МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Инженерная математика»

М. А. Князев
О. Г. Реутская

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРОСТРОЕНИИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Пособие для магистрантов специальности
1-38 80 01 «Приборостроение»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области приборостроения*

Минск
БНТУ
2022

УДК 681.2:519.87+534.1(075.8)
ББК 34.986я7
К54

Р е ц е н з е н т ы:
заведующий центром «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика» Института физики НАН Беларуси доктор физ.-мат. наук, доцент *Ю. А. Курочкин*;
кафедра естественно-научных дисциплин и информационных технологий Института подготовки научных кадров НАН Беларуси, заведующий кафедрой *А. М. Кунявский*

Князев, М. А.
К54 Математическое моделирование в приборостроении. Моделирование механических колебаний: пособие для магистрантов специальности 1-38 80 01 «Приборостроение» / М. А. Князев, О. Г. Реутская. – Минск : БНТУ, 2022. – 37 с.
ISBN 978-985-583-735-1.

В пособии приведены основные теоретические сведения, а также практические задания по дисциплине «Математическое моделирование в приборостроении» по разделу «Моделирование механических колебаний». Рассматриваются основные аналитические методы моделирования физических и технических систем, совершающих механические колебания.

УДК 681.2:519.87+534.1(075.8)
ББК 34.986я7

ISBN 978-985-583-735-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование процессов и систем неразрывно связано с описанием и построением различного рода математических моделей. Миниатюризация приборов требует детальной проработки входных и выходных параметров технических составляющих современной техники. В таких устройствах электрические подсистемы сочетаются с механическими элементами. В связи с этим моделирование механических и электрических процессов должно быть изучено специалистами на достаточно высоком уровне.

Для решения задач приборостроения широко используются программы инженерных расчетов и прогнозирования необходимых результатов. В связи с этим аналитические и приближенные методы решения задач применительно к процессам механических колебаний широко применяются для описания математических и натурных исследований. Вопросы надежности при проектировании компонентов приборов требуют все более полного учета и контроля технических средств.

Математическое моделирование позволяет эффективно получать результаты при изучении и прогнозировании различных явлений и процессов, возникающих на этапах проектирования и эксплуатации оборудования.

Воспроизведение предполагаемых условий работы приборов становится возможным при стохастическом моделировании. Случайные изменения параметров систем, возникающие шумы измерений и возмущения следует учитывать при составлении начальных условий задачи.

Для построения математических моделей в задачах приборостроения актуальным является решение задач управления, формирования сигнала, передачи и преобразования информации. Для описания соответствующих математических моделей применяются системы дифференциальных уравнений в частных производных, позволяющие решать сложные задачи анализа и конструирования новой техники. Хотя численные методы решения находят все более широкое применение, в настоящем пособии, предназначенном для магистрантов, будут рассмотрены аналитические методы. Эти методы обладают большой наглядностью и позволяют анализировать полученные результаты в значительно больших диапазонах значений параметров моделей.

Получение магистрантами навыков построения и исследования математических моделей различных процессов с использованием математического аппарата, основных уравнений математической физики для поиска путей реализации инженерных задач и освоение аналитических и численных методов их решения является основной целью, которую ставят перед собой авторы данного учебного пособия. В нем описаны колебательные процессы, происходящие в механических системах, также изложены основы построения математических моделей механических колебаний, рассматриваемых в приборостроении, на основе уравнений математической физики в частных производных.

Данное пособие посвящено изучению процессов механических колебаний в приборах и системах на их основе. В дальнейшем планируется подготовка соответствующих пособий и по другим разделам математической физики.

В пособии представлены материалы по современным методам расчета колебательных процессов. Обобщен опыт моделирования при проектировании информационных систем нового поколения. В практической части представлены актуальные задачи и методы их решения на основе уравнений математической физики.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1. Уравнение поперечных колебаний струны

В модели, включающей одну пространственную переменную x и время t (так называемая (1+1)-мерная модель), уравнение свободных поперечных колебаний однородной струны записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

где u – смещение струны;

$a = \sqrt{T/\rho}$;

T – натяжение в произвольной точке струны;

ρ – линейная плотность струны.

Данное уравнение получено с использованием второго закона Ньютона при предположении, что струна представляет собой гибкую упругую нить, смещения струны лежат в одной плоскости, а вектор смещения всегда перпендикулярен направлению пространственной оси. С математической точки зрения гибкость означает, что напряжения в струне направлены по касательной к ее профилю (струна не сопротивляется изгибу). Для определения функциональной зависимости величины напряжений использовался закон Гука, откуда можно заключить, что в каждой точке струны натяжение не зависит от времени.

Для того чтобы уравнение (1.1) можно было применить для описания конкретной системы, нужны дополнительные условия, которые следуют из физического смысла конкретной задачи. Как известно, это начальные условия, задающие положение и скорость всех точек струны в начальный момент времени,

$$u(t=0)=\varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0)=\varphi_1(x). \tag{1.2}$$

Если рассматривать струну конечных размеров, то необходимо также задать граничные условия на ее концах. Для закрепленной струны эти условия при любом $t \geq 0$ имеют вид

$$u(x=0)=0, \quad u(x=l)=0, \tag{1.3}$$

где l – длина струны.

Граничные условия (1.3) могут иметь и другой вид.

Можно построить модель бесконечной или полубесконечной струны. В этом случае считается, что оба конца струны или один из них находятся на столь далеком расстоянии, что по сравнению с характерным размером задачи его можно считать бесконечно большим. Для полубесконечной струны остается только первое из условий (1.3), а для бесконечной струны граничные условия отсутствуют. Начальные условия для таких струн должны быть заданы при всех значениях пространственной координаты.

1.2. Метод распространяющихся волн для решения уравнения поперечных колебаний струны

Рассмотрим в качестве первого шага решение для неограниченной струны. Введем новые переменные

$$\xi = x - at, \qquad \eta = x + at. \tag{1.4}$$

Соотношения $x-at=C_1$ и $x+at=C_2$, где C_1 и C_2 – некоторые константы, представляют собой характеристики уравнения (1.1). Используя новые переменные (1.4), уравнение (1.1) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0. \tag{1.5}$$

Если это уравнение записать как

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0,$$

то получим, что $\partial u/\partial\xi=\omega(\xi)$, причем $\omega(\xi)$ – некоторая произвольная функция переменной ξ. Теперь, если проинтегрировать это соотношение по ξ, считая, что η есть некоторый параметр, то получим, что

$$u=\int\omega(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\Theta_2(\eta),$$

где $\Theta_2(\eta)$ – произвольная функция η.

Если ввести обозначение

$$\Theta_1(\xi)=\int\omega(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

то решение $u(\xi,\eta)$ можно записать в виде

$$u(\xi,\eta)=\Theta_1(\xi)+\Theta_2(\eta).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$u(x,t)=\Theta_1(x-at)+\Theta_2(x+at), \tag{1.6}$$

Здесь Θ_1 и Θ_2 – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Решение (1.6) называют решением Даламбера. Решение, описываемое функцией $\Theta_1(x-at)$, называют прямой волной, а решение $\Theta_2(x+at)$ – обратной. Прямая волна распространяется в положительном направлении оси x со скоростью a, обратная волна распространяется в отрицательном направлении оси x с такой же скоростью a.

Чтобы более определенно говорить о функциях Θ_1 и Θ_2, рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.1). Будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям вида (1.2). Так как мы по-прежнему рассматриваем неограниченную струну, функции φ_0 и φ_1 заданы в $(-\infty,+\infty)$. Требуется определить функции Θ_1 и Θ_2 в таком виде, чтобы выполнялись начальные условия (1.2). Из начальных условий (1.2) получаем

$$\varphi_0(x)=\Theta_1(x)+\Theta_2(x), \qquad \varphi_1(x)=-a\left[\Theta_1'(x)+\Theta_2'(x)\right].$$

Интегрируя второе из данных уравнений, получим

$$\Theta_1(x)-\Theta_2(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)\,\mathrm{d}z+C,$$

где C – постоянная интегрирования.

Теперь можно найти функции Θ_1 и Θ_2:

$$\Theta_1(x)=\frac{1}{2}\varphi_0(x)-\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)\,\mathrm{d}z+\frac{C}{2};$$

$$\Theta_2(x)=\frac{1}{2}\varphi_0(x)+\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)\,\mathrm{d}z+\frac{C}{2}.$$

Подставляя полученные соотношения в (1.6), окончательно можно записать

$$u(x,t)=\frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,\mathrm{d}z. \qquad (1.7)$$

Соотношение (1.7) представляет собой решение рассмотренной выше задачи Коши при условии, что функция $\varphi_0(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а функция $\varphi_1(x)$ – до первого порядка. Данная задача Коши является корректной, так как полученное решение является единственным и непрерывным образом зависит от начальных данных.

Если рассмотреть струну конечной длины l, закрепленную на концах, то колебания такой струны будут описываться уравнением (1.1) при начальных условиях (1.2) и граничных условиях (1.3). В этом случае решение Даламбера требует продолжения функций Θ_1 и Θ_2 вне промежутка $(0,l)$. Это означает, что требуется определить такое начальное возмущение бесконечно длинной струны, чтобы на участке $(0,l)$ оно совпадало с возмущением конечной струны, а остальная часть струны не рассматривалась.

При решении каких-либо конкретных задач может случиться так, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ не будут удовлетворять указанным выше условиям. Это означает, что вопрос о существовании решения задачи Коши оказывается под вопросом. В таких случаях вводят «обобщенные решения». Обобщенным решением задачи Коши для уравнения (1.1) при начальных условиях (1.2) называют функцию $u(x,t)$, которая является пределом равномерно сходящейся последовательности решений $u_n(x,t)$ уравнения (1.1) при начальных условиях вида

$$u_n(t=0)=\varphi_{n0}(x), \qquad \frac{\partial u_n(t=0)}{\partial t}=\varphi_{n1}(x),$$

если последовательность функций $\varphi_{n0}(x)$, имеющих непрерывные производные второго порядка, будет равномерно сходиться к функции $\varphi_0(x)$, а последовательность функций $\varphi_{n1}(x)$, имеющих непрерывные производные первого порядка, будет равномерно сходиться к функции $\varphi_1(x)$. Существование и единственность обобщенного решения задачи Коши для уравнения (1.1) может быть доказана для любых непрерывных функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$.

1.3. Уравнение продольных колебаний

Рассмотрим однородный стержень длины l. Стержень не является бесконечно тонким, у него имеется некий профиль сечения, хотя его точная форма в данном случае не играет принципиальной роли. Важно, что деформирование стержня требует определенного усилия. Будем изучать только такие колебания, при которых смещения поперечных сечений будут происходить только вдоль оси стержня (т. е. можно принять, что поперечные размеры стержня малы в сравнении с его длиной).

Предположим, что стержень растянули (или сжали) вдоль продольной оси, после чего он был предоставлен самому себе. В результате в стержне возникнут продольные колебания. Считаем колебания малыми, что позволяет использовать для вычисления силы натяжения закон Гука.

Используя указанные физические допущения, можно на основании второго закона Ньютона получить уравнение продольных колебаний однородного стержня в виде (1.1), только теперь $u(x,t)$ – смещение некоторого сечения стержня в момент времени t, а коэффициент $a=\sqrt{E/\rho}$, где E – модуль упругости материала, ρ – объемная плотность стержня. Мы снова получили волновое уравнение, следовательно, можно заключить, что продольные колебания стержня будут носить характер волновых колебаний со скоростью, которая определяется коэффициентом a.

Если в задаче учитывается, что на стержень действует известная внешняя сила $F(x,t)$, рассчитанная на единицу объема стержня, то уравнение продольных колебаний примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}F(x,t). \tag{1.8}$$

Данное уравнение описывает вынужденные продольные колебания стержня. Для определения движения стержня требуется записать начальные и граничные условия.

Начальные условия (смещения сечений стержня и их скорости в начальный момент времени):

$$u(x,t=0)=f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t=0)=F(x), \tag{1.9}$$

где $f(x)$ и $F(x)$ – функции, заданные на $(0,l)$.

Граничные условия:

– стержень закреплен на обоих концах:

$$u(0,t)=u(l,t)=0;$$

– один конец стержня закреплен, другой свободен:

$$u(0,t)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0,$$

на свободном конце натяжение равно нулю, поэтому производная по пространственной координате равна нулю;

– оба конца стержня свободны:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(x=0,t\right)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\left(x=l,t\right)=0.$$

1.4. Поперечные колебания мембраны

Мембраной будем называть объект, который представляет собой свободно изгибающуюся натянутую пленку, толщиной которой можно пренебречь. Ясно, что мембрана будет характеризоваться двумя пространственными координатами (например, x и y).

Примем, что в положении равновесия мембрана занимает некоторую двумерную область, ограниченную замкнутой кривой. На мембрану действует равномерное натяжение, приложенное к ее краям.

Рассмотрим только поперечные колебания мембраны, такие, что каждая ее точка будет двигаться перпендикулярно указанной двумерной области.

Так как нашей целью будут малые колебания, то квадратичными членами, а также произведениями частных производных по пространственным переменным будем пренебрегать.

Сделанные предположения позволяют пренебречь изменением площади произвольного участка мембраны во время колебаний и считать, что величина первоначального натяжения не меняется. Если рассмотреть некоторый произвольный участок мембраны, то на него со стороны остальной части мембраны будет действовать по нормали к контуру, ограничивающему мембрану, равномерно распределенное напряжение, расположенное в плоскости, касательной к поверхности мембраны. Можно считать, поскольку рассматриваются малые колебания, что элемент дуги кривой, ограничивающей мембрану, не меняется.

Допустим также, что на мембрану перпендикулярно ее поверхности в равновесном положении действует заданная внешняя сила $p(x, y, t)$, приходящаяся на единицу площади мембраны. Тогда, учитывая все принятые предположения, уравнение поперечных колебаний мембраны можно представить в виде

$$\rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + p(x, y, t), \tag{1.10}$$

где u – смещение мембраны относительно положения равновесия;

$\rho(x, y)$ – поверхностная плотность мембраны;

T – величина натяжения.

Если мембрана является однородной, т. е. $\rho = \text{const}$, то это уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t), \tag{1.11}$$

где $a = \sqrt{T/\rho}$, $f(x, y, t) = p(x, y, t)/\rho$.

Если внешняя сила отсутствует, то получаем уравнение свободных колебаний однородной мембраны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{1.12}$$

Для полного определения движения мембраны требуется задание начальных условий (смещения и скорости мембраны в начальный момент времени):

$$u(x, y, t = 0) = \varphi_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t = 0) = \varphi_1(x, y).$$

Так как на контуре L мембрана закреплена, то граничное условие имеет вид

$$u\left(L, t \geq 0\right) = 0.$$

1.5. Метод разделения переменных

Метод разделения переменных (метод Фурье) является одним из наиболее распространенных методов решения линейных уравнений в частных производных. Особенностью данного метода являются простота, наглядность и ясная физическая интерпретация получаемых решений.

Рассмотрим этот метод на примере решения задачи о колебаниях однородной струны, концы которой закреплены.

Запишем постановку задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.13}$$

при начальных условиях

$$u\left(x, t=0\right) = f\left(x\right),\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(x, t=0\right) = F\left(x\right),\ 0 \leq x \leq l \tag{1.14}$$

и граничных условиях

$$u\left(x=0\right) = u\left(x=l\right) = 0. \tag{1.15}$$

Длину струны обозначим через l.

Предположим, что частное решение уравнения (1.13), которое не тождественно равно нулю, можно записать в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента

$$u\left(x, t\right) = X\left(x\right)T\left(t\right). \tag{1.16}$$

Подставим (1.16) в уравнение (1.13). В результате получим следующее соотношение:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{1.17}$$

Здесь штрихами обозначены соответствующие производные.

Поскольку правая часть уравнения (1.17) зависит только от пространственной координаты, а левая часть – только от времени, то данное равенство возможно только при условии, что обе части являются постоянной величиной. Обозначим эту постоянную через $-\lambda$ (знак минус выбран из соображений удобства). В результате соотношение (1.17) можно записать в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \tag{1.18}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{1.19}$$

В качестве следующего шага построим нетривиальные решения уравнения (1.19), удовлетворяющие граничным условиям вида

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{1.20}$$

В результате мы пришли к задаче на собственные значения и собственные функции: найти такие значения параметра λ (собственные значения), при которых существуют нетривиальные решения (собственные функции) уравнения (1.19) при граничных условиях (1.20).

Рассмотрим случаи, когда λ отрицательно, равно нулю и положительно.

Если $\lambda < 0,$ то уравнение (1.19) имеет общее решение вида

$$X\left(x\right) = C_1 \exp\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{-\lambda}x\right).$$

Граничные условия позволяют получить соотношения

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 \exp\left(\sqrt{-\lambda}l\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{-\lambda}l\right) = 0.$$

Определитель данной системы отличен от нуля, следовательно, $C_1 = C_2 = 0$ и $X\left(x\right) = 0.$

Если $\lambda = 0,$ то общее решение уравнения (1.19) будет иметь вид

$$X\left(x\right) = C_1 + C_2 x.$$

Граничные условия дают $C_1 + C_2 \cdot 0 = 0,$ $C_1 + C_2 \cdot l = 0,$ откуда следует, что $C_1 = C_2 = 0$ и $X\left(x\right) = 0.$

Если $\lambda > 0,$ то общее решение уравнения (1.19) имеет вид

$$X\left(x\right) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

Граничные задачи условия дают соотношения вида $C_1 = 0,$ $C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) = 0.$ Чтобы получить нетривиальное решение, потребуем выполнение условия $\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) = 0,$ откуда получаем, что нетривиальное решение возможно только при

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin(k\pi x/l),$$

определенные с точностью до постоянного множителя, который можно принять равным единице без потери общности.

Для $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (1.18) можно записать как

$$T_k(t) = a_k \cos(k\pi at/l) + b_k \sin(k\pi at/l),$$

где a_k и b_k – произвольные константы.

Следовательно, функции

$$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t)$$

будут удовлетворять уравнению (1.13) и граничным условиям (1.15) в случае любых a_k и b_k.

Поскольку уравнение (1.13) является линейным и однородным, то и ряд вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi at}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi at}{l}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad (1.21)$$

будет решением этого уравнения, если он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по независимым переменным.

Определим постоянные a_k и b_k. Если продифференцировать ряд (1.21) по времени и положить в полученном выражении и в выражении (1.21) время равным нулю, то получим, что

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x/l),$$

$$F(x)=(k\pi a/l)\, b_k \sin(k\pi x/l).$$

Две последние формулы представляют разложения в ряды Фурье по функциям синуса в интервале $(0, l)$. Коэффициенты этих разложений вычисляются известным образом:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(k\pi x/l)\,\mathrm{d}x,$$

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x)\sin(k\pi x/l)\,\mathrm{d}x.$$

Таким образом, решение поставленной задачи найдено.

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

2.1. Примеры решения задач

2.1.1. Задача Коши для неоднородного уравнения колебаний

Запишем постановку задачи:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$
$$-\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(x, t = 0) = \varphi(x), \tag{2.1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = \psi(x).$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу Коши:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > \tau, \quad w_f(x, \tau; \tau) = 0,$$
$$\frac{\partial w_f}{\partial t}(x, \tau; \tau) = f(x,t). \tag{2.2}$$

Пусть $w_f(x,t;\tau)$ – решение этой вспомогательной задачи Коши.

Используя формулу Даламбера, можно записать, что

$$w_f(x,t;\tau) = w_f(x,t-\tau;\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.3}$$

Очевидно, что

$$u(x,t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,t;0) + w_\psi(x,t;0), \tag{2.4}$$

где функции

$$w_{\psi}\left(x,t;0\right)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi\left(\xi\right)\mathrm{d}\xi,$$

$$w_{\varphi}\left(x,t;0\right)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi\left(\xi\right)\mathrm{d}\xi$$

будут решениями задачи (2.2) при $\tau=0$ и, соответственно, $f=\psi\left(x\right)$, $f=\varphi\left(x\right)$.

Можно показать, что решение неоднородного уравнения (2.1) с нулевыми начальными условиями записывается в следующем виде:

$$u\left(x,t\right)=a^{2}\int_{0}^{t}w_{f}\left(x,t;\tau\right)\mathrm{d}\tau. \tag{2.5}$$

Если продифференцировать функцию (2.5), то получим следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}=a^{2}\int_{0}^{t}\frac{\partial w_{f}\left(x,t;\tau\right)}{\partial t}\mathrm{d}\tau,\\ \frac{\partial^{2}u\left(x,t\right)^{2}}{\partial t}=a^{2}\int_{0}^{t}\frac{\partial^{2}w_{f}\left(x,t;\tau\right)}{\partial t^{2}}d\tau+a^{2}f\left(x,t\right),\\ \frac{\partial^{2}u\left(x,t\right)^{2}}{\partial x^{2}}=a^{2}\int_{0}^{t}\frac{\partial^{2}w_{f}\left(x,t;\tau\right)}{\partial x^{2}}\mathrm{d}\tau.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Окончательно решение задачи (2.1) запишем в виде

$$u\left(x,t\right)=\frac{\partial w_{\varphi}}{\partial t}\left(x,t;0\right)+w_{\psi}\left(x,t;0\right)+a^{2}\int_{0}^{t}w_{f}\left(x,t;\tau\right)\mathrm{d}\tau$$

или, используя соотношение (2.3),

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+$$
$$+\frac{a}{2}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Таким образом, имея решение вспомогательной задачи (2.2), можно построить решение общей задачи (2.1).

2.1.2. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах

Пусть на струну, концы которой закреплены, действует внешняя сила $p(x,t)$. Будем иметь в виду, что эта сила приходится на единицу длины струны. Запишем постановку задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t),\quad g(x,t)=\frac{1}{\rho}p(x,t),$$

при граничных

$$u(x=0)=u(x=l)=0 \tag{2.7}$$

и начальных условиях

$$u(t=0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0)=F(x).$$

Здесь l – длина струны. Представим решение задачи (2.7) в виде $u=v+w,$ где v – решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+g(x,t) \tag{2.8}$$

при однородных граничных и начальных условиях

$$v(x=0)=v(x=l)=0, \quad v(t=0)=\frac{\partial v}{\partial t}(t=0)=0,$$

а w – решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.9}$$

при граничных и начальных условиях

$$w(x=0)=w(x=l)=0,$$

$$w(t=0)=f(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(t=0)=F(x).$$

Функция v описывает вынужденные колебания струны под действием внешней силы при условии, что начальные возмущения равны нулю. Функция w описывает свободные колебания струны, которые происходят только под действием начальных возмущений.

Метод определения свободных колебаний описан в разделе 1.5. Рассмотрим, как найти вынужденные колебания. Будем искать функцию v в следующем виде:

$$v(x,t)=\Sigma_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin(k\pi x/l). \tag{2.10}$$

Такая форма записи решения позволяет автоматически удовлетворять соответствующим граничным условиям. Определим функции $T_k(t)$ таким способом, чтобы ряд (2.10) удовлетворял уравнению (2.8) и соответствующим начальным условиям.

Для этого подставим (2.10) в уравнение (2.8). Получим следующее соотношение:

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2}+\omega_k^2 T_k\right]\sin\left(k\pi x/l\right)=g\left(x,t\right), \tag{2.11}$$

где $\omega_k = k\pi a/l$.

Если разложить функцию $g\left(x,t\right)$ в ряд Фурье по синусам на интервале $\left(0, l\right)$, то

$$g\left(x,t\right)=\Sigma_{k=1}^{\infty} g_k\left(t\right)\sin\left(k\pi x/l\right), \tag{2.12}$$

где $g_k\left(t\right)=\dfrac{2}{l}\int_0^l g\left(\xi,t\right)\sin\left(\dfrac{k\pi\xi}{l}\right)\mathrm{d}\xi.$

Сравнивая разложения (2.11) и (2.12), получим систему уравнений

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2}+\omega_k^2 T_k = g_k\left(t\right),\quad k=1, 2, 3,... \tag{2.13}$$

Последовательно решая эту систему уравнений можно, в принципе, определить все функции $T_k\left(t\right)$. Начальные условия при этом имеют вид

$$T_k\left(t=0\right)=0,\quad \frac{\partial T_k}{\partial t}\left(t=0\right)=0,\quad k=1, 2, 3,...$$

Решения системы уравнений (2.13) при указанных начальных условиях можно записать следующим образом:

$$T_k(t)=\frac{1}{\omega_k}\int_0^l g_k(t)\sin\left[\omega_k(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau=$$

$$=\frac{2}{\omega_k}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_0^l g(\xi,\tau)\sin\left[\omega_k(t-\tau)\right]\sin(k\pi\xi/l)\,\mathrm{d}\xi.$$

Подставим полученные соотношения в (2.10), что позволит записать в явном виде решение $v(x,t)$. Данный ряд равномерно сходится, если функция $f(x,t)$ будет непрерывной и у нее будут иметься непрерывные частные производные по пространственной координате до второго порядка, а также будет выполняться условие

$$f(0,t)=f(l,t)=0.$$

Окончательно решение задачи (2.7) записывается в виде

$$u(x,t)=\Sigma_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin(k\pi x/l)+$$

$$+\Sigma_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(k\pi at/l)+b_k\sin(k\pi at/l)\right]\sin(k\pi x/l),$$

где $a_k=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(k\pi x/l)\,\mathrm{d}x;$

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x)\sin(k\pi x/l)\,\mathrm{d}x.$$

2.1.3. Свободные колебания прямоугольной мембраны

Рассмотрим пример решения задачи с двумя пространственными переменными. Задача о свободных колебаниях прямоугольной мембраны может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \qquad (2.14)$$

$0 \le x \le p,\ 0 \le y \le q,$ с граничными условиями

$$\begin{gathered} u(x=0, y, t) = u(x=p, y, t) = u(x, y=0, t) = \\ = u(x, y, t=0) = 0 \end{gathered} \qquad (2.15)$$

и начальными условиями

$$u(t=0) = f(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = F(x,y). \qquad (2.16)$$

Представим решение уравнения (2.14) в виде

$$u(x,y,t) = T(t)\,v(x,y).$$

Подставив последнее соотношение в уравнение (2.14), получим

$$\frac{\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2}}{a^2 T} = \frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}}{v}.$$

Данное равенство имеет место, если обе его части равны между собой и некоторой константе. Обозначим ее через $-k^2$. Тогда можно записать, что

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + a^2 k^2 T = 0; \qquad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0; \qquad (2.18)$$

$$v(x = 0) = v(x = p) = v(y = 0) = v(y = q) = 0. \qquad (2.19)$$

Для решения задачи (2.18)–(2.19) применим метод разделения переменных. Пусть

$$v(x, y) = X(x)Y(y).$$

Подставив данное соотношение в уравнение (2.18), получим два уравнения вида

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_1^2 X = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_2^2 Y = 0, \qquad (2.20)$$

где $k^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Общие решения уравнений (2.20) известны:

$$X(x) = C_1 \cos(k_1 x) + C_2 \sin(k_1 x),$$

$$Y(y) = C_{13} \cos(k_2 y) + C_4 \sin(k_2 y).$$

Согласно условиям (2.19), получим

$$X(0) = X(p) = Y(0) = Y(q),$$

откуда следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Тогда, чтобы получить нетривиальное решение, положим $C_3 = C_4 = 1$. Это, в свою очередь, приводит к выражениям

$$X(x) = \sin(k_1 x), \quad Y(y) = \sin(k_2 y),$$

причем $\sin(k_1 p) = 0$ и $\sin(k_2 q) = 0.$

Из двух последних условий можно определить бесчисленное множество собственных значений

$$k_{1m} = m\pi/p \quad \text{и} \quad k_{2n} = n\pi/q, \quad m, n = 1, 2, 3, ...$$

Теперь можно записать соответствующие собственные функции для задачи (2.18)–(2.19)

$$v_{mn}(x, y) = \sin(m\pi x/p)\sin(n\pi y/q).$$

Общее решение уравнения (2.17) для каждого $k^2 = k_{mn}^2$ имеет следующий вид:

$$T_{mn}(t) = A_{mn}\cos(ak_{mn}t) + B_{mn}\sin(ak_{mn}t).$$

Следовательно, частные решения уравнения (2.14) можно записать в виде

$$u_{mn}(x, y, t) = \left[A_{mn}\cos(ak_{mn}t) + B_{mn}\sin(ak_{mn}t)\right]\times$$
$$\times\sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{q}\right).$$

Для того чтобы найти коэффициенты A_{mn} и B_{mn} составим ряд вида

$$u(x, y, t) = \Sigma_{m=1}^{\infty}\Sigma_{n=1}^{\infty}u_{mn}. \tag{2.21}$$

При условии равномерной сходимости ряда (2.21) будут равномерно сходиться и ряды, полученные его двукратным почленным дифференцированием по каждому из аргументов. Начальные условия (2.16) при этом будут иметь вид

$$\Sigma_{m=1}^{\infty}\Sigma_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\left(m\pi x/p\right)\sin\left(n\pi y/q\right)=f\left(x,y\right),$$

$$\Sigma_{m=1}^{\infty}\Sigma_{n=1}^{\infty}ak_{mn}B_{mn}\sin\left(m\pi x/p\right)\sin\left(n\pi y/q\right)=F\left(x,y\right).$$

Из полученных выражений непосредственно следует, что

$$A_{mn}=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q f\left(x,y\right)\sin\left(m\pi x/p\right)\sin\left(n\pi y/q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$B_{mn}=\frac{4}{ak_{mn}pq}\int_0^p\int_0^q F\left(x,y\right)\sin\left(m\pi x/p\right)\sin\left(n\pi y/q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Итак, решение задачи построено. Ясно, что отдельные члены ряда (2.21) представляют собой гармонические колебания. Это, в свою очередь, означает, что колебательное движение мембраны в целом слагается из бесконечного числа собственных гармонических колебаний, которые принято называть стоячими волнами. В отличие от струны, для которой каждой частоте собственных колебаний соответствует определенная форма струны, в случае с мембраной одной и той же частоте может соответствовать несколько положений с различным распределением узловых линий (т. е. линий, вдоль которых амплитуды собственных гармонических колебаний равны нулю).

2.1.4. Радиальные колебания газа в неограниченной цилиндрической трубке

В данном пункте приведен пример решения задачи не в прямоугольных, а в криволинейных (полярных) координатах.

Обозначим радиус трубки через R и будем считать, что она является достаточно длинной. Рассмотрим только радиальные колебания газа, т. е. такие колебания, при которых потенциал скоростей u будет зависеть только от r – расстояния колеблющейся частицы газа от оси цилиндра и времени.

Волновое уравнение для такой задачи записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (2.22)$$

с начальными условиями

$$u(t=0) = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = F(r) \qquad (2.23)$$

и граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r=R) = 0. \qquad (2.24)$$

Частное решение уравнения (2.22) запишем в виде

$$u(r,t) = T(t)\,w(r).$$

Подставим последнее соотношение в уравнение (2.22). В результате получим систему уравнений

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + a^2\lambda^2 T = 0, \qquad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \lambda^2 w = 0. \qquad (2.26)$$

Граничное условие для уравнения (2.26) записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r = R) = 0.$$

Уравнение (2.26) известно. Это уравнение Бесселя нулевого порядка. Его решение записывается следующим образом:

$$w(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r), \qquad (2.27)$$

где C_1, C_2 – некоторые константы;

J_0 – функция Бесселя первого рода;

Y_0 – функция Бесселя второго рода.

Поскольку Y_0 равна бесконечности в точке $r = 0,$ то в формуле (2.27) необходимо положить константу C_2 равной нулю. В результате без потери общности можно записать

$$w(r) = J_0(\lambda r).$$

Теперь граничное условие $J_0'(\lambda r) = 0$ можно представить в виде $J_1(\lambda r) = 0.$ Это уравнение определяет значения собственных чисел уравнения (2.26):

$$\lambda_k^2 = \frac{\mu_k^2}{R^2}.$$

Каждому такому собственному значению соответствует собственная функция

$$w_k(r) = J_0(\mu_k r/R).$$

Если $\lambda^2 = 0$, то в этом случае $w_0(r) = \text{const}$. При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (2.25) можно записать в виде

$$T_k(t) = a_k \cos(\mu_k at/R) + b_k \sin(\mu_k at/R),$$

где a_k, b_k – некоторые константы.

При $\lambda = 0$

$$T_0(t) = a_0 + b_0 t.$$

Теперь можно записать:

$$u_0 = a_0 + b_0 t,$$

$$u_k(r,t) = \left[a_k \cos(\mu_k at/R) + b_k \sin(\mu_k at/R)\right] J_0(\mu_k r/R).$$

Окончательно решение задачи представимо в виде

$$\begin{gathered} u(r,t) = a_0 + b_0 t + \\ + \Sigma_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(\mu_k at/R) + b_k \sin(\mu_k at/R)\right] J_0(\mu_k r/R). \end{gathered} \tag{2.28}$$

Коэффициенты a_k, b_k определяются из разложения функций $f(r)$ и $F(r)$ в ряды по функциям Бесселя. В результате можно записать

$$a_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R rf(r)\,\mathrm{d}r, \quad b_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R rF(r)\,\mathrm{d}r,$$

$$a_k = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \int_0^R rf(r) J_0(\mu_0 r/R)\,\mathrm{d}r,$$

$$b_k = \frac{2}{aR^2 \mu_k J_0^2(\mu_k)} \int_0^R rF(r) J_0(\mu_0 r/R)\,\mathrm{d}r.$$

В выражении (2.28) для окончательного решения вкладом от u_0 можно пренебречь из соображений физического смысла, т. к. на зависимость колебаний от радиуса оно не влияет.

2.2. Задачи для самостоятельного решения

1. В начальный момент времени $t = 0$ неограниченная струна получает в точке $x = x_0$ поперечный удар, передающий струне импульс I. Найти отклонение $u(x,t)$ точек струны от положения равновесия при $t > 0$, предполагая, что начальные отклонения точек струны и начальные скорости равны нулю.

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\rho}\left[\sigma_0\left(x + at - x_0\right) - \sigma_0\left(x - at - x_0\right)\right],$$

$$\sigma_0(z) = 0, \quad -\infty < z < 0; \quad \sigma_0(z) = 1, \quad 0 < z < \infty.$$

2. Полуограниченному стержню со свободным концом в начальный момент времен $t = 0$ с помощью продольного удара по концу передается осевой импульс I. Найти отклонение $u(x, t)$ точек стержня при $t > 0$, если начальные отклонения и начальные скорости равны нулю.

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{1}{a\rho}\left[\sigma_0\left(x + at\right) - \sigma_0\left(x - at\right)\right].$$

3. Конец полуограниченной струны $0 < x < \infty$, начиная с момента времени $t = 0$, движется по закону $u(0,t) = \mu(t)$. Найти

отклонение точек струны, если начальные скорости и отклонения равны нулю.

Ответ:

$$u(x,t)=\mu(t-x/a),\quad x/a<t<0,$$
$$u(x,t)=0,\quad 0<t<x/a.$$

4. Концы струны закреплены жестко, а начальное отклонение имеет форму квадратичной параболы, симметричной относительно перпендикуляра к середине струны. Найти колебания струны, если начальные скорости равны нулю.

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right]\cos\left[\frac{(2n+1)\pi at}{l}\right].$$

5. Найти продольные колебания стержня длиной l, если один его конец закреплен жестко, а к другому с момента времени $t=0$ приложена постоянная сила F_0.

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{F_0}{ES}x-\frac{8F_0 l}{ES\pi^2}\times$$

$$\times\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\left[\frac{(2n+1)}{2l}\pi x\right]\cos\left[\frac{(2n+1)}{2l}at\right].$$

6. В точке x_0 струны длиной x_0 с момента времени $t=0$ приложена постоянная поперечная сила F_0. Найти колебания струны, если ее концы жестко закреплены.

Ответ:

$$u(x,t)=\varphi(x)-$$

$$-\frac{2lF_0}{\pi^2T_0}\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi at}{l}\right),$$

$$\varphi(x)=\frac{F_0\left(l-x_0\right)}{T_0 l}x,\quad 0<x\le x_0,$$

$$\varphi(x)=\frac{F_0x_0\left(l-x\right)}{T_0 l},\quad x_0<x<l,$$

$$T_0\left[u_x\left(x_0+0,t\right)-u_x\left(x_0-0,t\right)\right]=-F_0.$$

7. Найти продольные колебания стержня длины l, левый конец которого закреплен жестко, а к правому с момента времени $t=0$ приложена сила $F(t)=At$, $A-\text{const}$. Предполагается, что среда не оказывает сопротивления колебаниям.

Ответ:

$$u(x,\,t)=\frac{A}{ES}xt+\Sigma_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right]\sin\left[\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\right],$$

$$b_n=-\frac{4}{(2n+1)\pi a}\int_0^l\frac{Az}{ES}\sin\left[\frac{(2n+1)z}{2l}\right]\mathrm{d}z.$$

8. Найти колебания струны длины l с жестко закрепленными концами в среде без сопротивления, вызванные поперечным ударом в точке x_0 в момент времени t_0, передавшим струне импульс I, учитывая этот удар свободным членом уравнения.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{2I}{\rho l} \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}.$$

Список использованных источников

1. Кудин, В. В. Моделирование колебательных процессов в машинах : учебно-методическое пособие к лабораторным работам по дисциплине «Колебания в машинах» для студентов машиностроительных специальностей / В. В. Кудин [и др.]. – Минск : БНТУ, 2013. – 33 с.

2. Куликов, Г. М. Математическое моделирование механических колебаний и процессов тепломассопереноса / Г. М. Куликов, А. Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 96 с.

3. Щеглова, И. Ю. Моделирование колебательных процессов (на примере физических задач): методическое пособие для студентов физико-математического факультета / И. Ю. Щеглова, А. А. Богуславский. – Коломна : Коломенский государственный педагогический институт, 2009. – 130 с.

4. Боговский, М. Е. Уравнения математической физики / М. Е. Боговский. – М. : МФТИ, 2019. – 300 с.

5. Капцов, О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными / О. В. Капцов. – М. : Физматлит, 2009. – 184 с.

6. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Изд-во МГУ, 2004. – 789 с.

7. Рейзлин, В. И. Математическое моделирование / В. И. Рейзлин. – М. : Юрайт, 2016. – 126 с.

8. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.

Учебное издание

КНЯЗЕВ Михаил Александрович
РЕУТСКАЯ Ольга Геннадьевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ПРИБОРОСТРОЕНИИ.
МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

Пособие для магистрантов специальности
1-38 80 01 «Приборостроение»

Редактор *Н. А. Костешева*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 03.02.2022. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,21. Уч.-изд. л. 1,73. Тираж 100. Заказ 761.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.