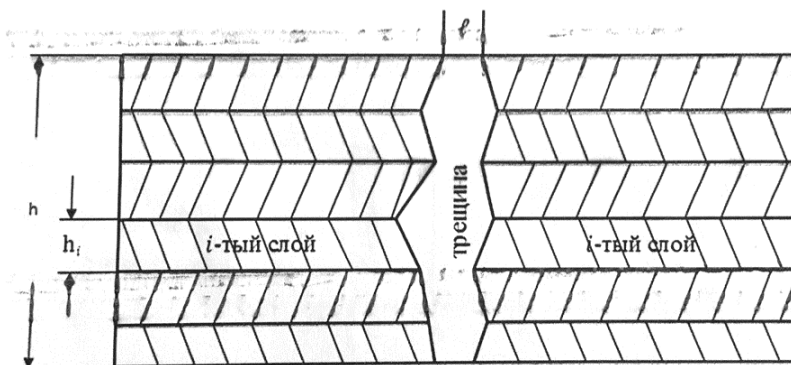


Рис. 2. Схема разрушения слоистого покрытия трещиной

Одним из принципов проектирования слоистых материалов, обладающих максимальной эффективной прочностью, является принцип равнопрочности составляющих слоев. В случае равнопрочности все слои работают равномерно, объем и вес покрытия минимальны. Положим, разрушения покрытия начинается во всех слоях одновременно, причем

$$e_1 = e_2 = \dots = e_n. \quad (13)$$

Однако на практике выполнение ряда ограничений на свойства слоев приводит к тому, что слои неравнопрочные и требуется спроектировать покрытие с максимальной удельной прочностью из неравнопрочных слоев.

Эффективные напряжения σ_k , отвечающие e_1, \dots, e_n вычисляются по формуле

$$\sigma_k = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n h_i \sigma^{(i)}(e_k). \quad (14)$$

Обозначим σ_C максимальное напряжение, выдерживаемое покрытием и которое достигается при разрыве i -го слоя

$$\sigma_C = \frac{1}{h} \sum_{i=m}^n h_i \sigma^{(i)}(e_k). \quad (15)$$

Тогда удельная прочность, отнесенная к единице массы покрытия, вычисляется по формуле

$$\frac{\sigma_c}{\rho}, \text{ где } \rho = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \rho_i h_i. \quad (16)$$

Здесь ρ_i – плотность материала i -го слоя, $\sigma^{(i)}(e_k)$ – линейная зависимость между σ и e_k в i -том слое (рис. 3).

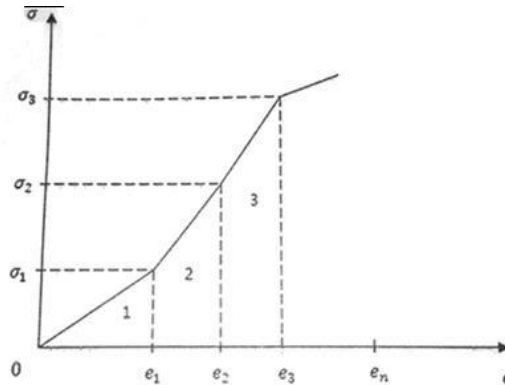


Рис. 3. Зависимость между напряжением и деформацией послойно

В случае если материалы всех слоев линейно-упругие, то

$$\frac{\sigma_c}{\rho} = e_m \frac{\sum_{i=1}^n h_i E_i}{\sum_{i=1}^n h_i \rho_i}. \quad (17)$$

Проектирование слоистых покрытий, обладающих максимальной удельной прочностью (надежностью) сформулируем как задачу нахождения максимума функции Φ [4, 6]

$$\Phi_{(\delta_i, m)} = \frac{\sum_{i=1}^n h_i \sigma_{(e_m)}^{(i)} \delta_i}{\sum_{i=1}^n h_i \rho_i \delta_i}. \quad (18)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 1) \sum_{i=1}^n h_i \sigma_{(e_m)}^{(i)} \delta_i &\geq N, \\ 2) \sum_{i=1}^n K_{QC}^{(i)} h_i \delta_i &\geq K_C, \end{aligned} \quad (19)$$

3) выполняется условие сопряжения слоев,

$$4) h_{\min} \leq h \leq h_{\max}.$$

Здесь δ_i – индикаторная функция i -того слоя определяется формулой:

$$\delta_i \begin{cases} 1, & \text{если материал } i \text{ – го слоя из базы данных применяется в покрытии;} \\ 0, & \text{если материал не применяется, но имеется в базе данных.} \end{cases} \quad (20)$$

Рассмотрим стационарный поэтапный процесс распространения трещины поперек слоев как разрыв слоев с образованием между ними пустоты рис. 2.

Такой режим (предельный стационарный) может реализовываться только для равнопрочного покрытия, когда локальное разрушение на фронте трещин во всех слоях происходит одновременно.

Напряжение, при котором может реализовываться подобный идеальный режим, вычисляется по формуле

$$\sigma = \lambda \frac{K_{QC}}{\sqrt{\pi l}}, \quad (21)$$

$$K_{QC} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n h_i K_{QC}^{(i)}. \quad (22)$$

Здесь λ – безразмерный параметр, характеризующий покрытия и геометрию трещины, l – минимальное расхождение берегов трещины.

Как известно, нередко покрытия с трещиной продолжают выполнять функции, т. е. сохраняют живучесть при исчерпании надежности.

Можно ввести удельную прочность панели со сквозной трещиной формулой

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n h_i K_{QC}^{(i)}}{\sum_{i=1}^n h_i \rho_i}. \quad (23)$$

где σ – предел прочности; ρ – плотность покрытия.

Если из соображений безопасности требуется спроектировать покрытие, обладающее максимумом живучести, то введем функцию

$$\psi_{(\delta_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n h_i K_{QC}^{(i)} \delta_i}{\sum_{i=1}^n h_i \rho_i \delta_i}. \quad (24)$$

Максимум ψ обеспечит живучесть упрочняющего слоя при ограничениях (19).

Выводы. Возможно также добавление ограничений технологического или экологического характера. Тогда задача нахождения покрытия, обладающего максимальной живучестью приводится к задаче математического программирования [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов, И. С. Ионно-плазменная обработка материалов / И. С. Куликов, С. В. Волщенко, А. Я. Каменев. – Минск: Беларуская навука, 2010. – 232 с.
2. Бойцов, А. Г. Упрочнение поверхностей комбинированными способами / А. Г. Бойцов [и др.]. – М.: Машиностроение, 1991. – 144 с.
3. Sih, G. C. Stress distribution near internal crack for longitudinal shear problems / G. C. Sih // Trans. ASME, ser. E, J. Appl. Mech, 32. – 1965. – № 1.
4. Чигарев, А. В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А. В. Чигарев. – Минск: Технопринт, 2000. – 425 с.
5. Черепанов, Г. П. Механика разрушения / Г. П. Черепанов, Л. В. Ершов. – М.: Машиностроение, 1977. – 224 с.
6. Партон, В. З. Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М.: Наука, 1974. – 416 с.
7. Schuech, M. U. Analytical Design for Optimum Filamentary Pressure Vessel / M. U. Schuech, O. R. Burggraf // ARSI. – 1964. – Vol. 34, №5.
8. Карманов, В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. – М.: Наука, 1974. – 272 с.

Поступила: 02.02.2021

РЕФЕРАТЫ

УДК 534.121.1

Маркова М. В., Леоненко Д. В. **Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трехслойной пластины переменной толщины** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 3–10. Рассмотрены колебания круговой трехслойной пластины переменной толщины. С помощью вариационного принципа Гамильтона получены дифференциальные уравнения, описывающие вынужденные колебания системы. Совместно с начальными и граничными условиями полученные дифференциальные уравнения позволяют исследовать поперечные колебания круговых трехслойных несимметричных по толщине пластин, состоящих из тонких внешних несущих слоев переменной толщины и толстого легкого срединного заполнителя, обеспечивающего совместную работу внешних слоев. – Ил. 1. Библиогр.: 14 назв.

УДК 539.3

Василевич Ю. В., Остриков О. М., Чигарев В. А. **Роль сил неупругой природы в формировании остаточных винтовых нанодвойников клиновидной формы** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 11–14. Изучена роль сил внутреннего трения в формировании остаточных нанодвойников клиновидной формы. Показано, рост сил неупругой природы способствует удержанию в равновесии нанодвойники меньших размеров, в то время как уменьшение силы внутреннего трения способствует росту нанодвойника. – Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3

Старовойтов Э. И., Журавков М. А., Яровая А. В. **Термоупругие свободные колебания трехслойной круговой пластины** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 15–20. Рассмотрены колебания в температурном поле круговой трехслойной пластины. Приведена система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих поперечные колебания рассматриваемой пластины. Сформулированы граничные и начальные условия. Получено трансцендентное уравнение для вычисления собственных чисел. Выписаны формулы для определения частот собственных колебаний. Проведен численный параметрический анализ зависимости собственных чисел и частот колебаний от температуры, при заземленном контуре пластины. – Ил. 3. Табл. 2. Библиогр.: 18 назв.

УДК 539.3

Козел А. Г. **Влияние материалов слоев на изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 21–26. Приведена постановка и решение краевой задачи об осесимметричном изгибе упругой сэндвич-пластины на двухпараметрическом основании Пастернака. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, для достаточно толстого легкого несжимаемого по толщине заполнителя применяется гипотеза Тимошенко. Дифференциальные уравнения равновесия в усилиях и перемещениях получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Аналитическое решение выписано через функции Бесселя. Проведен численный анализ полученного решения, исследованы перемещения и напряжения в зависимости от материалов несущих слоев и заполнителя. – Ил. 4. Библиогр.: 15 назв.

УДК 539.3; 517.958: 539.3

Ботогова М. Г., Михиевич А. П., Михасев Г. И. **Динамика слоистых балок содержащих электрореологический композиционный материал** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 27–33. В статье рассматриваются свободные и вынужденные колебания слоистых балок, содержащих электрореологический эластомер. Исследовано влияние напряженности электрического поля на частоты и декременты собственных колебаний балок. Получены амплитудно-частотные характеристики для сэндвич-балок, содержащих электрореологический композит с учетом напряженности электрического поля, температуры композита и амплитуды деформации. – Ил. 3. Библиогр.: 14 назв.

УДК 539.3

Захарчук Ю. В. **Упругое деформирование круговых трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем осесимметричными нагрузками** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 34–41. Проведена постановка задачи о симметричном изгибе несимметричной по толщине упругой круговой трехслойной пластины. Механико-математическая модель учитывает сжимаемость срединного слоя пакета. Полученное аналитическое решение позволяет с большей точностью рассчитывать напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин при различных нагрузках, граничных условиях и оценивать физические параметры прочности рассматриваемых конструкций. – Ил. 4. Библиогр.: 15 назв.

УДК 539.3

Нестерович А. В. **Неосесимметричное нагружение физически нелинейной трехслойной круговой пластины в своей плоскости** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 42–46. Получены уравнения равновесия в усилиях и перемещениях физически нелинейной трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении в ее плоскости. Рассмотрен метод итераций для ее решения, основанный на методе упругих решений Ильюшина. – Ил. 1. Библиогр.: 16 назв.

УДК 539.3

Василевич Ю. В., Остриков О. М. **Определение условий существования равновесного винтового нанодвойника в деформированном твердом теле** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 47–53. Получено условие равновесия винтового нанодвойника, находящегося вдали от поверхности деформированного твердого тела. Рассчитаны равновесные параметры такого двойника. Показано, что при отсутствии сил неупругой природы, препятствующих движению двойникообразующих дислокаций, последние стремятся выстроиться в стенку. При приближении такой стенки к устью двойника с дислокациями противоположного знака происходит аннигиляция двойникообразующих дислокаций и исчезновение нанодвойника. – Ил. 2. Библиогр.: 9 назв.

УДК. 539.3.534.1.

Поленов В. С., Чигарев А. В. **О математическом моделировании акустической эмиссии в анизотропных двухкомпонентных средах** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 54–58. В статье на основе обобщенного закона Гука теории упругости для анизотропных сред и уравнений движения, рассмотрена задача о математическом моделировании акустической эмиссии в анизотропных средах, состоящих из анизотропной упругой среды и несжимаемой жидкости. – Библиогр.: 10 назв.

УДК 532.5.032+531.12

Абрамович А. Е., Авдейчик Е. В., Конон П. Н. **Приближенная модель движения фронта жидкого слоя на вращающемся диске** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 59–65. Построена приближенная модель движения фронта ривулетного жидкого слоя на вращающемся диске, выведены уравнения движения капли как материальной точки с вязким трением. Предложен метод, позволяющий связать закон сопротивления фронта жидкого слоя при движении с коэффициентом кинематической вязкости жидкости. Проведено численное решение уравнений движения для различных жидкостей при разных угловых скоростях. Качественное сравнение результатов с экспериментами подтверждает возможность проведенного приближенного моделирования. – Ил. 4. Библиогр.: 12 назв.

УДК 621.9.011:517.962.1

Довнар С. С., Якимович А. М., Ширвель П. И., Якубовски А., Хыбовски Л., Танишк Дж. М., Пенкина А. Д. **FEA-audit and local redesign of practice-proved laboratory centrifuge machine** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 66–75. Проведен МКЭ-анализ несущей системы центрифуги. В целом, обна-

ружен умеренный уровень напряжений. Запас прочности ротора достигает 4,5 раз. Однако, сильное перенапряжение выявлено на галтелях несущих штифтов. Здесь закаленная сталь подвергается локальной пластической деформации (0.24%) и продолжает служить. Галтели являются точками выживания несущей системы. Их выносливость, вероятно, обусловлена эффектом автофреттирования. Виртуальные испытания позволяют предложить технику оптимизации формы галтели. Ее следует сочетать с локальным упрочнением поверхностного слоя. – Ил. 10. Табл. 1. Библиогр.: 13 назв.

УДК 539.42; 539.375

Щербаков С. С., Вэнь З., Шемет Л. А., Подгайская Д. А. **Объемная повреждаемость системы колесо-рельс с учетом контактного взаимодействия и изгиба рельса** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 76–82. В данной статье рассматривается трибофатическая постановка задачи для системы колесо/рельс. Она учитывает, как контактное взаимодействие элементов данной системы, так и изгиб всем железнодорожным составом рельса, лежащего на упругом основании. Представлен расчет объемной повреждаемости системы для различных материалов колеса и рельса. – Ил. 4. Табл. 7. Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

Можаровский В. В., Кушнир Р. М., Гачкевич А. Р., Кукареко В. А., Кушнеров А. В. **Некоторые вопросы исследования покрытий из функционально-градиентных материалов при контактном взаимодействии** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 83–92. Приведен обзор новых подходов по исследованию напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций (покрытий и оснований) из функционально-градиентных материалов с учетом температуры. На основании экспериментально-теоретических исследований покрытий из функционально-градиентных материалов и теоретических положений решения задач определения температуры и теплового потока в покрытиях показана возможность построения алгоритмов реализации определения температурных полей для покрытий из функционально-градиентных материалов. Представленный подход и численная методика расчета напряженного состояния может быть основой для дальнейшего развития решений трибологических задач с учетом температурных явлений. – Ил. 6. Библиогр.: 18 назв.

УДК 539.3+51-74

Николайчик М. А., Журавков М. А. **Оценка напряженно-деформированного состояния тубинговой крепи при тампонировании околоствольного массива горных пород** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 93–98. В статье представлены результаты конечно-элементного моделирования процесса возникновения предельного состояния в тубинговых кольцах в процессе тампонирования околоствольного массива при возведении тубинговой крепи. Определены зоны растяжения-сжатия конструкции для различных вариантах действующего давления на тубинги и применены критерии прочности в соответствующих главных напряжениях. Результаты показывают важность контроля технологического процесса закачки тампонажного раствора с целью формирования равномерно-распределенного давления по всей поверхности тубинговых колец. – Ил. 9. Табл. 1. Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.3

Можаровский В. В., Кузьменков Д. С., Коляскин И. И., Василевич Ю. В. **Реализация расчета контакта тел из армированных материалов, моделирующих взаимодействие элементов машин** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 99–107. Разработан алгоритм расчета контактного взаимодействия и напряженного деформированного состояния слоистых изотропных и ортотропных тел. Строятся аналитические зависимости, определяющие компоненты тензора напряжений и деформаций; производится дискретизация зоны контакта, то есть разбиение ее на некоторые граничные элементы, как на поверхности тела (покрытия), так и в упругом основании. Используя метод конеч-

ных элементов, создана компьютерная программа, реализующая определение напряжений и перемещений в объемном теле заданной формы. На примере расчета параметров (зоны контакта и давления, напряженного состояния) при контактном взаимодействии шины колеса и основания построены объемные графические зависимости. Результаты вычислений, а также исходные показатели давления, выводятся под изображениями. – Ил. 8. Библиогр.: 14 назв.

УДК 539.3

Холодарь Б. Г. **Напряженно-деформированное состояние гибкого консольного стержня, нагруженного следящей поперечной силой** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 108–113. Рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии гибкого линейно-упругого стержня при больших перемещениях под действием следящей поперечной силы и пропорционального ей момента. Для нескольких характерных форм изогнутой оси стержня прямоугольного сечения приведены числовые параметры, связывающие нагрузку с перемещениями и деформациями наиболее нагруженных сечений. – Ил. 6. Табл. 1 Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.3; 678.073

Шилько С. В., Дробыш Т. В., Петроковец Е. М., Сазанков А. П., Хотько А. В. **Экспериментальное определение упругих и вязкоупругих характеристик шинных резин** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 114–117. Для определения параметров моделей упругого и вязкоупругого деформирования, используемых в программном обеспечении MSC.Marc, выполнены комбинированные испытания 20-ти составов шинных резин при циклическом растяжении с последующей релаксацией. – Ил. 4. Библиогр.: 9 назв.

УДК 621.762.4

Дудяк А. И., Хвасько В. М. **Изгиб составных балок** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 118–120. В статье рассмотрен случай чистого изгиба трехслойной консольной балки, состоящей из ряда не связанных между собой стержней. Стержни выполнены из различных материалов, и каждый из них деформируется как отдельная независимая балка. Получены зависимости между изгибающим моментом, приходящимся на один стержень и полным изгибающим моментом. Введено понятие суммарной жесткости пакета стержней. – Ил. 1. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3

Каюмов Р. А., Гимазетдинов А. Р., Шакирзянов Ф. Р. **Определение характеристик модели ползучести стеклопластика на сдвиг по результатам изгиба труб квадратного сечения** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 121–125. Предложена методика идентификации характеристик ползучести при сдвиге однонаправленно армированных композитных материалов на основе анализа результатов испытаний и решения прямых и обратных задач деформирования балок трубчатого сечения, изготовленных из исследуемого материала. Для моделирования процесса ползучести использована теория упрочнения с четырьмя параметрами. Приведены экспериментальные результаты о трехточечном изгибе коротких труб квадратного сечения и результаты их обработки. Выявлено хорошее согласование данных экспериментов с результатами аналитических расчетов при двух значениях нагрузок. – Ил. 3. Библиогр.: 15 назв.

УДК 621.762.4

Дудяк А. И., Дикан Ж. Г., Мелеховец П. А., Миношин В. В. **Определение жесткостей сечения стержня, состоящего из разнородных материалов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 126–128. Рассмотрен вопрос определения суммарных жесткостей сечения стержня, состоящего из двух прочно соединенных между собой по длине стержней из разнородных материалов. Введено понятие центра жесткости и получены формулы для определения центра жесткости сечения и суммарных жесткостей при осевом растяжении – сжатии и изгибе. – Ил. 1. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3/539.4; 531.43; 536.2/536.4

Щербаков С. С., Сосновский Л. А., Басаран К. **Механотермодинамика, теория единой механики и трибология: общий подход к анализу энтропии** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 129–138. В работе представлен сравнительный анализ различных моделей оценки повреждений на основе энтропии в механике повреждений, теории единой механики, трибологии и механотермодинамике. – Ил. 2. Табл. 1. Библиогр.: 50 назв.

УДК 621.762.4

Дудяк А. И., Хвасько В. М. **Температурные напряжения в биметаллическом стержне** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 139–142. Рассмотрен вопрос возникновения нормальных напряжений в биметаллическом стержне при нагреве. Стержни изготовлены из разнородных материалов и отличаются друг от друга некоторыми физико-механическими характеристиками. Они сварены между собой по всей длине в плоскости их контакта методом сварки трением или сварки взрывом. Такой стержень работает как единое целое и подвергается чистому изгибу. Получены формулы для определения нормальных напряжений, возникающих при таком виде деформации. – Ил. 3. Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.3

Мармыш Д. Е. **Алгоритмические подходы численной оценки повреждаемости системы твердых тел** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 143–148. Рассмотрены три подхода к численному определению опасного объема и интегральной повреждаемости твердых тел. – Ил. 4. Библиогр.: 14.

УДК 531.011

Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н. **Некоторые математические аспекты виброизоляции временных технических устройств** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 149–153. Проведена постановка задачи о пассивной виброизоляции части технического устройства посредством резинометаллических упругих амортизаторов и гидropоры с инерционным трансформатором, обладающей квадратично нелинейной зависимостью от скорости движения поршня опорной крышки, приведено сравнение численных экспериментов линейной и нелинейной задач по критерию качественной эффективности рассматриваемых механических систем, основанном на наибольших энергетических потерях за один и тот же промежуток времени. – Ил. 4. Библиогр.: 12 назв.

УДК 539.3:519.63

Веремейчик А. И., Хвасевич В. М. **К решению осесимметричных краевых задач термоупругости непрерывно-неоднородных тел методом граничных интегральных уравнений** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 154–163. Статья посвящена исследованию напряженно-деформированного состояния неоднородных осесимметричных тел с использованием теории потенциала. С помощью метода возмущений осесимметричная краевая задача термоупругости непрерывно-неоднородных тел сводится к последовательности краевых задач термоупругости и теории упругости однородных тел. Построены сингулярные интегральные уравнения осесимметричной краевой задачи термоупругости при переменном коэффициенте линейного расширения. – Библиогр.: 9 назв.

УДК 539.3

Мойсейчик Е. А., Василевич Ю. В., Мойсейчик А. Е., Чигарев В. А., Яковлев А. А. **Расчетно-экспериментальное моделирование поверхностных дефектов стальной арматуры с учетом ее коррозионных повреждений** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 164–176. Представлен конечно-элементный анализ моделей стальной арматуры в предельном состоянии. Проведенное конечно-элементное моделирование работы на растяжение стального арматурного стержня с многослойной структу-

рой представляет сложную многофакторную механико-химическую задачу. Получены результаты, позволяющие производить всесторонний анализ поверхностных дефектов стальной арматуры. – Ил. 10. Табл. 5. Библиогр.: 26 назв.

УДК 621.835-41:514.764

Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н. **Проектирование деталей шагающих машин с применением перспективных методов дифференциальной геометрии** // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 177–184. В статье приведено теоретическое обоснование методов расчета плоских кривых по заданной кривизне в полярных координатах. Описываемые методы дифференциальной геометрии могут быть применены в системах автоматизированного проектирования. Полученная форма профиля поверхности, с заданной переменной кривизной, позволяет повысить износостойкость и долговечность деталей, улучшить эффективность работы узлов и систем шагающих мобильных машин различных конструкций. – Библиогр.: 8 назв.

УДК 537.312.6:624.042.5

Мартыненко Т. М., Скляр О. Н., Мартыненко И. М., Куранова О. В. **Выпучивание центрально сжатого стержня, открытого тонкостенного поперечного сечения вследствие кручения и изгиба** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 185–189. В результате расчетов для стержней открытого тонкостенного поперечного сечения, можно сделать следующие выводы теоретически всякая упругая система при определенных условиях нагружения может перейти в неустойчивое состояние равновесия. Так как модуль упругости металлических конструкций велик по сравнению с пределом упругости, то возможно, что эти элементы становятся неустойчивыми в упругой области только при значительных упругих деформациях. Это имеет место, когда по крайней мере один или два размера сжатого элемента являются малыми по сравнению с третьим размером, как, например, в случае гибких стержней или тонких пластинок и оболочек. Однако вследствие быстрого уменьшения модуля упругости при переходе через предел упругости диапазон нагрузок, при которых может возникнуть неустойчивое состояние при обычных условиях нагружения, значительно расширяется. Частичное нарушение внутренней структуры материала после перехода предела упругости ускоряет начало критического состояния выпучивания. Этот факт объясняет то важное положение, которое занимают проблемы устойчивости при расчете металлических конструкций. – Ил. 1. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

Сукиасов В. Г. **Анализ механических аспектов пластинчатого остеосинтеза при оскольчатом переломе берцовой кости** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 190–195. Теоретически изучено взаимодействие фрагментов сломанной берцовой кости с фиксатором пластинчатого типа. Созданы объемные модели и выполнен их конечноэлементный анализ с целью сопоставления двух способов фиксации оскольчатого перелома. – Ил. 4. Табл. 10. Библиогр.: 6 назв.

УДК 531.36

Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н. **Исследование деформирований витков упругой цилиндрической пружины** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 196–201. Проведена постановка задачи о динамическом напряженно-деформируемом состоянии однородной упругой витой цилиндрической пружины. Получены аналитические формулы решений, зависящих от двух параметров, проведены численные эксперименты, сопоставлены результаты относительных деформаций, представленных на динамической схеме и вычисленных компонентов тензора деформаций. – Ил. 4. Библиогр.: 15 назв.

УДК 539.3

Миронов Д. Н., Чигарев А. В. **Моделирование динамической системы летательного аппарата** // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 202–207. В работе получена система дифференциальных уравнений,

которая позволяет определить параметры собственных колебаний элементов сложной механической системы, по изменениям которых можно оценить изменение ее технического состояния, а также оптимально подобрать размеры, массу и материал ее составных элементов. – Ил. 2. Библиогр.: 3 назв.

УДК 616.314-74; 61:534.292

Костецкий Ю. А., Савченко А. Л., Рубникович А. С. **Исследование напряженно-деформационных состояний тканей зуба в системах «зуб-волновод» и «зуб-волновод-пломба»** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 208–214. Работа посвящена изучению целесообразности и перспективности использования низкочастотного ультразвука при пломбировании корневых каналов зубов, а также исследованию эффективности эндодонтического лечения зубов при помощи низкочастотного ультразвука. Приведенные в работе выкладки позволяют обосновать возможность пломбирования каналов зуба с использованием ультразвуковых колебаний с точки зрения механической прочности зуба. Показано, что напряжения в зубной ткани, возникающие при действии ультразвука, не превышают допускаемых, как при отсутствии в канале пломбировочного материала, так и при его наличии. – Ил. 4. Табл. 1. Библиогр.: 14 назв.

УДК 62-233.3/9

Бочарова Н. В. **О моделировании деталей машин в SolidWorks и визуализации движения механизма** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 215–218. В статье представлено исследование сборочного узла «Планетарный механизм» и механизма «Карданная передача», используя инструмент «Двигатель» программного комплекса SolidWorks, изучены возможности вывода результатов в виде эпюр угловых скоростей, что позволяет анализировать работоспособность механизма, анимация движения конструкции позволяет визуализировать движение механизмов. Имеется возможность тестировать работу механизмов и найти оптимальный вариант для заданных параметров на этапе проектирования конструкции сборки. – Ил. 4. Библиогр.: 3 назв.

УДК 623.4;5

Пилипчук А. П., Грибков Ю. А., Девойно Д. Г., Летко К. Н., Мокшин А. В., Мишин А. А. **Моделирование деформации круглой мишени при низкоскоростном ударе** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 219–223. Выполнено математическое моделирование процесса деформирования круглой пластины при низкоскоростном ударе на основе использования основных положений контактной теории Герца и результатов теории изгиба пластин. Представлены результаты расчета значения прогиба в центре круглой стальной пластины при воздействии свинцового сферического ударника в зависимости от толщины пластины. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными показывает удовлетворительное соответствие результатов моделирования и эксперимента. – Ил. 3. Библиогр.: 12 назв.

УДК 537.312.6:624.042.5

Мартыненко Т. М., Пронкевич С. А., Скляр О. Н., Мартыненко И. М. **Устойчивость несущих элементов конструкции при сопряженных воздействиях температурных полей и силовых локализованных и распределенных нагрузок** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 224–229. Реализована концепция формирования устойчивости прямоугольных и квадратных в плане оболочек с изменяемой геометрией и их механического поведения под воздействием собственного веса в условиях циклических температурных воздействий в зонах развития пластических деформаций, которые способствуют прогрессирующему разрушению конструкций; а также показаны опасные площади при оценке деформаций при местном выпучивании в соответствии с минимальным критическим напряжением. Установлено влияние комбинированного нагружения на величину критических нагрузок и закритическое поведение оболочки в условиях. – Ил. 10. Библиогр.: 6 назв.

УДК 693;539.4

Каюмов Р. А., Сулейманов А. М., Страхов Д. Е. **Моделирование процесса деградации композитных материалов** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 230–236. Исследованы плоские протяженные элементы из композитного материала, армированного стекловолокном. Получены зависимости их остаточных деформаций от времени нахождения под напряжением в различных средах, в том числе подверженных воздействию УФ-излучения. Деформирование исследуемых образцов проведено методом продольного изгиба. Рассмотрены различные уровни деформирования вплоть до 60 % от разрушающей величины. На основе экспериментальных данных об остаточной прочности образцов, подвергаемых продольному изгибу и облучению УФ, предложено соотношение, отражающее изменение прочности исследуемого материала от уровня напряжений, мощности облучения и времени воздействия этих факторов. Экспериментальные и расчетные значения разрушающих нагрузок показали согласованность результатов. – Ил. 4. Табл. 2. Библиогр.: 15 назв.

УДК 539.4

Чигарев А. В., Ботогова М. Г., Савицкая А. В. **Прорастание сквозной трещины в слоистом покрытии и проектировании трещиностойкого инструмента** // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2021, вып. 36, стр. 237–241. Рассмотрели вычисление осредненных величин на основе 2d модели слоистого тела, находящегося под воздействием силовых или термосиловых нагрузок, вызывающих распространение трещины поперек слоев. В результате осреднения получили математика-механическую модель слоистого пакета. – Ил. 3. Библиогр.: 8 назв.

ABSTRACTS

UDC 534.121.1

Markova M. V., Leonenko D. V. **Definition of the initial-boundary value problem for axisymmetric vibrations of a circular three-layer plate with variable thickness** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 3–10. Vibrations of a circular three-layer plate with variable thickness are examined. The problem is analyzed in a cylindrical coordinate system. The kinematics behavior of the asymmetrical in thickness sandwich construction was described on the hypothesis of polyline. Differential equations describing forced vibration of a system are obtained using the Hamilton variational principle. Solidarily with the initial and boundary conditions the obtained differential equations allow us to investigate the transverse vibrations of circular three-layer plates with asymmetric thickness, consisting of thin outer bearing layers with variable thickness and a thick light middle filler that ensures collaboration of the outer layers. – Fig. 1. Ref.: 14 titles.

UDC 539.4

Vasilevich Yu. V., Ostrikov O. M., Chigarev V. A. **The role of inelastic forces in the formation of residual screw wedge-shaped nanotwins** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 11–14. The role of internal friction forces in the formation of residual wedge-shaped nanotwins has been studied. It is shown that an increase in forces of an inelastic nature contributes to the retention of smaller nanotwins in equilibrium, while a decrease in the internal friction force promotes the growth of a nanotwin. – Ref.: 3 titles.

UDC 539.3

Starovoitov E. I., Zhuravkov M. A., Yarovaya A. V. **Thermoelastic free oscillations of a three-layer circular plate** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 15–20. Fluctuations in the temperature field of a circular three-layer plate are considered. A system of partial differential equations describing the transverse vibrations of the plate under consideration is given. Boundary and initial conditions are formulated. A transcendental equation for calculating eigenvalues is obtained. Formulas for determining the frequencies of natural oscillations are written out. A numerical parametric analysis of the dependence of the eigenvalues and oscillation frequencies on temperature, with a pinched plate contour, is carried out. – Fig. 3. Tab. 2. Ref.: 18 titles.

UDC 539.3

Kozel A. G. **Influence of layer materials on bending of a sandwich plate on Pasternak foundation** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 21–26. The formulation and solution of the boundary value problem of the axisymmetric bending of an elastic sandwich plate on a two-parameter Pasternak foundation is presented. In thin load-bearing layers, Kirchhoff's hypotheses are valid; for a sufficiently thick, lightweight, incompressible aggregate, the Timoshenko hypothesis is applied. Differential equations of equilibrium in efforts and displacements are obtained using the variational Lagrange method. The analytical solution is written out in terms of the Bessel functions. A numerical analysis of the obtained solution is carried out, displacements and stresses are investigated depending on the materials of the supporting layers and filler. – Fig. 4. Ref.: 15 titles.

UDC 539.3; 517.958: 539.3

Botogova M. G., Nikhiyevich A. P., Mikhasev G. I. **Dynamics of laminated beams containing electro-rheological composite material** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 27–33. The article investigates free and forced vibrations of laminated beams containing an electrorheological elastomer. The influence of the electric field strength on the frequencies and decrements of natural vibrations of beams has been investigated. Amplitude-frequency characteristics for sandwich beams containing electrorheological composite has been obtained accounting for the electric field strength temperature and the amplitude of strength of composite. – Fig. 3. Ref.: 14 titles.

UDC 539.3

Zakharchuk Yu. V. **Elastic deformation of circular three-layer plates with a compressible filler by axisymmetric loads** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 34–41. The formulation of the problem of symmetric bending of an asymmetric in thickness elastic circular three-layer plate is carried out. The mechanical-mathematical model takes into account the compressibility of the middle layer of the package. The obtained analytical solution makes it possible to more accurately calculate the stress-strain state of three-layer plates under various loads, boundary conditions and to evaluate the physical parameters of the strength of the structures under consideration. – Fig. 4. Ref.: 15 titles.

UDC539.3

Nesterovich A. V. **Nonaxisymmetric loading of a physically nonlinear three-layer circular plate in its plane** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 42–46. Equations of equilibrium in the forces and displacements of a physically nonlinear three-layer circular plate are derived under nonaxisymmetric loading in its plane. An iteration method for its solutions based on the Ilyushin elastic solution method is considered. – Fig. 1. Ref.: 16 titles.

UDC 539.3

Vasilevich Yu. V., Ostrikov O. M. **Determination of the conditions for the existence of an equilibrium helical nanotwinning in a deformed solid** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 47–53. The condition of equilibrium helical nanotwin located away from the surface of the deformed solid. Equilibrium parameters of the twin. It is shown that in the absence of the inelastic nature of the forces that impede the movement of twinning dislocations, the last tend to line up in the wall. When approaching a wall to twin the mouth with dislocations of opposite sign are annihilated twinning dislocations and the disappearance nanotwin. – Fig. 2. Ref.: 9 titles.

UDC. 539.3.534.1.

Polenov V. S., Chigarev A. V. **On mathematical modeling of acoustic emission in anisotropic two-component media** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 54–58. In the article, based on the generalized Hooke's law of elasticity theory for anisotropic media and equations of motion, the problem of mathematical modeling of acoustic emission in anisotropic media consisting of an anisotropic elastic medium and an incompressible fluid is considered. – Ref.: 10 titles.

UDC 532.5.032+531.12

Abramovich A. E., Avdeichik E. V., Konon P. N. **Approximate model of the motion of the front of a liquid layer on a rotating disk** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 59–65. An approximate model of the motion of the front of a rivulet liquid layer on a rotating disk is constructed, the equations of motion of a drop as a material point with viscous friction are derived. A method is proposed that makes it possible to relate the law of resistance of the front of a liquid layer during motion with the coefficient of kinematic viscosity of the liquid. The numerical solution of the equations of motion for various fluids at different angular velocities is carried out. A qualitative comparison of the results with experiments confirms the possibility of an approximate simulation. – Fig. 4. Ref.: 12 titles.

UDC 621.9.011:517.962.1

Doumar S., Iakimovitch A., Shirvel P., Jakubovski A., Chybovski L., Tanishq J. M., Penkina A. **FEA-audit and local redesign of practice-proved laboratory centrifuge machine** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 66–75. Stress state of the centrifuge is revealed by FEA. Common stress level is stated as moderate, with sufficient safety ratio (4.5 in the rotor e.g.). Significant contact openings are disclosed. Fillet between pin steps undergoes local overstressing, causing plastic deformation up to 0.24 %. So, hardened steel have survived plastic flow and continues to serve. It is the rare situation and an example of the critical point of surviving (CPS). Autofrettage should be taken as a mechanism of surviving. CPS prediction and precise

local hardening are strongly recommended in junction with fillet radius increasing. – Fig. 10. Tab. 1. Ref.: 13 titles.

UDC 539.42; 539.375

Sherbakov S. S., Wen Z., Shemet L. A., Padhaiskaya D. A. **Volumetric damage of the wheel-rail system, taking into account the contact interaction and the bending of the rail** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 76–82. This paper considers tribo-fatigue formulation of the problem for interaction of wheel/rail system elements. It takes into account both contact interaction of system elements and bending of the rail lying on an elastic foundation by a train. Volume damageability of wheel-rail pair for various combinations of materials of this pair is presented. – Fig. 4. Tab. 7. Ref.: 9 titles.

UDC 539.3

Mozharovsky V. V., Kushnir R. M., Hachkevych A. R., Kukareko V. A., Kushnerov A. V. **Some questions of the study of coatings made of functional gradient materials in contact interaction** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 83–92. An overview of new approaches to the study of the stress-strain state of layered structures (coatings and bases) made of functionally-gradient materials with allowance for temperature is given. On the basis of experimental and theoretical studies of coatings made of functional-gradient materials and theoretical provisions for solving problems of determining the temperature and heat flux in coatings, the possibility of constructing algorithms for the implementation of determining the temperature fields for coatings made of functional-gradient materials is shown. The presented approach and the numerical method for calculating the stress state can be the basis for the further development of solutions to tribological problems taking into account temperature phenomena. – Fig. 6. Ref.: 18 titles.

UDC 539.3+51-74

Nikolaychik M. A., Zhuravkov M. A. **Assessment of the stress-strain state of tubing support during tamponing of a near-barreled rock mass** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 93–98. The results of finite element modeling of limiting state occurrence process in tubing rings during plugging of near-shaft massif during the construction of tubing lining are presented in article. The tension and compression zones of the structure for various pressure options are determined and failure criteria using the corresponding principal stresses are applied. The results show the importance of controlling the technological process of pumping the cement slurry in order to form uniformly distributed pressure over the entire surface of tubing rings. – Fig. 9. Tab. 1. Ref.: 2.

UDC 539.3

Mozharovsky V. V., Kuzmenkov D. S., Kolyaskin I. I., Vasilevich Yu. V. **Implementation of the contact of bodies calculations made of reinforced materials that simulate the interaction of machine elements** / International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 99–107. An algorithm for calculating the contact interaction and stress-strain state of layered isotropic and orthotropic bodies is developed. Analytical dependences that determine the components of the stress and strain tensor are constructed; the contact zone is discretized, that is, it is divided into some boundary elements both on the surface of the body (coating) and in the elastic base. Using the finite element method, a computer program is created that implements the determination of stresses and displacements in a three-dimensional body of a given shape. On the example of calculating the parameters (contact zone and pressure, stress state) for the contact interaction of the wheel tire and the base, three-dimensional graphical dependencies are constructed. The results of calculations, as well as the initial pressure values, are displayed under the images. – Fig. 8. Ref.: 14 titles.

UDC 539.3

Kholodar' B. G. **A stress-strain state of a flexible cantilever rod under the action of a tracking transverse force** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 108–113. This paper considers the stress-strain state of a flexible linear-elastic rod at large displacements under the action of a tracking transverse force and a moment proportional to the moment. Numerical parameters that relate the load to the displacements and deformations

of the most loaded sections are presented. This is shown for several characteristic forms of the curved axis of a rectangular bar. – Fig. 6. Ref.: 2 titles.

UDC 539.3; 678.073

Shil'ko S. V., Drobysh T. V., Petrokovets E. M., Sazankou A. P., Khotko A. V. **Experimental determination of elastic and viscoelastic characteristics of tire rubbers** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 114–117. The combined tensile tests of 20 tire rubber compositions were carried out under cyclic loading with subsequent relaxation in order to determine the parameters of the models of elastic and viscoelastic deformation implemented in the MSC.Marc finite element analysis software. – Fig. 5. Ref.: 9 titles.

UDC 621.762.4

Dudyak A. I., Khvasko V. M. **Bending of composite beams** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 118–120. The article considers the case of pure bending of a three-layer cantilever beam consisting of a number of unrelated rods. The rods are made of various materials, and each of them is deformed as a separate independent beam. The dependences between the bending moment per rod and the total bending moment are obtained. The concept of total stiffness of a package of rods is introduced. – Fig. 1. Ref.: 3 titles.

UDC 539.3

Kayumov R. A., Gimazetdinov A. R., Shakirzyanov F. R. **Determination of the characteristics of the fiberglass shear creep model based on the results of bending square section pipes** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 121–125. A method for identifying the shear creep characteristics of unidirectionally reinforced composite materials is proposed based on the analysis of test results and the solution of direct and inverse problems of deformation of tubular beams made of the material under study. To model the creep process, the hardening theory with four parameters is used. Experimental results on the three-point bending of short square pipes and the results of their processing are presented. A good agreement between the experimental data and the results of analytical calculations was found for two values of loads. – Fig. 3. Ref.: 15 titles.

UDC 621.762.4

Dudyak A. I., Dikan Zh. G., Melekhovets P. A., Minoshin V. V. **Determination of cross-section stiffness of a rod consisting of heterogeneous materials** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 126–128. The question of determining the total stiffness of the cross-section of a rod consisting of two rods of dissimilar materials firmly connected to each other along the length is considered. The concept of the center of stiffness is introduced and formulas are obtained for determining the center of stiffness of the section and the total stiffness under axial tension - compression and bending. – Fig. 1. Ref.: 3 titles.

UDC 539.3/539.4; 531.43; 536.2/536.4

Sherbakov S. S., Sosnovskiy L. A., Basaran C. **Mechanothermodynamics, unified mechanics theory and tribology: a general approach to the analysis of entropy** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 129–138. The paper presents a comparative analysis of various models of entropy based damage assessment in damage mechanics, unified mechanics theory, tribology and mechanothermodynamics. – Fig. 2. Tab. 3. Ref.: 50 titles.

UDC 621.762.4

Dudyak A. I., Khvasko V. M. **Temperature stresses in a bimetallic rod** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 139–142. The question of the occurrence of normal stresses in a bimetallic rod during heating is considered. The rods are made of dissimilar materials and differ from each other in some physical and mechanical characteristics. They are welded together along the entire length in the plane of their contact by friction welding or explosion welding. Such a rod works as a whole and is subjected to pure bending. Formulas for determining the normal stresses arising from this type of deformation are obtained. – Fig. 3. Ref.: 2 titles.

UDC 539.3

Marmysh D. E. **Algorithmic approaches for numerical estimation of damage to a system of solid bodies** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 143–148. Three approaches to the numerical determination of the hazardous volume and integral damage of solids are considered. – Fig. 4. Ref.: 14 titles.

UDC 531.011

Dokukova N. A., Kaftaikina E. N. **Some mathematical aspects of vibration isolation of modern technical devices** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 149–153. The task of passive vibration isolation of a part of the technical device by means of rubber-metal elastic shock absorbers and a hydro-rotor with an inertial transformer, which has quadratic nonlinear dependence on the speed of movement of the piston of the support cover, was set, a comparison of numerical experiments of linear and nonlinear problems was made according to the criterion of qualitative efficiency of the considered mechanical systems, based on the greatest energy losses in the same period of time. – Fig. 4. Ref.: 5 titles.

UDC 539.3:59.63

Veremeichik A. I., Hwisevich V. M. **To solve axisymmetric boundary value problems of thermoelasticity of continuously inhomogeneous bodies by the method of boundary integral equations** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 154–163. The article is devoted to the study of the stress-strain state of inhomogeneous axisymmetric bodies using the potential theory. Using the perturbation method, the axisymmetric boundary value problem of thermoelasticity of continuously inhomogeneous bodies is reduced to a sequence of boundary value problems of thermoelasticity and the theory of elasticity of homogeneous bodies. Singular integral equations of the axisymmetric boundary value problem of thermoelasticity with a variable coefficient of linear expansion are constructed. – Ref.: 9 titles.

UDC 539.3

Moiseychik E. A., Vasilevich Yu. V., Moiseychik A. E., Chigarev V. A., Yakovlev A. A. **Computational and experimental modeling of surface defects of steel reinforcement taking into account its corrosion damage** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 164–176. The finite element analysis of models of steel reinforcement in the limiting state is presented. The finite element modeling of the tensile work of a steel reinforcing bar with a multilayer structure is a complex multifactorial mechanical and chemical problem. The results have been obtained that allow for a comprehensive analysis of surface defects of steel reinforcement. – Fig. 10. Tab. 5. Ref.: 26 titles.

UDC 621.835-41:514.764

Skoybeda A. T., Zhukovets V. N. **Design of parts of walking machines using advanced methods of differential geometry** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 177–184. The article describes a theoretical substantiation of methods for calculating plane curves for a given curvature in polar coordinates. The described methods of differential geometry can be applied in computer-aided design systems. The resulting shape of the surface profile, with a given variable curvature, makes it possible to increase the wear resistance and durability of parts, to improve the efficiency of the units and systems of walking mobile machines of various designs. – Ref.: 8 titles.

UDC 537.312.6:624.042.5

Martynenko T. M., Sklyar O. N., Martynenko I. M., Kuranova O. V. **Buckling of a centrally compressed rod with an open thin-walled cross section due to torsion and bending** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 185–189. As a result of calculations for rods of an open thin-walled cross section, the following conclusions can be drawn theoretically, any elastic system under certain loading conditions can go into an unstable state of equilibrium. Since the modulus of elasticity of metal structures is large compared to the elastic limit, it is possible that these elements become unstable in the elastic region only with significant elastic deformations. This is the case when at least one or two sizes of the compressed element are small compared

to the third size, as, for example, in the case of flexible rods or thin plates and shells. However, due to the rapid decrease in the modulus of elasticity when passing through the elastic limit, the range of loads at which an unstable state may occur under normal loading conditions is significantly expanded. A partial violation of the internal structure of the material after the transition of the elastic limit accelerates the onset of the critical state of buckling. This fact explains the important position occupied by the problems of stability in the calculation of metal structures. – Fig. 1. Ref.: 6 titles.

UDC 539.3

Sukiasov V. G. **Analysis of the mechanical aspects of plate-type osteosynthesis in a comminuted fracture of the tibia** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 190–195. The interaction of fragments of a broken tibia with a plate-type fixator was studied theoretically. Three-dimensional models were created and their finite element analysis was performed in order to compare the two methods of fixing a comminuted fracture. – Fig. 4. Tab. 10. Ref.: 6 titles.

UDC 531.36

Dokukova N. A., Kaftaikina E. N. **Investigation of deformations of elastic cylinder spring turns** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 196–201. Task on dynamic stress-deformable state of homogeneous elastic helical coil spring was set. Analytical forms of solutions depending on two parameters were obtained, numerical experiments were carried out, the results of relative deformations presented on the dynamic diagram and the calculated components of the strain tensor were compared. – Fig. 4. Ref.: 15 titles.

UDC 539.3

Mironov D. N., Chigarev A. V. **Modeling of the dynamic system of an aircraft** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 202–207. In the work, a system of differential equations is obtained, which allows us to determine the parameters of the natural oscillations of the elements of a complex mechanical system, according to the changes of which it is possible to assess the change in its technical condition, as well as optimally select the dimensions, mass and material of its constituent elements. – Fig. 2. Ref.: 3 titles.

UDC 616.314-74; 61:534.292

Kostetsky Y. A., Savchenko A. L., Rubnikovich A. S. **Study of stress-deformation states of tooth tissues in the systems «tooth-waveguide» and «tooth-waveguide-filling»** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 208–214. The paper studies the feasibility and prospects of low-frequency ultrasound use for filling the root canals of teeth, as well as the effectiveness of endodontic dental treatment using low-frequency ultrasound. The calculations in the work present the possibility of filling the tooth canals using ultrasonic vibrations from the point of view of the mechanical strength of the tooth. It is shown that the stresses in the dental tissue arising from the action of ultrasound do not exceed the permissible values, both in the absence of filling material in the canal, and in its presence. – Fig. 4. Tab. 1 Ref.: 14 titles.

UDC 62-233.3/9

Bocharova N. V. **On modeling machine parts in SolidWorks and visualization of the movement of the mechanism** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 215–218. The article presents a study of the "Planetary mechanism" assembly unit and the "gimbal transmission" mechanism using the "Engine" tool of the SolidWorks software package, the possibilities of displaying results in the form of angular velocity plots are studied, which allows analyzing the operability of the mechanism, animation of the movement of the structure allows visualizing the movement of mechanisms. It is possible to test the operation of mechanisms and find the best option for the specified parameters at the design stage of the assembly structure. – Fig. 4. Ref.: 3 titles.

UDC 623.4;5

Pilipchuk A. P., Gribkov Yu. A., Devoino D. G., Letko K. N., Mokshin A. V., Mishin A. A. **Modeling of deformation of a round target at a low-velocity impact** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 219–223. Mathematical modeling of the deformation process of a round plate under low-velocity impact is performed based on the use of the basic provisions of the Hertz contact theory and the results of the theory of plate bending. The results of calculating the deflection value in the center of a round steel plate under the influence of a lead spherical striker, depending on the thickness of the plate, are presented. Comparison of the obtained results with experimental data shows a satisfactory correspondence of the simulation and experimental results. – Fig. 3. Ref.: 12 titles.

UDC 537.312.6:624.042.5

Martynenko T. M., Pronkevich S. A., Sklyar O. N., Martynenko I. M. **Stability of load-bearing structural elements under the combined effects of temperature fields and localized and distributed force loads** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 224–229. The concept of forming the stability of rectangular and square shells with unchangeable geometry and their mechanical behavior under the influence of their own weight under conditions of cyclic temperature influences in the zones of development of plastic deformations that contribute to the progressive destruction of structures is implemented; and dangerous areas are also shown when assessing deformations with local buckling in accordance with the minimum critical stress. The influence of combined loading on the magnitude of critical loads and the supercritical behavior of the shell under conditions is established. – Fig. 10. Ref.: 6 titles.

UDC 693;539.4

Kayumov R. A., Suleymanov A. M., Strakhov D. E. **Modeling of the degradation process of composite materials** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 230–236. Flat extended elements made of composite material reinforced with glass fiber are investigated. The dependences of their residual deformations on the time spent under stress in various environments, including those exposed to UV radiation, are obtained. Deformation of the studied samples was carried out by the method of longitudinal bending. Various levels of deformation up to 60% of the destructive value are considered. Based on experimental data on the residual strength of samples subjected to longitudinal bending and UV irradiation, a ratio is proposed that reflects the change in the strength of the material under study from the stress level, irradiation power and exposure time of these factors. Experimental and calculated values of destructive loads showed consistency of the results. – Fig. 4. Tab. 2. Ref.: 15 titles.

UDC 539.4

Chigarev A. V., Botogova M. G., Savitskaya A. V. **The germination of a through crack in a layered coating and the design of a crack-resistant tool** // International Scientific and Technical Collection «Theoretical and Applied Mechanics», Minsk, 2021, issue 36, p. 237–241. We considered the calculation of averaged values based on a 2d model of a layered body under the influence of force or thermosilic loads causing crack propagation across the layers. As a result of averaging, a mathematical-mechanical model of a layered package was obtained. – Fig. 3. Ref.: 8 titles.

ПРАВИЛА ПРИЕМА СТАТЕЙ

В сборник «Теоретическая и прикладная механика» принимаются статьи, авторами которых являются профессорско-преподавательский состав, аспиранты, соискатели, докторанты, научные сотрудники, инженеры, ведущие специалисты, работающие в учебных учреждениях, исследовательских и научно-технических организациях Республики Беларусь. В сборнике так же могут публиковаться статьи студентов и магистрантов в соавторстве с научными руководителями. В сборнике могут публиковаться работы зарубежных авторов. Статьи могут присылаться на английском языке.

Материалы статей авторы могут представить в редакцию на электронном носителе или прислать по электронной почте. Материалы, присланные в редакцию сборника автору(-ам) не возвращаются. Редакция берет на себя обязательства по недопущению распространения сторонним лицам присланных автором(-ами) материалов.

Основные требования к присылаемым статьям основываются на требованиях ВАК Республики Беларусь к оформлению научных публикаций (статей). Требования составлены в соответствии с главой № 5 «Инструкции о порядке оформления квалификационной научной работы (диссертации) на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук, автореферата и публикаций по теме диссертации», утвержденной постановлением Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь 28.02.24 г. № 3.

Статьи, поступившие в редакцию сборника, рассматриваются редакционной коллегией сборника в двухнедельный срок на предмет соответствия статьи профилю издания и требованиям к оформлению. В случае несоответствия материалов указанным требованиям редакция может отправить статью ответственному автору на доработку или отказать в публикации данной статьи. В случае грубого нарушения правил подготовки статьей или очевидного несоответствия тематики статьи тематике издания – статья не принимается к рассмотрению. Максимальное количество статей, принимаемых к публикации от одного автора или от одного коллектива авторов – не более трех штук.

Редакция не принимает статьи, опубликованные ранее в других журналах или научных изданиях, а также материалы дублирующие предшествующие работы автора(-ов) или доподлинно копирующие части из общедоступных и известных учебных пособий или публикаций. Возможна публикация расширенного варианта какой-либо работы с обязательным упоминанием исходного ее варианта в списке литературных источников и тексте. Поступившие в редакцию материалы проверяются на «антиплагиат» посредством общедоступных в интернете баз публикаций. Авторы статей несут всю ответственность за достоверность и точность содержащейся в них информации, корректность имеющихся в тексте ссылок на интернет-ресурсы и литературу. Все ссылки на литературу и источники должны соответствовать общепринятому формату ГОСТ.

По содержанию статьи должны быть современными, на актуальные и востребованные темы теоретической и прикладной механики, механики материалов, механики деформируемого твердого тела и др. В статье должна быть представлена ее научная и практическая ценность. Статьи должны содержать следующие основные разделы или их аналоги: «Введение», «Постановка задачи», «Решение задачи», «Заключение/Выводы». Статьи должны содержать четкую логическую структуру повествования, проходящую через весь текст. Задача и ее решение должны быть изложены научным языком с лингвистически и грамматически верными пояснениями. В тексте повествования допускается использование только общеизвестных и «не двусмысленных» научных концепций и понятий без двойного изложения материала, а также точности словоупотребления. Предоставляемая статья должна описывать решение поставленной проблемы, в ней должна быть представлена возможность проверки методов и результатов исследования.

В представляемой статье не допускается использование неприемлемых с морально-этической точки зрения читателей выражений и смысловых концептов. Автор несет полную ответственность за информацию, представляемую в статье. В случае, если редакция журнала не может проанализировать структуру или смысловую последовательность информации, представленной в статье, то такие материалы либо отправляют на доработку автору(-ам), либо не принимают к рассмотрению.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Оформление статьи должно удовлетворять следующим требованиям:

Формат документа – *Microsoft Word 2007, 2010* и выше, Размер бумаги – А4 (210×297мм).

Поля. Верхнее – 20 мм, нижнее – 25 мм, левое – 25 мм, правое – 25 мм.

Объем статей не должен превышать 8 страниц (не менее 14 тысяч печатных знаков). В случае значительного превышения установленного допустимого количества страниц на статью рекомендуется разделить статью на две последовательные статьи с соответствующей нумерацией. Структура статьи должна включать основные разделы: «Введение», «Основная часть», «Выводы», «Литература»; а также дополнительные разделы необходимые для раскрытия смысла статьи.

Язык статьи. Статья должна быть написана на русском языке, белорусском языке или английском языке.

Заголовок. УДК – указывается(-ются) индекс(-ы) публикации по универсальной десятичной классификации, в верхнем левом углу листа (прописными буквами, шрифт 12 пт., курсив, выравнивание по левому краю). Затем указывается название доклада (прописными буквами, шрифт 12 пт., полужирный, выравнивание текста по центру), затем фамилия(-ии) и инициалы автора(-ов) (шрифт 12 пт., полужирный, выравнивание текста по центру). Затем – название(-я) учреждения(-ий), организации(-ий) (выравнивание текста по центру, шрифт 11 пт., курсив). Фамилия(-ии) и названия организации(-ий) имеют верхний индекс, указывающий на принадлежность одного к другому.

Основной текст. Статья должна быть оформлена в соответствии с ГОСТ 7.5–98 «Журналы, сборники, информационные издания. Издательское оформление публикуемых материалов», ГОСТ 2.105–95 «Межгосударственный стандарт. Общие требования к текстовым документам». Шрифт текста Times New Roman – обычный – 12 пт. Межстрочный интервал – одинарный, первая строка – 1 см. Отступ: слева – 0, справа – 0. Интервал: перед – 0, после – 0. Автоматическая расстановка переносов. Запрет висячих строк. Выравнивание текста по ширине. Страницы не нумеруются.

Формулы. Формулы должны быть подготовлены в программе *MathType* (Размер формул: Обычный – 14 пт., Индекс – 11 пт., Малый индекс – 9 пт., Символ – 16 пт., Малый символ – 14 пт.; одно условие: Переменная – Курсив). В случае невозможности использования программы *MathType*, допускается использование приложения *Microsoft Equation*, входящего в состав *MS Word*, с таким же шрифтом и размером, как и основной текст статьи. Формулы располагаются по центру страницы. Нумерация сквозная.

Буквенные обозначения. Буквы (прописные и строчные) латинского алфавита набираются курсивом. Русские, греческие буквы и целостные выражения набираются прямыми символами.

Размерность всех физических величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ).

Принятые обозначения расшифровываются непосредственно в тексте статьи.

Заголовки набираются шрифтом 12 пт. полужирным, курсивным, полужирным – курсивным. Переносы заголовков запрещаются.

Таблицы набираются шрифтом 12 пт. Если таблица не помещается на страницу, допускается уменьшение шрифта до 9 пт. Таблицы размещаются после первого упоминания о них в тексте. Заголовки таблиц располагаются строго по центру, шрифт 11 пт. Линии таблиц стандартные 0,5 пт. Размеры таблиц не должны выходить за границы текста.

Иллюстрации размещаются по тексту сразу после первого упоминания о них в тексте. Иллюстрации должны быть четкими и контрастными (в формате .jpg, .png). Каждая иллюстрация должна иметь подрисовочную подпись (по центру, шрифт 11 пт.). Графики и диаграммы представляются как рисунки. Графический материал должен быть оформлен в соответствии с требованиями Р 50-77–88 «Рекомендации ЕСКД. Правила выполнения диаграмм».

Литература приводится в конце статьи. Список литературы должен быть составлен в порядке появления ссылок в тексте, которые помещаются в квадратные скобки. Сведения об источниках, включенных в список, необходимо давать в соответствии с требованиями ГОСТ 7.1-03 «Библиографическое описание» и ГОСТ 7.82–2001 «Библиографическое описание электронных ресурсов».

Резюме. В конце статьи через 1 интервал печатается «Резюме» на русском языке и «Summary» (не более 75 слов) на английском языке. Так же прилагается переводом на английский язык фамилии(-й) автора(-ов) и названия статьи.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Маркова М. В., Леоненко Д. В.</i> Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трехслойной пластины переменной толщины	3
<i>Василевич Ю. В., Остриков О. М., Чигарев В. А.</i> Роль сил неупругой природы в формировании остаточных винтовых нанодвойников клиновидной формы	11
<i>Старовойтов Э. И., Журавков М. А., Яровая А. В.</i> Термоупругие свободные колебания трехслойной круговой пластины	15
<i>Козел А. Г.</i> Влияние материалов слоев на изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака	21
<i>Ботогова М. Г., Михиевич А. П., Михасев Г. И.</i> Динамика слоистых балок содержащих электрореологический композиционный материал	27
<i>Захарчук Ю. В.</i> Упругое деформирование круговых трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем осесимметричными нагрузками	34
<i>Нестерович А. В.</i> Неосесимметричное нагружение физически нелинейной трехслойной круговой пластины в своей плоскости	42
<i>Василевич Ю. В., Остриков О. М.</i> Определение условий существования равновесного винтового нанодвойника в деформированном твердом теле	47
<i>Поленов В. С., Чигарев А. В.</i> О математическом моделировании акустической эмиссии в анизотропных двухкомпонентных средах ..	54
<i>Абрамович А. Е., Авдейчик Е. В., Конон П. Н.</i> Приближенная модель движения фронта жидкого слоя на вращающемся диске	59
<i>Dounar S., Iakimovitch A., Shirvel P., Jakubowski A., Chybowski L., John M. T., Penkina A.</i> FEA-audit and local redesign of practice-proved laboratory centrifuge machine	66
<i>Щербаков С. С., Вэнь З., Шемет Л. А., Подгайская Д. А., Кирик С. В.</i> Объемная повреждаемость системы колесо/рельс с учетом контактного взаимодействия и изгиба рельса	76
<i>Можаровский В. В., Кушнир Р. М., Гачкевич А. Р., Кукареко В. А., Кушнеров А. В.</i> Некоторые вопросы исследования покрытий из функционально-градиентных материалов при контактном взаимодействии	83

<i>Николайчик М. А., Журавков М. А.</i> Оценка напряженно-деформированного состояния тубинговой крепи при тампонировании околоствольного массива горных пород	93
<i>Можаровский В. В., Кузьменков Д. С., Коляскин И. И., Василевич Ю. В.</i> Реализация расчета контакта тел из армированных материалов, моделирующих взаимодействие элементов машин	99
<i>Холодарь Б. Г.</i> Напряженно-деформированное состояние гибкого консольного стержня, нагруженного следящей поперечной силой ...	108
<i>Шилько С. В., Дробыш Т. В., Петроковец Е. М., Сазанков А. П., Хотько А. В.</i> Экспериментальное определение упругих и вязкоупругих характеристик шинных резин	114
<i>Дудяк А. И., Хвасько В. М.</i> Изгиб составных балок	118
<i>Каюмов Р. А., Гимазетдинов А. Р., Шакирзянов Ф. Р.</i> Определение характеристик модели ползучести стеклопластика на сдвиг по результатам изгиба труб квадратного сечения	121
<i>Дудяк А. И., Дикан Ж. Г., Мелеховец П. А., Миношин В. В.</i> Определение жесткостей сечения стержня, состоящего из разнородных материалов	126
<i>Щербаков С. С., Сосновский Л. А., Басаран К.</i> Механотермодинамика, теория единой механики и трибология: общий подход к анализу энтропии	129
<i>Дудяк А. И., Хвасько В. М.</i> Температурные напряжения в биметаллическом стержне	139
<i>Мармыш Д. Е.</i> Алгоритмические подходы численной оценки повреждаемости системы твердых тел	143
<i>Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н.</i> Некоторые математические аспекты виброизоляции современных технических устройств	149
<i>Вермейчик А. И., Хвисевич В. М.</i> К решению осесимметричных краевых задач термоупругости непрерывно-неоднородных тел методом граничных интегральных уравнений	154
<i>Мойсейчик Е. А., Василевич Ю. В., Мойсейчик А. Е., Чигарев В. А., Яковлев А. А.</i> Расчетно-экспериментальное моделирование поверхностных дефектов стальной арматуры с учетом ее коррозионных повреждений	164
<i>Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н.</i> Проектирование деталей шагающих машин с применением перспективных методов дифференциальной геометрии	177

<i>Мартыненко Т. М., Скляр О. Н., Мартыненко И. М., Куранова О. В.</i> Выпучивание центрально сжатого стержня, открытого тонкостенного поперечного сечения вследствие кручения и изгиба	185
<i>Сукиасов В. Г.</i> Анализ механических аспектов пластинчатого остеосинтеза при оскольчатом переломе берцовой кости	190
<i>Докукова Н. А., Кафтайкина Е. Н.</i> Исследование деформирований витков упругой цилиндрической пружины	196
<i>Мионов Д. Н., Чигарев А. В.</i> Моделирование динамической системы летательного аппарата	202
<i>Костецкий Ю. А., Савченко А. Л., Рубникович А. С.</i> Исследование напряженно-деформационных состояний тканей зуба в системах «зуб–волновод» и «зуб–волновод–пломба»	208
<i>Бочарова Н. В.</i> О моделировании деталей машин в SolidWorks и визуализации движения механизма	215
<i>Пилипчук А. П., Грибков Ю. А., Девойно Д. Г., Летко К. Н., Мокшин А. В., Мишин А. А.</i> Моделирование деформации круглой мишени при низкоскоростном ударе	219
<i>Мартыненко Т. М., Пронкевич С. А., Скляр О. Н., Мартыненко И. М.</i> Устойчивость несущих элементов конструкции при сопряженных воздействиях температурных полей и силовых локализованных и распределенных нагрузок	224
<i>Каюмов Р. А., Сулейманов А. М., Страхов Д. Е.</i> Моделирование процесса деградации композитных материалов	230
<i>Чигарев А. В., Ботогова М. Г., Савицкая А. В.</i> Прорастание сквозной трещины в слоистом покрытии и проектировании трещиностойкого инструмента	237
Рефераты	242
Abstracts	250
Правила приема статей	257
Правила оформления статей	258

Научное издание

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ
МЕХАНИКА**

Международный
научно-технический сборник

Основан в 1975 году

Выпуск 36

Подписано в печать 12.03.2022. Формат 60×84 ¹/₈. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 30,46. Уч.-изд. л. 11,91. Тираж 100. Заказ 62.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.