МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Физика»

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Пособие
для студентов специальностей
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

Рекомендовано учебно-методическим объединением высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию в области строительства и архитектуры

Минск
БНТУ
2022

УДК 531.6(075.8)
ББК 22.213я7
З-19

С о с т а в и т е л и:
А. К. Есман, Н. П. Юркевич, Г. К. Савчук, Г. Л. Зыков,
А. И. Бибик, В. А. Потачиц, С. В. Попко, В. А. Борисов

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра общей физики БГУ, зав. кафедрой *А. И. Слободянюк*;
доцент кафедры медицинской и биологической физики БГМУ
И. Ф. Медведева

З-19 **Законы** сохранения в механике : пособие для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены» / сост.: А. К. Есман [и др.]. – Минск : БНТУ, 2022. – 49 с.
ISBN 978-985-583-738-2.

В пособии представлены материалы для проведения лабораторного практикума по изучению тем «Законы сохранения в механике» и «Силы в механике». Описана методика измерения времени упругого соударения шаров. Представлен метод определения силы сопротивления грунта с помощью копра.

УДК 531.6(075.8)
ББК 22.213я7

ISBN 978-985-583-738-2

© Белорусский национальный технический университет, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1 (№ 24)

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Цель работы: изучить законы сохранения в механике; экспериментально на примере упругого центрального удара шаров измерить время их соударения в зависимости от угла отклонения одного из шаров от вертикали; используя законы сохранения импульса и энергии, определить импульс удара, его силу и кинетическую энергию шаров после удара.

Приборы и материалы: два металлических шара на проводящих нитях, электромагниты с сердечниками, частотомер-хронометр.

1.1. Введение

Любое тело (или совокупность тел) представляет собой систему материальных точек или частиц. Если система с течением времени изменяется, то говорят, что изменяется ее состояние. Состояние системы характеризуется одновременным заданием координат и скоростей всех ее тел. Зная действующие на тела системы силы и состояние системы в некоторый начальный момент времени, можно с помощью уравнений движения предсказать ее дальнейшее поведение, т. е. найти состояние системы в любой момент времени (если проинтегрировать второй закон Ньютона, то можно найти траекторию тела). Так, например, решается задача о движении планет Солнечной системы.

Однако детальное рассмотрение поведения системы с помощью уравнений движения часто настолько затруднительно (например, из-за сложности самой системы), что довести решение до конца практически невозможно. А в тех случаях, когда законы действующих сил вообще неизвестны, такой подход оказывается в принципе неосуществимым. Также существует ряд задач, в которых детальное рассмотрение движения отдельных частиц просто не имеет смысла (например, описание движения отдельных молекул газа). В связи с этим возникает вопрос: нет ли каких-либо общих принципов, являющихся следствием законов Ньютона, которые позволяют упростить решение многих практических задач? Оказывается, такие принципы есть, они основаны на законах сохранения. При движении системы ее состояние изменяется со временем. Однако существуют такие величины, характеризующие состояние системы, которые обладают свойством сохраняться во времени. Среди этих сохраняющихся величин наиболее важную роль играют **энергия, импульс и момент импульса**. Эти три величины обладают важным свойством – аддитивностью: их значение для системы, состоящей из частей, равно сумме значений каждой из частей в отдельности.

Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса представляют собой универсальные законы природы [1–6]. Они «действуют» и в области элементарных частиц, и в области космических объектов. Законы сохранения используются как инструмент исследования движения по ряду причин:

1. Законы сохранения не зависят ни от траекторий частиц, ни от характера действующих сил. Поэтому они позволяют получить ряд общих и существенных заключений о свойствах различных механических процессов, не вникая в их детальное рассмотрение с помощью уравнений движения.

2. Ввиду того, что законы сохранения не зависят от характера действующих сил, их можно использовать, когда силы вообще неизвестны.

3. Даже в тех случаях, когда силы в точности известны, законы сохранения могут оказать существенную помощь при решении многих задач о движении частиц.

Привлечение законов сохранения очень часто позволяет получить решение наиболее простым и изящным путем, что избавляет от громоздких и утомительных расчетов. Наиболее полно с законами сохранения и их применений в науке и технике можно ознакомиться в [1–6].

1.2. Внутренние и внешние силы. Связь законов сохранения со свойствами пространства и времени

Тела, образующие механическую систему, могут взаимодействовать как между собой, так и между телами, не входящими в данную систему. Поэтому силы, которые действуют на тела системы, можно разделить на внешние и внутренние.

Внутренними называются силы, с которыми тела механической системы взаимодействуют между собой.

Внешними называются силы, с которыми на тела системы действуют тела, не входящие в данную систему тел.

Замкнутой называется система, на тела которой не действуют внешние силы или действие этих сил скомпенсировано. В противном случае система называется **незамкнутой**.

Для замкнутых систем существуют функции координат и скоростей, которые сохраняют свое значение при движении тел, а также обладают свойством аддитивности.

Аддитивность (лат. *additivus* – прибавляемый) – свойство при котором значение величины, соответствующее целому объекту (системе тел), равно сумме значений величин всех частей объекта (всех тел системы).

Функциями, удовлетворяющими указанным условиям для замкнутых систем, являются **энергия, импульс и момент импульса**. В соответствии с этим существуют три закона сохранения: энергии, импульса и момента импульса.

Законы сохранения связаны с фундаментальными свойствами пространства и времени.

Закон сохранения энергии определяется однородностью времени. Однородность времени – это равнозначность всех моментов времени. Это означает, что сдвиг начала отсчета времени не влияет на механические свойства замкнутой системы. Координаты и скорости остаются постоянными для заданного момента времени и не зависят от того, с какого момента времени идет начало его отсчета.

Закон сохранения импульса определяется однородностью пространства. Однородность пространства – это одинаковость свойств пространства во всех точках в смысле отсутствия «дыр». Однородность пространства проявляется в том, что свойства замкнутой системы не зависят от выбора начала координат инерциальной системы отсчета, т. е. сдвиг начала системы координат не влияет на механические свойства тел в замкнутой системе.

Закон сохранения момента импульса определяется изотропностью пространства.

Изотропность пространства – это одинаковость свойств пространства по всем направлениям. Из-за изотропности пространства поворот системы тел как целого относительно координатных осей не приводит к изменению механических свойств системы.

1.3. Кинетическая энергия. Работа внешних сил. Теорема о кинетической энергии тела

Пусть система состоит из одной материальной точки, на которую действует произвольная внешняя сила $\vec{F}$.

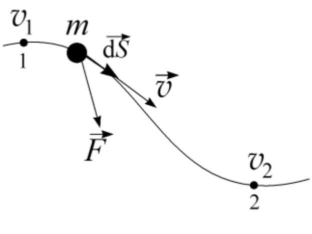

Рис. 1.1. Движение тела в поле внешних сил

Материальная точка – это обладающее массой тело, размерами и формой которого можно пренебречь в данных условиях задачи. Под действием силы материальная точка движется со скоростью $\vec{v}$ (рис. 1.1). Тогда уравнение движения тела будет иметь вид

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (1.1)$$

Пусть тело за малый промежуток времени dt совершает перемещение $d\vec{S}$.

Умножим уравнение (1.1) скалярно справа и слева на $\mathrm{d}\vec{S}$:

$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{S} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.2}$$

Учтем, что

$$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}\vec{v}. \tag{1.3}$$

Тогда выражение (1.2) будет иметь следующий вид:

$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{S} = m\vec{v}\mathrm{d}\vec{v}.$$

Внесем скорость и массу под знак дифференциала. При этом учтем, что

$$\mathrm{d}\left(mv^2\right) = 2mv\mathrm{d}v.$$

Получим

$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right). \tag{1.4}$$

Если система замкнута, то $\vec{F} = 0$ и $\mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0.$ Дифференциал равен нулю, если он вычисляется от постоянной величины.

Следовательно, в замкнутой системе для любых перемещений тела $\frac{mv^2}{2} = \mathrm{const}$ и с течением времени не изменяется.

Скалярная физическая величина $E_к = \dfrac{mv^2}{2}$ называется кинетической энергией тела. Тело обладает кинетической энергией в результате своего движения.

Если система незамкнутая, т. е. $\vec{F} \neq 0$, то величина кинетической энергии изменяется. При этом внешние силы совершают работу.

Элементарная работа при бесконечно малом перемещении тела $\mathrm{d}\vec{S}$ (рис. 1.1) вычисляется по формуле

$$\delta A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{S}.$$

Работа внешней силы по перемещению тела по некоторой траектории из точки 1 в точку 2

$$A = \int_1^2 \vec{F}\mathrm{d}\vec{S}.$$

Пусть в точке *1* модуль скорости тела равен v_1, а в точке *2* – v_2. Учтем выражение (1.4) и определим работу внешних сил через изменение кинетической энергии тела:

$$A = \int_1^2 \vec{F}\mathrm{d}\vec{S} = \int_1^2 \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv^2}{2}\Bigg|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2};$$

$$A = E_{к2} - E_{к1}. \qquad (1.5)$$

Из последнего выражения видно, что изменение кинетической энергии тела при перемещении из точки *1* в точку *2* равно работе внешней силы, действующей на тело на данном перемещении.

В общем случае **теорема об изменении кинетической энергии гласит**: изменение кинетической энергии тела при некотором его перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на тело на том же перемещении.

Если работа сил положительна, то кинетическая энергия тела возрастает, если отрицательна – убывает.

1.4. Поле силового взаимодействия. Потенциальная энергия

Силовым полем называется поле сил, действующих на тело, величина и направление которых определены в каждой точке пространства.

Силовое поле называется **центральным**, если направление силы проходит через неподвижный центр, а величина силы зависит только от расстояния до этого центра. Силовое поле называется **однородным**, если $\vec{F} = \text{const}$ во всех точках поля.

Силовое поле называется **нестационарным**, если вектор силы изменяется с течением времени: $\vec{F} = f(t)$. Силовое поле называется **стационарным**, если вектор силы в каждой точке поля не зависит от времени: $\vec{F}(t) = \text{const}$.

Рассмотрим стационарные поля сил. Силы могут быть консервативными либо неконсервативными.

Консервативными называются силы, работа которых не зависит от вида траектории, по которой перемещается тело, а определяется только начальным и конечным положениями тела. Примером силового поля консервативных сил является поле силы тяжести вблизи поверхности Земли. **Неконсервативными** называются силы, работа которых зависит от вида траектории, по которой перемещается тело. К неконсервативным силам в механике относятся диссипативные силы (силы трения скольжения, качения, вязкого трения в жидкостях и газах).

Изменение направления движения тела на противоположное приводит к изменению знака работы консервативной силы, так как косинус угла между векторами силы и перемещения меняет свой знак. Поэтому при перемещении тела по любому замкнутому контуру L работа консервативной силы равна нулю.

Работа консервативных сил зависит от начального и конечного положений тела в пространстве. Положение тела в пространстве задается координатами.

Потенциальная энергия (от лат. *potentia* – возможность) – это энергия состояния тела $U = U(x, y, z)$, которая определяется положением тела в данной точке силового поля. Конкретный вид функции $U(x, y, z)$ зависит от вида силового поля.

Потенциальная энергия – это энергия взаимодействия тела с другими телами и частей тела друг с другом. Потенциальная энергия определяется взаимным расположением тел или частей тела, т. е. расстояниями между ними.

Поле консервативных сил потенциально. **Критерий потенциальности силового поля**: чтобы поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы работа сил поля по любому замкнутому контуру была равна нулю.

Пусть в точке *1* силового поля потенциальная энергия тела составляет $U_1(x, y, z)$, а в точке *2* – $U_2(x, y, z)$. Тогда работа сил поля по перемещению частицы из точки *1* в точку *2* будет равна разности потенциальных энергий в данных точках:

$$A = U_1(x, y, z) - U_2(x, y, z). \qquad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что работа сил потенциального поля равна убыли потенциальной энергии тела. Приведенное выражение позволяет найти зависимость потенциальной энергии тела от координат только с точностью до некоторой постоянной величины. Поэтому в каждой конкретной задаче для получения однозначной зависимости потенциальной энергии от координат выбирают точку, для которой потенциальную энергию тела условно считают равной нулю.

1.5. Полная механическая энергия системы. Закон сохранения полной механической энергии

Пусть система состоит из одного тела, на которое действуют только консервативные силы. Если тело обладает потенциальными энергиями $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$ в точках *1* и *2* силового поля, то работа сил поля при перемещении тела из точки *1* в точку *2* будет равна убыли потенциальной энергии (1.6). Согласно выражению (1.5) эта работа идет на изменение кинетической энергии тела. Приравнивая работы (1.5) и (1.6), получаем

$$U_1(x, y, z) - U_2(x, y, z) = E_{к2} - E_{к1}. \tag{1.7}$$

Перенесем кинетическую энергию тела $E_{к1}$ в точке *1* в левую часть равенства (1.7), а потенциальную энергию $U_2(x, y, z)$ – в правую часть. Имеем

$$E_{к1} + U_1(x, y, z) = E_{к2} + U_2(x, y, z).$$

Таким образом, в поле консервативных сил сумма кинетической и потенциальной энергий тела остается постоянной.

Полной механической энергией тела называется сумма кинетической $E_к$ и потенциальной $U(x, y, z)$ энергий тела в данной точке пространства:

$$E = E_к + U(x, y, z).$$

Если система состоит из N невзаимодействующих друг с другом тел, то полная энергия i-го тела будет равна:

$$E_i = E_{кi} + U_i.$$

Тогда полная энергия всех тел системы:

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i = \sum_{i=1}^{N} \left(E_{кi} + U_i \right) = \sum_{i=1}^{N} E_{кi} + \sum_{i=1}^{N} U_i = \text{const}.$$

Обозначим полную кинетическую энергию системы $E_{к}$, а полную потенциальную энергию системы – U:

$$\sum_{i=1}^{N} E_{кi} = E_{кi}; \quad \sum_{i=1}^{N} U_i = U.$$

Полная механическая энергия всей системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий всех тел системы:

$$E = E_{к} + U.$$

Если тела в системе взаимодействуют друг с другом за счет внутренних сил, то в полную механическую энергию системы входит потенциальная энергия $U_{вз}$ их взаимодействия:

$$E = E_{к} + U + U_{вз}.$$

Закон сохранения полной механической энергии системы тел в поле консервативных сил: в замкнутой системе тел, в которой действуют только консервативные силы, полная механическая энергия остается постоянной с течением времени:

$$E = E_{к} + U + U_{вз} = \mathrm{const}.$$

Закон сохранения полной механической энергии является фундаментальным законом природы.

1.6. Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему из N взаимодействующих тел (рис. 1.2). Пусть кроме внутренних сил $\vec{f}_{ik}$ на i-е тело действует внешняя сила $\vec{F}_i$. Каждое i-е тело системы обладает импульсом $\vec{p}_i$, величина и направление которого может изменяться при различных взаимодействиях между телами внутри системы (рис. 1.2).

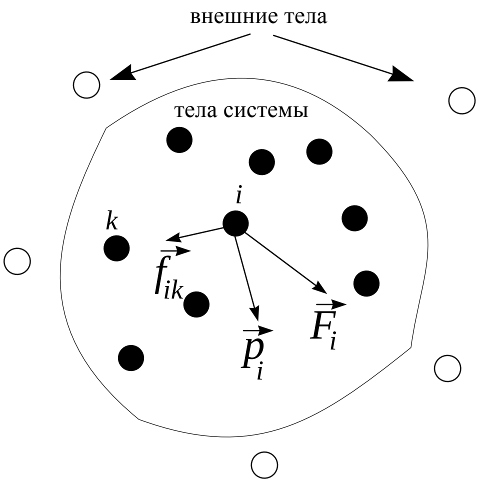

Рис. 1.2. Система из N взаимодействующих тел

Запишем уравнения движения для каждого из N тел:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1N} + \vec{F}_1 = \sum_{k=2}^{N} \vec{f}_{1k} + \vec{F}_1;$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots + \vec{f}_{2N} + \vec{F}_2 = \sum_{\substack{k=2\\k\neq 2}}^{N} \vec{f}_{2k} + \vec{F}_2;$$

$$\ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_N}{\mathrm{d}t} = \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + \ldots + \vec{f}_{N,\,N-1} + \vec{F}_N = \sum_{\substack{k=2\\k\neq N}}^{N} \vec{f}_{Nk} + \vec{F}_N.$$

Сложим левые и правые части уравнений. Учтем, что по третьему закону Ньютона $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$, т. е. пары сил, с которыми взаимодействуют каждые два тела системы между собой, компенсируют друг друга. В итоге векторная сумма всех внутренних сил будет равна нулю.

Получим

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t}+\ldots+\frac{\mathrm{d}\vec{p}_N}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_N=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i.$$

Так как производная суммы равна сумме производных, то

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ldots+\vec{p}_N\right)}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_N=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i.$$

Полным импульсом системы тел называется векторная сумма импульсов всех тел системы: $\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ldots+\vec{p}_N$.

Тогда

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i.$$

Для замкнутой системы векторная сумма всех внешних сил равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=0.$$

В этом случае $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=0.$ Производная от константы равна нулю, поэтому $\vec{p}=\mathrm{const}$.

Закон сохранения импульса: в замкнутой системе полный импульс, равный векторной сумме импульсов всех тел, входящих в систему, не изменяется с течением времени:

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ldots+\vec{p}_N=\mathrm{const}.$$

Обычно приходится иметь дело с незамкнутыми системами, для которых векторная сумма внешних сил не равна нулю и полный импульс $\vec{p} \neq \mathrm{const}$. Если проекция результирующей всех внешних сил на какую-либо ось, неподвижную относительно инерциальной системы отсчета, равна нулю, то проекция на эту же ось вектора полного импульса системы не зависит от времени.

1.7. Закон сохранения момента импульса

Вектором момента силы $\vec{M}_O$ относительно неподвижной точки *O* называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O к точке приложения силы, на вектор силы $\vec{F}$:

$$\vec{M}_O = \left[\vec{r}, \vec{F}\right].$$

Вектором момента импульса $\vec{L}_O$ относительно неподвижной точки *O* называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O к началу вектора импульса, на вектор импульса $\vec{p}$:

$$\vec{L}_O = \left[\vec{r}, \vec{p}\right].$$

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела: скорость изменения вектора момента импульса $\vec{L}_O$ твердого тела относительно неподвижной точки O равна вектору суммарного момента всех внешних сил $\vec{M}_O$, действующих на твердое тело, относительно данной точки:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_O, \tag{1.8}$$

где $\vec{M}_O$ – вектор суммарного момента всех внешних сил, действующих на твердое тело, относительно точки O, равный векторной сумме моментов $\vec{M}_i$ каждой силы в отдельности относительно данной точки:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i .$$

В уравнении (1.8) под $\vec{M}_O$ следует понимать момент как внешних, так и внутренних сил (рис. 1.3). Однако внутренние силы мы не принимаем во внимание, поскольку их полный момент относительно точки O равен нулю. Это следует из того, что внутренние силы, согласно третьему закону Ньютона, будут входить в уравнение попарно с противоположными знаками.

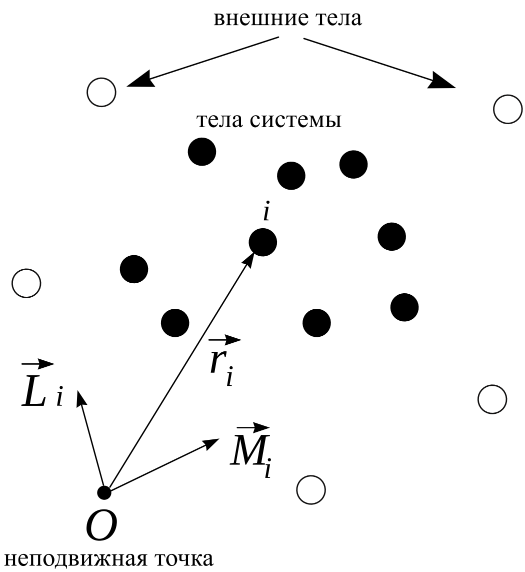

Рис. 1.3. К выводу закона
сохранения момента импульса

Пусть система состоит из N тел, на каждое из которых действуют моменты внешних сил $\vec{M}_i$ (рис. 1.3).

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела для каждого из N тел:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_1; \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_2; \ldots; \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_N}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_N.$$

Просуммируем левые и правые части уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{L}_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + \frac{\mathrm{d}\vec{L}_N}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i.$$

Так как производная суммы равна сумме производных, то

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_N\right)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i.$$

Полным моментом импульса системы тел относительно неподвижной точки называется векторная сумма моментов импульсов всех тел системы относительно заданной точки:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_N.$$

Тогда

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i.$$

Для замкнутой системы векторная сумма моментов всех внешних сил равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0.$$

В этом случае $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0.$ Производная от константы равна нулю, поэтому $\vec{L} = \mathrm{const}.$

Закон сохранения момента импульса: в замкнутой системе тел полный момент импульса, равный векторной сумме моментов импульсов всех тел, входящих в систему, относительно неподвижной точки не изменяется с течением времени:

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_N = \mathrm{const}.$$

Закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом физики и выполняется как для микро-, так и для макромира.

1.8. Абсолютно упругий и неупругий удары

Ударом называется взаимодействие тел в течение короткого промежутка времени, при котором происходит перераспределение механической энергии между телами.

Абсолютно упругий удар – это удар, при котором механическая энергия не переходит в другие виды энергии. При абсолютно упругом ударе не происходит ни нагревания тел, ни их деформации.

Абсолютно неупругий удар – это удар, при котором кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию тел. После абсолютно неупругого удара тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо находятся в состоянии покоя.

Центральным называется удар, происходящий вдоль линии, соединяющей центры тяжести тел.

Пусть два тела массами m_1 и m_2 до соударения двигались со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, а после абсолютно упругого центрального удара – со скоростями $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ соответственно (рис. 1.4).

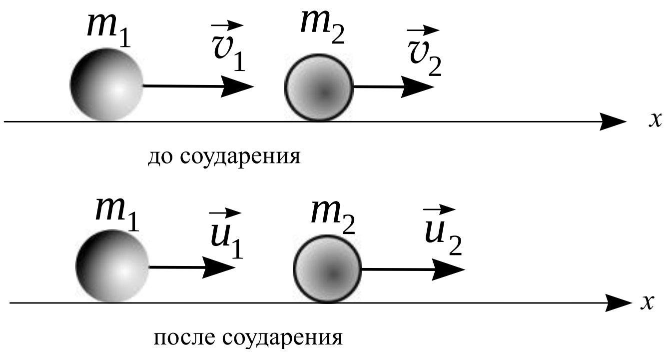

Рис. 1.4. Абсолютно упругий удар тел

Запишем законы сохранения механической энергии и импульса:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2}; \\ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на 2 и соберем с одной стороны равенства слагаемые, относящиеся к первому телу, а с другой – ко второму:

$$\begin{cases} m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2; \\ m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{u}_1 = m_2 \vec{u}_2 - m_2 \vec{v}_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \left(v_1^2 - u_1^2 \right) = m_2 \left(u_2^2 - v_2^2 \right); \\ m_1 \left(\vec{v}_1 - \vec{u}_1 \right) = m_2 \left(\vec{u}_2 - \vec{v}_2 \right). \end{cases} \qquad (1.9)$$

Учтем, что

$$\left(\vec{v}_1 - \vec{u}_1 \right)\left(\vec{v}_1 + \vec{u}_1 \right) = v_1^2 - u_1^2;$$

$$\left(\vec{v}_2-\vec{u}_2\right)\left(\vec{v}_2+\vec{u}_2\right)=v_2^2-u_2^2.$$

Разделим первое уравнение системы (1.9) на второе, получим

$$\vec{v}_1-\vec{u}_1=\vec{v}_2+\vec{u}_2. \qquad (1.10)$$

Из уравнения (1.10) выразим скорости после столкновения:

$$\vec{u}_1=\vec{u}_2+\vec{v}_2-\vec{v}_1; \qquad (1.11)$$

$$\vec{u}_2=\vec{v}_1-\vec{v}_2+\vec{u}_1. \qquad (1.12)$$

Подставим (1.11) и (1.12) в систему (1.9):

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{u}_1+m_2\left(\vec{v}_1-\vec{v}_2+\vec{u}_1\right);$$

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\left(\vec{u}_2+\vec{v}_2-\vec{v}_1\right)+m_2\vec{u}_2.$$

Найдем векторы скоростей тел после абсолютно упругого удара:

$$\vec{u}_1=\frac{2m_2\vec{v}_2+\vec{v}_1\left(m_1-m_2\right)}{m_1+m_2}; \qquad (1.13)$$

$$\vec{u}_2=\frac{2m_1\vec{v}_1+\vec{v}_2\left(m_2-m_1\right)}{m_1+m_2}. \qquad (1.14)$$

Из соотношений (1.13) и (1.14) следует, **что два тела одинаковой массы при абсолютно упругом центральном ударе обмениваются своими скоростями:** $\vec{u}_1=\vec{v}_2$; $\vec{u}_2=\vec{v}_1$.

Рассмотрим абсолютно неупругий удар. Пусть тела массами m_1 и m_2 до столкновения движутся со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ соответственно, а после столкновения – с одинаковой скоростью $\vec{u}$ (рис. 1.5).

Найдем скорость $\vec{u}$ движения тел после неупругого удара, используя закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Тогда

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

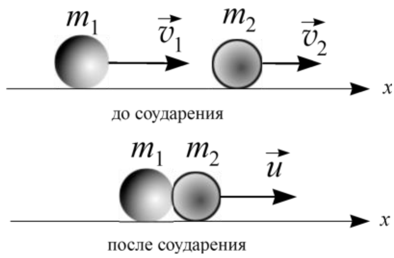

Рис. 1.5. Абсолютно неупругий удар тел

При неупругом ударе кроме закона сохранения импульса выполняется закон сохранения момента импульса. Закон сохранения полной механической энергии не выполняется, так как часть кинетической энергии при неупругих деформациях переходит в тепловую энергию. В случае абсолютно неупругого удара кинетическая энергия уменьшается на максимально возможную величину. Уменьшение кинетической энергии ограничивается только законом сохранения импульса – этот закон должен выполняться в любом случае.

1.9. Определение импульса, кинетической энергии и силы удара двух шаров одинаковой массы

Пусть два шара одинаковых масс $m_1 = m_2 = m$ подвешены на невесомых нерастяжимых нитях так, как показано на рис. 1.6.

До соударения первый шар покоится в положении равновесия, а второй отведен на некоторый угол α. В результате центр второго шара поднят на высоту h относительно положения равновесия и обладает потенциальной энергией $E_п = mgh$. Тогда полная механическая энергия всей системы до удара составит $E = E_п = mgh$, где g – ускорение свободного падения. Когда второй шар отпущен, его потенциальная энергия $E_п$ будет переходить в кинетическую $E_к = \frac{mv^2}{2}$.

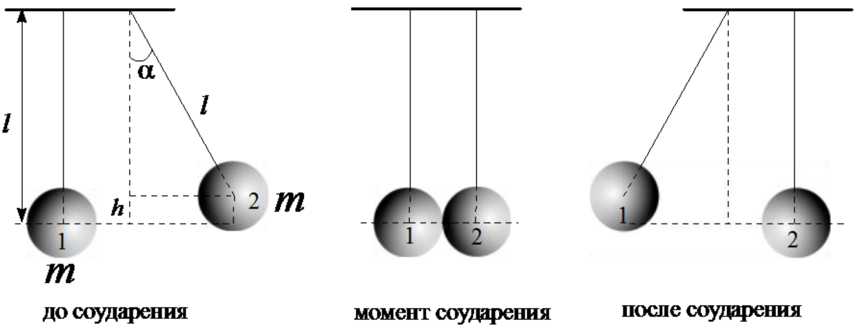

Рис. 1.6. Абсолютно упругий центральный удар двух шаров

В момент соударения с первым шаром по закону сохранения энергии $E_к = E_п$:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh.$$

Отсюда найдем скорость второго шара в момент соударения:

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad (1.15)$$

Из (1.13) и (1.14) следует, что два тела одинаковой массы при абсолютно упругом центральном ударе обмениваются своими скоростями. Поэтому в момент соударения второй шар останавливается, а первый получает импульс и начинает двигаться со скоростью второго шара *v*. Из рис. 1.6 найдем высоту *h*, на которую был поднят второй шар:

$$\frac{l-h}{l} = \cos; \quad l-h = l\cos; \quad h = l - l\cos; \quad (1-\cos\alpha) = 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$h = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (1.16)$$

Подставим выражение (1.16) в (1.15), получим скорость и импульс второго шара в момент удара:

$$v = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl};$$

$$p = mv = 2m\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl}.$$

В момент удара второй шар полностью передает свой импульс p первому шару и останавливается. Тогда изменение импульса первого шара при соударении составит $\Delta p = p$, и по второму закону Ньютона можно найти силу взаимодействия шаров при ударе $F = p\ /\ \Delta t$, где $\Delta t = \tau$ – экспериментально измеренное время соударения. Кинетическую энергию шара после соударения можно найти из соотношения $E_к = \dfrac{p^2}{2m}$.

Таким образом, характеристики абсолютно упругого удара двух шаров можно определить на основе экспериментально определенного времени их соударения.

1.10. Описание установки

На рис. 1.7 показана принципиальная схема установки. Вид лабораторной установки представлен на рис. 1.8.

Два стальных шарика *1* и *2* (рис. 1.8) равной массы m подвешены на проводящих нитях длиной l. При включении электромагнита M_1 его сердечник намагничивается. При подведении к сердечнику шарик *2* притягивается и удерживается. Так как сердечник можно перемещать внутри катушки электромагнита M_1, то удерживаемый шарик *2* можно отклонить от вертикали на угол от 0° до 10°.

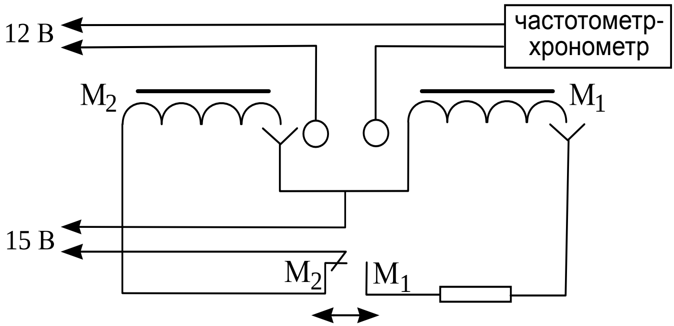

Рис. 1.7. Схема установки

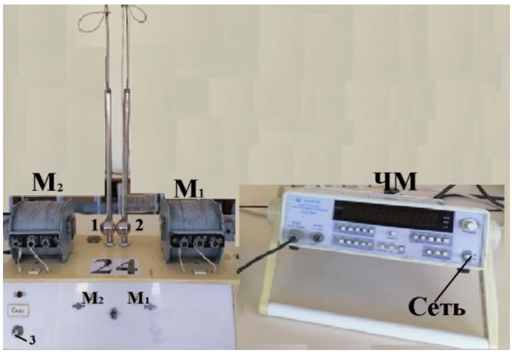

Рис. 1.8. Вид лабораторной установки

При переключении тумблера из положения M_1 в положение M_2 правый электромагнит обесточивается, шарик *2* освобождается и летит к шарику *1*. Происходит соударение двух шаров.

В тоже время намагничивается сердечник левого электромагнита M_2, и после соударения шаров сердечник притягивает левый шарик *1*. В процессе соударения шаров (при единичном ударе в течение времени контакта шаров) электрическая цепь замыкается и в цепи протекает импульсный ток, который подается на частотомер-хронометр (ЧМ). Время прохождения импульсного тока (количество прошедших за время контакта электрических импульсов в цепи) считается временем соударения шаров.

1.11. Порядок выполнения лабораторной работы

Зарисуйте в рабочую тетрадь табл. 1.

Таблица 1

№ п/п	$\alpha = 6^o$		$\alpha = 8^o$		$\alpha = 10^o$	
	τ_i, мкс	$\lvert \tau_{ср} - \tau_i \rvert$, мкс	τ_i, мкс	$\lvert \tau_{ср} - \tau_i \rvert$, мкс	τ_i, мкс	$\lvert \tau_{ср} - \tau_i \rvert$, мкс
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
	$\tau_{ср} =$	$\Delta_{ср}\tau =$	$\tau_{ср} =$	$\Delta_{ср}\tau =$	$\tau_{ср} =$	$\Delta_{ср}\tau =$

Задание 1. Определение времени τ соударения шаров для различных углов отклонения.

1.1. Включите тумблер «Сеть» частотомера-хронометра. Включите тумблер *3* «Сеть» электромагнитов.

1.2. Переключатель электромагнитов поставьте в положение M_1.

1.3. Передвижением сердечника правого электромагнита M_1 отклоните шарик *2* на угол $\alpha = 6^o$, прикрепите его к сердечнику. Установите шарик по центру сердечника. Следите, чтобы шар *1* находился в вертикальном положении неподвижно.

1.4. Переключатель электромагнитов поставьте в положение M_2. После соударения шар *1* должен захватываться электромагнитом M_2. Если удар получается двойным, то передвижением сердечника электромагнита M_2 обеспечьте одинарность удара.

1.5. На цифровом табло частотометра высветится время соударения шаров (τ). Занесите показание для времени соударения в табл. 1. Измерьте время соударения шаров на заданном угле 10 раз.

1.6. Произведите аналогичные измерения для углов $\alpha = 8^{o}$ и $\alpha = 10^{o}$. По окончании эксперимента выключите установку и частотомер.

Задание 2. Вычислите средние значения времени соударения шаров $\tau_{ср}$ для различных углов отклонения.

Для углов $\alpha = 6^{o}$, $\alpha = 8^{o}$ и $\alpha = 10^{o}$ определите абсолютную погрешность измерения времени соударения шаров по формуле

$$\tau_{ср} = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 + \tau_{10}}{10}.$$

Задание 3. Вычислите средние значения абсолютной погрешности измерения $\Delta\tau_{ср}$ времени соударения шаров для всех значений углов:

$$\Delta\tau_{ср} = \frac{\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2 + \Delta\tau_3 + \Delta\tau_4 + \Delta\tau_5 + \Delta\tau_6 + \Delta\tau_7 + \Delta\tau_8 + \Delta\tau_9 + \Delta\tau_{10}}{10},$$

где $\Delta\tau_i = \left| \tau_{ср} - \tau_i \right|$.

Округлите абсолютные погрешности до целого. Результаты вычислений занесите в табл. 1. Сравните полученные значения времен соударения шаров и сделайте выводы.

Задание 4. Используя среднее значение длительности удара $\tau_{ср}$, рассчитайте:

– импульс шаров:

$$p = 2m\sqrt{gl} \cdot \sin\frac{\alpha}{2},$$

где $m = 0{,}112$ кг; $l = 0{,}35$ м;

– силу соударения шаров:

$$F = \frac{p}{\tau_{ср}};$$

– энергию шара после соударения:

$$E_{\text{к}} = \frac{p^2}{2m}.$$

Результаты вычислений занесите в табл. 2.

Таблица 2

α	p, кг·м/с	F, Н	$E_{\text{к}}$, Дж
6°			
8°			
10°			

Проанализируйте полученные результаты и сделайте выводы.

1.12. Контрольные вопросы

1. Дайте определения кинетической и потенциальной энергий, импульса тела, момент импульса тела относительно точки.
2. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии.
3. Какие силы называются консервативными?
4. Сформулируйте и докажите закон сохранения импульса.
5. Сформулируйте и докажите закон сохранения полной механической энергии.
6. Сформулируйте и докажите закон сохранения момента импульса.
7. Чему равна работа сил потенциального поля?
8. Какой удар называется упругим, неупругим, центральным?
9. Получите для упругого и неупругого центральных ударов формулы для скоростей шаров после удара.
10. Выведите формулы для определения импульса, кинетической энергии и силы удара двух шаров одинаковой массы.

Лабораторная работа № 2 (№ 5)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ГРУНТА ПРИ ЗАБИВАНИИ СВАИ НА МОДЕЛИ КОПРА

Цель работы: определить среднюю силу сопротивления грунта при забивании сваи на модели копра, применяя законы сохранения импульса и энергии.

Приборы и принадлежности: модель копра.

2.1. Введение

В настоящей работе определяется средняя сила сопротивления грунта при забивании сваи, оценивается доля энергии, затраченная на деформацию тел при их неупругом взаимодействии, и рассчитывается величина внутренней силы, действующей на груз во время соударения. При расчетах используются законы сохранения импульса и механической энергии. Измерения проводятся на модели копра.

Копр (копер) – это строительная машина (рис. 2.1), которая предназначена для забивания свай в грунт. Груз и свая удерживаются в вертикальном положении с помощью направляющей колонны. Груз поднимают на определенную высоту и затем отпускают. После абсолютно неупругого удара груза о сваю происходит их совместное перемещение, при этом свая погружается в грунт. Для каждого удара величина погружения зависит от высоты, с которой начинает падать груз, от соотношения масс сваи и груза и от средней силы сопротивления грунта.

Рис. 2.1. Вид современного гусеничного копра

2.2. Закон сохранения импульса

Для вывода закона сохранения импульса рассмотрим некоторые понятия. Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется **механической системой**.

Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются **внутренними**.

Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются **внешними**.

Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется **замкнутой** (или **изолированной**).

Если мы имеем механическую систему, состоящую из многих тел, то, согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие между этими телами, будут равны и противоположно направлены, т. е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n тел, массы и векторы скоростей которых соответственно равны m_1, m_2, m_3,…, m_n и $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$.

Импульсом материальной точки или количеством движения называется векторная величина, численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость.

Пусть $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ – векторы равнодействующих внешних сил, а $\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n'$ – векторы равнодействующих внутренних сил, действующих на 1, 2,…, n тело системы соответственно.

Запишем второй закон Ньютона для каждого из n тел механической системы:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{v}_1\right) = \vec{F}_1' + \vec{F}_1;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_2\vec{v}_2\right) = \vec{F}_2' + \vec{F}_2;$$

$$...$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_n\vec{v}_n\right) = \vec{F}_n' + \vec{F}_n.$$

Складывая левые и правые части эти уравнений, получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\ldots+m_n\vec{v}_n\right)=\vec{F}_1'+\vec{F}_2'+\ldots+\vec{F}_n'+\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n.$$

Так как геометрическая сумма внутренних сил $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \ldots, \vec{F}_n'$ механической системы по третьему закону Ньютона равна нулю, то

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\ldots+m_n\vec{v}_n\right)=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n,$$

где $\vec{p}=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$ – результирующий (полный) вектор импульса системы.

Таким образом, производная по времени от результирующего вектора импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

В случае отсутствия внешних сил (рассматриваем замкнутую систему)

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_i\vec{v}_i\right)=0;$$

$$\vec{p}=\mathrm{const}.$$

Последнее выражение является **законом сохранения импульса**: векторная сумма импульсов всех тел замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике, хотя он и получен как следствие законов Ньютона. Эксперименты доказывают, что он выполняется также для замкнутых систем микрочастиц (они подчиняются законам квантовой механики). Этот закон носит универсальный характер и является фундаментальным законом природы.

2.3. Закон сохранения механической энергии

Закон сохранения энергии – результат обобщения многочисленных опытных данных. Идея этого закона принадлежит М. В. Ломоносову (1711–1765), описавшему закон сохранения материи и движения, а количественная формулировка закона сохранения энергии дана немецким врачом Ю. Майером (1814–1878) и немецким естествоиспытателем Г. Гельмгольцем (1821–1894).

Рассмотрим систему материальных точек (тел) массами m_1, $m_2,\ldots,$ m_n, движущихся со скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$. Пусть $\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n'$ – векторы равнодействующих внутренних консервативных сил, действующих на каждую из этих точек; $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ являются векторами равнодействующих внешних сил, которые также будем считать консервативными.

Консервативные силы – это силы, работа которых зависит не от формы траектории, а только от начальной и конечной точек приложения сил.

Кроме того, будем считать, что на материальные точки действуют еще и внешние неконсервативные силы. Векторы равнодействующих этих сил, действующих на каждую из материальных точек, обозначим $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n$. При значениях скоростей, намного меньших скорости света $(v << c)$, массы материальных точек постоянны и уравнения второго закона Ньютона для каждой из материальных точек можно записать в следующем виде:

$$m_1 \frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1' + \vec{F}_1 + \vec{f}_1;$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_2' + \vec{F}_2 + \vec{f}_2;$$

$$\ldots$$

$$m_n \frac{\mathrm{d}\vec{v}_n}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_n' + \vec{F}_n + \vec{f}_n.$$

Двигаясь под действием сил, материальные точки в течение времени dt совершают перемещения, соответственно равные $\mathrm{d}\vec{r}_1$, $\mathrm{d}\vec{r}_2, \ldots,$ $\mathrm{d}\vec{r}_n$. Умножим каждое из уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что $\mathrm{d}\vec{r}_i = \vec{v}_i \mathrm{d}t,$ получим:

$$m_1 \left(\vec{v}_1 \mathrm{d}\vec{v}_1\right) - \left(\vec{F}_1' + \vec{F}_1\right) \mathrm{d}\vec{r}_1 = \vec{f}_1 \mathrm{d}\vec{r}_1;$$

$$m_2 \left(\vec{v}_2 \mathrm{d}\vec{v}_2\right) - \left(\vec{F}_2' + \vec{F}_2\right) \mathrm{d}\vec{r}_2 = \vec{f}_2 \mathrm{d}\vec{r}_2;$$

$$\ldots$$

$$m_n \left(\vec{v}_n \mathrm{d}\vec{v}_n\right) - \left(\vec{F}_n' + \vec{F}_n\right) \mathrm{d}\vec{r}_n = \vec{f}_n \mathrm{d}\vec{r}_n.$$

Сложим по отдельности левые и правые части этих уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{v}_i \mathrm{d}\vec{v}_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i' + \vec{F}_i\right) \mathrm{d}\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \mathrm{d}\vec{r}_i.$$

Первое слагаемое в левой части последнего равенства можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{v}_i \mathrm{d}\vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \mathrm{dT}; \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \mathrm{T},$$

где v_i – модуль скорости i-й материальной точки (тела);

dT – элементарное приращение кинетической энергии системы.

Второе слагаемое в левой части полученного равенства представляет собой сумму элементарных работ консервативных сил системы. На основании того, что работа консервативных сил системы равна убыли потенциальной энергии системы, можно записать:

$$\delta A' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i' \mathrm{d}\vec{r}_i; \quad \delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \mathrm{d}\vec{r}_i;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i' + \vec{F}_i \right) \mathrm{d}\vec{r}_i = \delta A_i' + \delta A = -\mathrm{d}\Pi,$$

где $\mathrm{d}\Pi$ – элементарное приращение потенциальной энергии системы. Знак «–» соответствует убыли потенциальной энергии системы.

Правая часть равенства

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{v}_i \mathrm{d}\vec{v}_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i' + \vec{F}_i \right) \mathrm{d}\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \mathrm{d}\vec{r}_i$$

определяет элементарную работу внешних неконсервативных сил $\delta A_f = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \mathrm{d}\vec{r}_i$, действующих на систему.

Таким образом, имеем

$$\mathrm{dT} + \mathrm{d}\Pi = \delta A_f; \ \mathrm{d}(\mathrm{T} + \Pi) = \delta A_f.$$

При переходе системы из состояния 1 в какое-либо состояние 2 работа будет равна

$$A_{12} = \int_1^2 \mathrm{d}(\mathrm{T} + \Pi),$$

т. е. изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно работе, совершенной внешними неконсервативными силами.

Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то

$$\delta A_f = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i \mathrm{d}\vec{r}_i = 0,$$

тогда d(Т + П) = 0.

Из последнего равенства следует, что сумма кинетической и потенциальной энергий остается неизменной и равной полной механической энергии системы:

$$\text{Т} + \text{П} = E = \text{const}.$$

Следовательно, полная механическая энергия сохраняется постоянной. Выражение Т + П = E = const представляет собой **закон сохранения полной механической энергии**: в замкнутой системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются **консервативными системами. Закон сохранения механической энергии** можно сформулировать так: в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.

Существует еще один вид систем – **диссипативные системы**, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. Этот процесс получил название диссипации (или рассеяния) энергии. Строго говоря, все системы в природе являются диссипативными.

В консервативных системах могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах, при этом полная механическая энергия остается неизменной, что и демонстрируется на примере свободного падения тела без учета сопротивления среды. Это закон не просто количественного сохранения энергии, а ее сохранения и превращения, выражающий качественную сторону взаимного превращения различных форм энергии друг в друга. Закон сохранения и превращения энергии – фундаментальный закон природы, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микрочастиц.

В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например силы трения, полная механическая энергия системы не сохраняется. Следовательно, в этих случаях закон сохранения механической энергии несправедлив. Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида.

Таким образом, энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой. В этом и заключается **физическая сущность** закона сохранения и превращения энергии – сущность неуничтожимости материи и ее движения.

Физический смысл этого закона: увеличение кинетической энергии тела может произойти лишь за счет убыли потенциальной и наоборот. Закон сохранения и превращения механической энергии применяется, например, при изучении столкновений тел. При этом он выполняется вместе с законом сохранения импульса. Если движение происходит так, что потенциальная энергия системы остается неизменной, то может сохраняться кинетическая энергия.

2.4. Удар абсолютно упругих и неупругих тел

Удар (или соударение) – это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. Помимо ударов в прямом смысле этого слова (столкновения атомов или бильярдных шаров) сюда можно отнести и такие, как удар человека о землю при прыжке с трамвая и т. д.

Силы взаимодействия между сталкивающимися телами (ударные или мгновенные) столь малы, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь. Это позволяет систему тел в процессе их соударения приближенно рассматривать как замкнутую и применять к ней законы сохранения.

Тела во время удара испытывают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами. Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Это объясняется тем, что нет идеально упругих тел и идеально гладких поверхностей.

Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется **линией удара**. Удар называется **центральным**, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс. Мы будем рассматривать только центральные абсолютно упругие и абсолютно неупругие удары.

Абсолютно упругий удар – столкновение двух тел, в результате которого в обоих не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой они обладали, после удара снова превращается в кинетическую энергию (подчеркнем, что это идеализированный случай). Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.

Абсолютно неупругий удар – это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются и двигаются дальше как единое целое. Выясним, как меняется кинетическая энергия шаров при прямом центральном абсолютно неупругом ударе.

Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно также с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу (рис. 2.2).

Обозначим массы шаров m_1 и m_2, векторы их скоростей до удара – $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, а после – $\vec{v}$. Используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}.$$

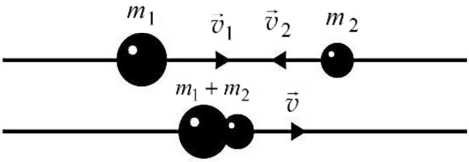

Рис. 2.2. Пример абсолютно неупругого удара двух шаров, движущихся навстречу друг другу

Откуда вектор скорости шаров после удара

$$\vec{v}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}.$$

Если шары движутся навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом, с общей скоростью, по модулю равной

$$v=\frac{m_1v_1-m_2v_2}{m_1+m_2}.$$

Выясним, как меняется кинетическая энергия шаров при прямом центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не будет соблюдаться. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии (диссипация энергии). Эту «потерю» можно определить по разности кинетических энергий до и после удара:

$$\Delta\mathrm{T}=\left(\frac{m_1v_1^2+m_2v_2^2}{2}\right)-\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}.$$

Подставив в последнее равенство v, получаем

$$\Delta \mathrm{T} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 .$$

Если тело 2 было первоначально неподвижно, т. е. модуль скорости $v_2 = 0$, то

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}; \quad \Delta \mathrm{T} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Когда $m_2 >> m_1$, модули скоростей соотносятся как $v << v_1$ и почти вся кинетическая энергия при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка.

Когда $m_2 \approx m_1$, тогда $v \approx v_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение, а не на остаточную деформацию (например, молоток – гвоздь).

Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.

2.5. Механические процессы, происходящие в системе «груз – свая – грунт» с точки зрения законов сохранения энергии и импульса

Рассмотрим принципиальную схему работы копра, схематически представленную на рис. 2.3. Груз копра A, падая с высоты h_1', проходит путь H и соударяется со сваей B. После удара груз и свая двигаются с одинаковой скоростью, т. е. процесс их взаимодействия абсолютно неупругий.

Действие силы тяжести проявляется в том, что тело любой массы притягивается Землей с силой, равной произведению массы этого тела на ускорение свободного падения g. Если сила во всех точках поля силы тяжести имеет одно и то же значение, т. е. не зависит ни от координат, ни от времени, то такое поле называется однородным. Процесс забивания сваи в грунт с помощью копра происходит следующим образом (рис. 2.3). Неподвижный груз находится на высоте h_1' и обладает потенциальной энергией, обусловленной взаимодействием с однородным гравитационным полем Земли. При падении груза его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию движения груза (приращением кинетической энергии Земли при этом можно пренебречь).

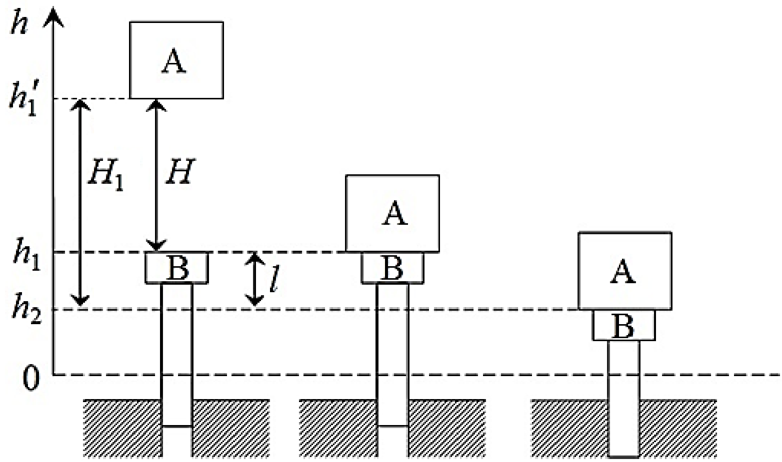

Рис. 2.3. Схема модели копра

Обозначив через υ_1 величину скорости груза непосредственно перед соударением со сваей, через m_1 – массу груза, а через H – первоначальную высоту груза над сваей, получим уравнение

$$m_1 g H = \frac{m_1 \upsilon_1^{\,2}}{2},$$

из которого следует, что скорость груза непосредственно перед ударом равна:

$$v_1 = \sqrt{2gH}$$

и зависит только от первоначальной высоты груза H над сваей, а не от его массы.

2.6. Абсолютно неупругое взаимодействие груза и сваи

При дальнейшем движении груза происходит его неупругое соударение со сваей. Физические явления во время столкновения довольно сложны. Сталкивающиеся тела деформируются, возникают упругие силы и силы трения, в телах возбуждаются колебания и волны и т. д. Однако если удар неупругий, в конечном итоге все эти процессы прекращаются и в дальнейшем груз и свая, соединившись вместе, движутся как единое целое с массой ($m_1 + m_2$) с некоторой общей скоростью v, сохраняя возникшую при ударе взаимную деформацию. Общую скорость груза и сваи сразу после удара можно найти, применяя закон сохранения импульса к системе «груз – свая». Эту систему на рассматриваемом этапе взаимодействия считаем замкнутой, так как внешние силы (силы тяжести груза и сваи, сила сопротивления грунта) малы по сравнению с внутренними силами, развивающимися при соударении груза и сваи. До удара груз двигался со скоростью v_1, приобретенной в результате падения с высоты H, так как свая была неподвижна. После удара груз и свая двигаются с общей скоростью, величина которой равна v. Согласно закону сохранения импульса, считая удар груза и сваи абсолютно неупругим, запишем

$$m_1 v_1 = \left(m_1 + m_2\right) v.$$

Подставляя в последнее равенство

$$v_1 = \sqrt{2gH},$$

значение общей скорости после удара вычисляется как:

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gH}.$$

Из полученной формулы следует, что величина общей скорости тем выше, чем меньше масса сваи m_2 и чем больше первоначальная высота груза над сваей H.

Далее система «груз – свая», перемещаясь внутри грунта с начальной скоростью v, испытывает действие силы сопротивления со стороны грунта. Грунт может иметь различную плотность на различных глубинах, поэтому и сила сопротивления будет переменной величиной.

В дальнейшем будем говорить о некоторой средней силе сопротивления $\left\langle \vec{F}_{\text{сопр}} \right\rangle$ в зависимости от глубины грунта при забивании сваи.

После удара груз и свая продолжают двигаться вместе замедленно до полной остановки. При этом сила сопротивления грунта совершает работу, равную:

$$A = \left\langle \vec{F}_{\text{сопр}} \right\rangle \vec{l} = \left\langle F_{\text{сопр}} \right\rangle l \cos\alpha,$$

где l – модуль вектора перемещения сваи с грузом в грунте;

α – угол между направлением вектора силы сопротивления грунта и вектором перемещения $\vec{l}$.

Так как сила сопротивления грунта $\left\langle F_{\text{сопр}} \right\rangle$ и вектор перемещения $\vec{l}$ направлены по одной прямой, но в противоположные стороны, угол между векторами $\langle F_{\text{сопр}} \rangle$ и $\vec{l}$ равен 180°, а $\cos\alpha = -1$. Тогда

$$A = -\langle F_{\text{сопр}} \rangle l.$$

Величина этой работы равна изменению энергии системы «груз – свая – Земля»:

$$A = -\langle F_{\text{сопр}} \rangle l = E_2 - E_1$$

или

$$\langle F_{\text{сопр}} \rangle l = E_1 - E_2,$$

где E_1 и E_2 – механическая энергия системы в начале движения и в момент остановки соответственно.

Перед началом забивания сваи обозначим ее высоту относительно заранее выбранного начального уровня h_1, а после окончания забивания – h_2 (рис. 2.3).

Тогда

$$E_1 = \frac{m_1 + m_2}{2} v^2 + m_1 g h_1 + m_2 g h_1;$$

$$E_2 = m_1 g h_2 + m_2 g h_2;$$

$$E_1 - E_2 = \frac{m_1 + m_2}{2} v^2 + m_1 g \left(h_1 - h_2\right) + m_2 g \left(h_1 - h_2\right).$$

Обозначим $h_1 - h_2 = l$. Учитывая, что $v_1 = \sqrt{2gH}$, а общая скорость

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gH},$$

получим

$$E_1 - E_2 = \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} gH + gl\left(m_1 + m_2\right).$$

Подставим значение ($E_1 - E_2$) в выражение

$$\left\langle F_{\text{сопр}} \right\rangle l = E_1 - E_2.$$

Сократив левую и правую часть на l, получим

$$\left\langle F_{\text{сопр}} \right\rangle = \left(\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \frac{H}{l} + m_1 + m_2 \right) g.$$

Используя полученное соотношение, экспериментально измерив в опытах H и l, можно вычислить среднюю силу сопротивления грунта. Следует отметить, что при неупругом ударе происходят различного рода процессы в соударяющихся телах (их пластические деформации, трение и др.). В результате происходит частичное преобразование механической энергии во внутреннюю энергию соударяющихся тел, т. е. в тепло.

Проведем оценку потери кинетической энергии системы «груз – свая» в результате неупругого удара, которая определяется разностью кинетической энергии системы до удара

$$\mathrm{T}_0 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}$$

и кинетической энергии системы после удара

$$\mathrm{T} = \frac{\left(m_1 + m_2\right) \upsilon^2}{2}.$$

Величина потери кинетической энергии во время удара составляет

$$\Delta T = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_1^2}{2}.$$

Относительные потери механической энергии при этом определяются выражением

$$\delta = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Из полученной формулы следует, что чем меньше будет значение дроби, тем большая часть кинетической энергии падающего груза будет затрачена на вертикальное перемещение сваи. Именно поэтому для эффективной работы копра необходимо, чтобы масса падающего груза m_1 была больше массы сваи.

Модель копра в разрезе представлена на рис. 2.4.

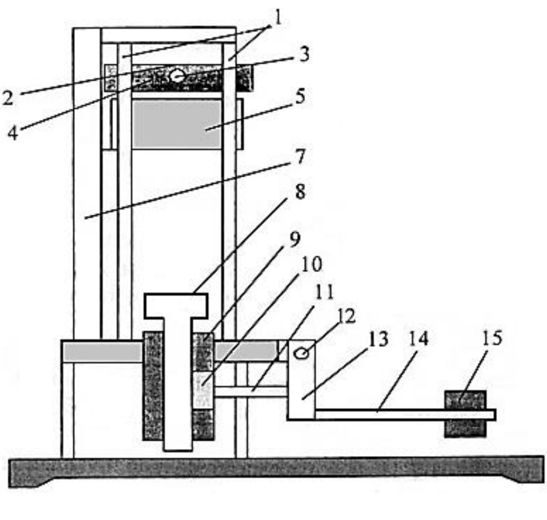

Рис. 2.4. Вертикальный разрез модели копра по осевой плоскости

Груз *5* перемещается по направляющим *1*. Свая *8* может перемещаться во втулке *9* с вкладышем *10*. Для создания между сваей и втулкой силы трения, которая моделирует силу сопротивления грунта, служит установленный на оси *12* рычаг, состоящий из бруска *13*, стержня *14* с грузом *15* и нажимного винта *11*. Груз *15* (противовес), находящийся на большом плече рычага, стремится повернуть рычаг вокруг оси *12*. Вследствие этого нажимной винт *11*, которым оканчивается малое плечо рычага, оказывает давление на вкладыш втулки. Передвигая груз по большому плечу рычага, можно изменять силу трения. Груз *5* удерживается на заданной высоте винтом *3*, установленным на держателе *4*, который фиксируется сзади установки крепежным винтом *2*. Высота груза и положение сваи определяются с помощью линейки *7* по указателю на грузе *5*.

2.7. Порядок выполнения работы

1. Изучите модель копра (рис. 2.3 и рис. 2.4). Зарисуйте в рабочую тетрадь табл. 2.

Таблица 2

<table>
<tr><th></th><th>h_1', м</th><th>H, м</th><th>h_2, м</th><th>l, м</th><th>$F_{сопр}$, Н</th><th>$\langle F_{сопр} \rangle$, Н</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Крайнее левое положение груза *15*</td><td>1. 0,4</td><td>1.</td><td>1.
2.
3.</td><td>1.
2.
3.</td><td>1.
2.
3.</td><td rowspan="2">1.</td></tr>
<tr><td>2. 0,2</td><td>2.</td><td>1.
2.
3.</td><td>1.
2.
3.</td><td>1.
2.
3.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Крайнее правое положение груза *15*</td><td>1. 0,4</td><td>1.</td><td>1.
2.
3.</td><td>1.
2.
3.</td><td>1.
2.
3.</td><td rowspan="2">2.</td></tr>
<tr><td>2. 0,2</td><td>2.</td><td>1.
2.
3.</td><td>1.
2.
3.</td><td>1.
2.
3.</td></tr>
</table>

2. Поставьте противовес (груз *15*) в крайнее левое положение.

3. Закрепите груз *5* в держателе *4* с помощью винта *3*. Для этого:

– приподнимите груз к держателю;

– утопите винт *3*, т. е. прижмите его к держателю и поверните в горизонтальное положение.

4. Приподнимите стержень *14* с грузом *15* слегка вверх, вдвиньте сваю *8* во втулку *9* так, чтобы нижние концы сваи и втулки находились на одном уровне.

5. По линейке определите высоту h_1' первоначального положения груза *5* и положение верхнего конца сваи, соответствующее значению $h_1 = 10$ см (рис. 2.3).

6. Освободите груз для падения. Для этого поверните винт *3* в вертикальное положение.

7. Отсчитайте по линейке высоту h_2, соответствующую положению сваи после падения с грузом. Значение занесите в таблицу.

8. Рассчитайте:

– высоту падения груза $H = h_1' - h_1$;

– путь, пройденный сваей с грузом, $l = h_1 - h_2$.

Значения занесите в таблицу.

9. Вычислите значение силы сопротивления грунта для данного эксперимента по формуле

$$F_{\text{сопр}} = \left(\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \frac{H}{l} + m_1 + m_2 \right) g.$$

Измерения произведите по три раза:

а) для двух высот h_1' груза *5*, равных 20 см и 40 см;

б) для двух положений груза *15* на рычаге: крайнего левого и крайнего правого.

Для вычислений используйте значения $g = 9{,}8$ м/с^2, массу груза *5* $m_1 = 0{,}390$ кг, массу сваи *8* $m_2 = 0{,}075$ кг. Результаты вычислений занесите в таблицу.

Вычислив $F_{\text{сопр}}$ для двух высот груза *5* (0,4 м и 0,2 м) для случая крайнего левого положения противовеса (груза 15), найдите среднее значение силы сопротивления грунта для этого случая:

$$\left\langle F_{\text{сопр}} \right\rangle = \frac{F_{\text{сопр1}} + F_{\text{сопр2}} + F_{\text{сопр3}} + F_{\text{сопр4}} + F_{\text{сопр5}} + F_{\text{сопр6}}}{6}$$

и результат занесите в таблицу.

10. Произведите вычисления $\left\langle F_{\text{сопр}} \right\rangle$ для крайнего правого положения груза *15* и результат вычисления занесите в таблицу.

11. Сравните полученные значения $\left\langle F_{\text{сопр}} \right\rangle$ для рассмотренных случаев.

12. Сделайте выводы.

2.8. Контрольные вопросы

1. Дайте определение механической системы, замкнутой механической системы, внутренних и внешних сил.
2. Дайте определения импульса тела, импульса системы материальных тел, кинетической и потенциальной энергий.
3. Сформулируйте и выведите закон сохранения импульса.
4. Какие условия позволяют использовать закон сохранения импульса в данной работе?
5. Сформулируйте и выведите закон сохранения полной механической энергии.
6. Какие силы называются консервативными? Дайте определение полной механической энергии.
7. Какой удар называется абсолютно упругим и абсолютно неупругим?
8. Каковы отличительные особенности абсолютно неупругого удара?
9. Выведите формулу для силы сопротивления грунта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кужир, П. Г. Сборник задач по общему курсу физики : учеб. пособие : в 2 ч. / П. Г. Кужир, Н. П. Юркевич, Г. К. Савчук. – 3-е изд., испр. и доп. – Минск: БНТУ, 2014. – Ч. 1 : Механика. Статистическая физика и термодинамика. – 219 с.
2. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Академия, 2008. – 720 с.
3. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3 т. / И. В. Савельев. – М.: Лань, 2018. – Т. 1. – 436 с.
4. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2014. – Т. 1. – 560 с.
5. Матвеев, А. Н. Курс общей физики / А. Н. Матвеев. – М.: ОНИКС 21 век, 2003. – Т. 1. – 432 с.
6. Физика : учебно-методический комплекс : в 4 ч. / сост.: П. Г. Кужир [и др.]. – Минск: БНТУ, 2013–2016. – Ч. 1 : Механика. – 2013.

Учебное издание

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Пособие
для студентов специальностей
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

Составители:
ЕСМАН Александр Константинович
ЮРКЕВИЧ Наталья Петровна
САВЧУК Галина Казимировна и др.

Редактор *А. С. Мокрушников*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 11.02.2022. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,91. Уч.-изд. л. 2,27. Тираж 100. Заказ 2.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.