

ПРИБЛИЖЕННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ФРОНТА ЖИДКОГО СЛОЯ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

Абрамович А. Е., Авдейчик Е. В., Конон П. Н.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Существуют технологические процессы, использующие движение слоя жидкости на вращающейся поверхности диска. Во многих случаях эти процессы основаны на явлениях неустойчивости свободной поверхности слоя жидкости. Например, производство минеральных и металлических волокон из высокотемпературных расплавов при центробежном способе состоит в переработке расплава в волокно вращающимися дисками либо цилиндрами [2]. В других технологических процессах требуются минимальные возмущения поверхности слоя жидкости. Это достигается при определенных умеренных угловых скоростях вращения диска. Подобного рода течения встречаются при нанесении покрытий и смазок на горизонтальные поверхности вращением. Ряд экспериментов показывает, что при медленном вращении в некоторых случаях движение диска и слоя можно рассматривать как единое целое [3]. Исследованию форм равновесия капли на диске посвящены работы [8–11]. Некоторые вопросы движения слоя и его устойчивости на вращающемся диске рассмотрены в работах [4–7].

Постановка задачи и вывод уравнений движения. Исследуется движения жидкой капли на горизонтальном вращающемся диске. В полной постановке рассматриваемая задача сложна и относится к течениям с неизвестной границей области. Образуется такой тип пленочного течения, когда жидкость стекает в виде множества струек. Фотографии проведенных экспериментов [3] показаны на рис. 1. Такое течение принято называть ручейковым или ривулетным течением, а отдельную струйку, ограниченную двумя контактными линиями – ривулетом [1].

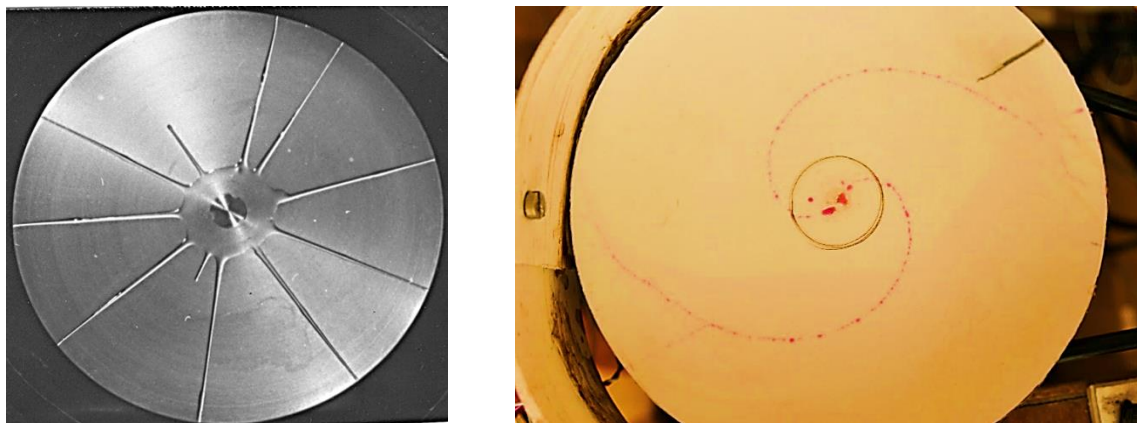


Рис. 1. Ривулетное течение слоев глицерина (слева) и воды (справа) на вращающемся диске

Построим приближенную модель движения капли. Будем исследовать движения капли с вязким трением как материальной частицы постоянной массы m по поверхности вращающегося с угловой скоростью ω горизонтального диска. Примем, что в дальнейшем термины материальная точка, частица, капля, фронт слоя, струйки, ривулеты являются заменимыми в употреблении.

В плоскости ее движения введем абсолютную полярную систему координат (r, φ) и относительную полярную систему координат (r_0, φ_0) , вращающуюся вместе с диском

и совпадающую с системой (r, φ) в начальный момент времени. Пусть движение капли в абсолютной системе координат описывается законом

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad (1)$$

где t — время, а в относительной системе координат —

$$r_0 = r_0(t), \quad \varphi_0 = \varphi_0(t). \quad (2)$$

Законы движения (1) и (2) в данных системах связаны соотношениями

$$r_0(t) = r(t), \quad \varphi_0(t) = \varphi(t) - \omega t. \quad (3)$$

В абсолютной системе координат на каплю, кроме силы тяжести, направленной вертикально вниз, действует только одна сила — сила вязкого трения \bar{F} о поверхность вращающегося горизонтального основания. Введем следующие предположения относительно этой силы:

1) сила трения $\bar{F}(t)$ в каждый момент времени t направлена противоположно вектору относительной скорости $\bar{v}(t)$ капли в этот момент времени, где

$$\bar{v}(t) = \dot{r}(t)\bar{e}_r + r(t)(\dot{\varphi}(t) - \omega)\bar{e}_\varphi, \quad (4)$$

где $\bar{e}_r, \bar{e}_\varphi$ — орты системы (r, φ) ;

2) сила трения \bar{F} в каждый момент времени зависит только от скорости \bar{v} в данный момент времени, $\bar{F} = \bar{F}(\bar{v})$;

3) при небольших значениях величины v относительной скорости зависимость модуля F силы трения от v близка к прямой пропорциональности, т. е.

$$F = k_1 v, \quad [k_1] = \text{кг/с}; \quad (5)$$

4) при больших значениях величины v относительной скорости зависимость модуля F силы трения от v^2 близка к прямой пропорциональности, т. е.

$$F = k_2 v^2, \quad [k_2] = \text{кг/м}. \quad (6)$$

Точка вверху, как обычно, обозначает производную по времени. Вектор абсолютного ускорения $\bar{w}(t)$ определяется по формуле [12]

$$\bar{w} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\bar{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\bar{e}_\varphi. \quad (7)$$

Таким образом, уравнения движения в неподвижной системе координат принимают вид

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= -\dot{r} \frac{F(v)}{v}, \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= r(\omega - \dot{\varphi}) \frac{F(v)}{v}. \end{aligned} \quad (8)$$

В системе (8) величина скорости определяется формулой

$$v = \sqrt{r^2(\omega - \dot{\varphi})^2 + \dot{r}^2}. \quad (9)$$

Начальные условия для системы (8) имеют вид

$$r(0) = r_{10} > 0, \quad \varphi(0) = \varphi_{10}, \quad \dot{r}(0) = r_{11}, \quad \dot{\varphi}(0) = \varphi_{11}. \quad (10)$$

С помощью замены

$$a = \frac{\dot{r}}{r}, \quad b = \dot{\varphi}. \quad (11)$$

можно понизить порядок дифференциальных уравнений (8):

$$\dot{a} + a^2 - b^2 = -a \frac{F(v)}{mv}, \quad (12)$$

$$\dot{b} + 2ba = (\omega - b) \frac{F(v)}{mv}.$$

Начальные условия для системы (11), (12) имеют вид

$$r(0) = r_{10} > 0, \quad \varphi(0) = \varphi_{10}, \quad a(0) = \frac{r_{11}}{r_{10}} = a_{10}, \quad b(0) = \varphi_{11}. \quad (13)$$

Модуль относительной скорости находится по формуле

$$v = r \sqrt{(\omega - b)^2 + a^2}. \quad (14)$$

Рассмотрим случай медленного и умеренного движения, когда выполняется соотношение (5). Для практических расчетов важно знать величину коэффициента трения k_1 . Его можно определить экспериментально. Предлагается также новый теоретический способ определения. Величину силы трения свяжем с коэффициентом кинематической вязкости жидкости, используя следующие соображения. Выделим из фронта движущейся вытянутой капли элемент приблизительно в виде прямоугольного параллелепипеда высоты h , длины l и ширины d , центр масс которого движется со скоростью v .

Скорость частиц жидкости рассматриваемого элемента на твердой поверхности в подвижной системе координат равна 0, а на верхнем слое высотой h равна v_{\max} . По гидромеханическому закону Ньютона, чтобы обеспечить такое движение, к верхнему слою необходимо приложить касательное напряжение τ , равное [11]

$$\tau = \nu \rho \frac{v_{\max}}{h}, \quad v = \frac{v_{\max}}{2}. \quad (15)$$

Здесь ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, ρ – ее плотность. Тогда величина сила трения единицы массы равна

$$\frac{F(v)}{m} = \frac{\tau dl}{\rho dlh} = \frac{2\nu}{h^2} v. \quad (16)$$

С учетом (16) система уравнений движения с начальными условиями (13) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= b^2 - a^2 - a \frac{2\nu}{h^2}, \\ \dot{b} &= (\omega - b) \frac{2\nu}{h^2} - 2ba, \\ \dot{r} &= ar, \quad \dot{\varphi} = b. \end{aligned} \quad (17)$$

Если форма движущегося слоя близка к сфере с радиусом R , то можно принять высоту слоя $h = 2R$. В уравнение (17) при определении силы вязкого трения входит толщина движущегося слоя h . Из уравнений следует, чем толще слой, тем меньшее ускорение он получает, что логически верно.

Анализ уравнений движения. Система (17) имеет нелинейный вид и вместе с граничными условиями (13) определяет задачу Коши. Исследуем ее решения численным методом. Расчеты проведены для движения фронта слоев глицерина и воды, имеющих существенно различные вязкости. При температуре 20°C кинематическая вязкость глицерина принята равной $\nu = 680 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, вязкость воды – $\nu = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Расчеты проведены при различных угловых скоростях ω . Высота слоя h принималась равной

0,002 м или 0,005 м. При интегрировании системы (17) необходимо задать начальное отклонение $r_{10} \neq 0$. Все другие начальные значения в (13) равны нулю. В результате решения определялись законы движения фронта слоя в абсолютной $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ и относительной $r_0 = r_0(t)$, $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ системах координат, а также траектории движения в этих двух системах координат.

На рис. 2, а, б представлены траектории жидких фронтов слоев глицерина и воды в относительной системе координат при угловой скорости вращения диска $\omega = \pi$ рад/с. Видно, что движение частиц воды и глицерина проходит по существенно различным траекториям. Вследствие значительно меньшего трения о поверхность диска и существенного влияния силы Кориолиса в относительном движении траектории фронтов струек воды имеют вид хорошо закрученных спиралей. Относительные траектории фронта струек глицерина близки к прямолинейным.

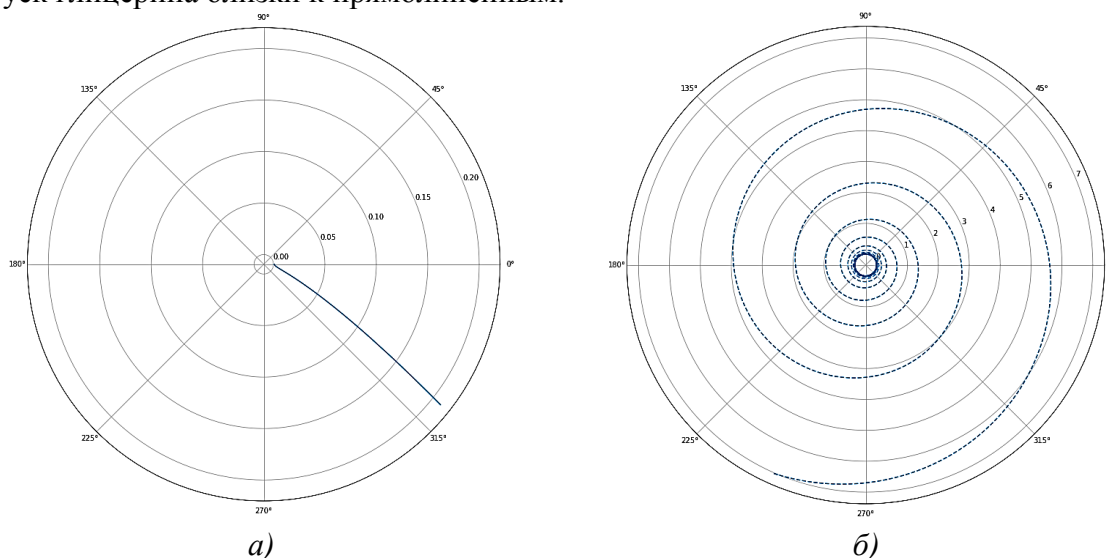


Рис. 2. Траектория фронтов капель а) глицерина и б) воды в относительной системе координат при угловой скорости $\omega = \pi$ рад/с

На рис. 3 даны траектории жидких фронтов слоев воды в относительной системе координат при различных угловых скоростях вращения. С ростом угловой скорости траектории быстрее «раскручиваются» по спиральям больших радиусов и за одинаковое время фронт струйки воды проходит большее расстояние, чем глицерина. Качественно траектории согласуются с проведенными экспериментами [3].

Движение струи по радиусу в ряде экспериментов [3] объясняется довольно малым влиянием этой силы Кориолиса по сравнению с силой инерции. Свяжем подвижную радиальную ось, вращающуюся жестко с диском, с центром диска и предполагаемым направлением движения материальной частицы по радиусу. Без учета силы Кориолиса движение будет прямолинейным и определяться уравнением относительного движения

$$\ddot{r}_0 + \frac{2v}{h^2} \dot{r}_0 - \omega^2 r_0 = 0. \quad (18)$$

Условия при $t = 0$ определяют начальное положение точки и нулевую начальную скорость

$$r_0(0) = r_{00}, v_0 = \dot{r}_0(0) = 0. \quad (19)$$

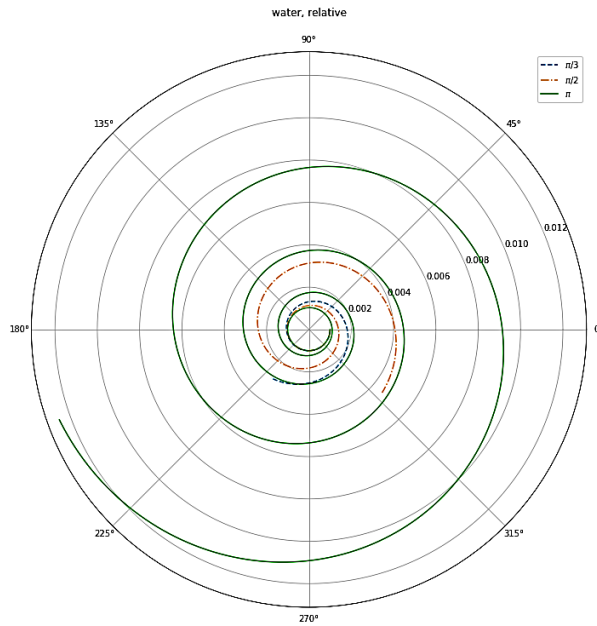


Рис. 3. Траектории фронта слоев воды в относительной системе координат при различных угловых скоростях $\omega = \pi / 3$ рад/с, $\omega = \pi / 2$ рад/с, $\omega = \pi$ рад/с

Решая (18), (19), определяем закон движения жидкой капли аналитической формулой

$$r_0(t) = \frac{r_{00}}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}), \quad (20)$$

$$\lambda_1 = -\frac{v}{h^2} + \frac{1}{h^2} \sqrt{v^2 + h^4 \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{v}{h^2} - \frac{1}{h^2} \sqrt{v^2 + h^4 \omega^2}.$$

На рис. 4 изображен закон относительного движения $r_0(t)$ фронта каплей глицерина при $r_{00} = 0,01$ м, $h = 0,002$ м, $v = 680 \cdot 10^{-6}$ м²/с и разных значениях угловой скорости $\omega_1 = 2\pi$ рад/с, $\omega_2 = \pi$ рад/с, $\omega_3 = \pi / 2$ рад/с.

Время T достижения капли границы диска R_0 можно точно рассчитать, решая трансцендентное уравнение

$$\frac{r_{00}}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 T} - \lambda_1 e^{\lambda_2 T}) = R_0. \quad (21)$$

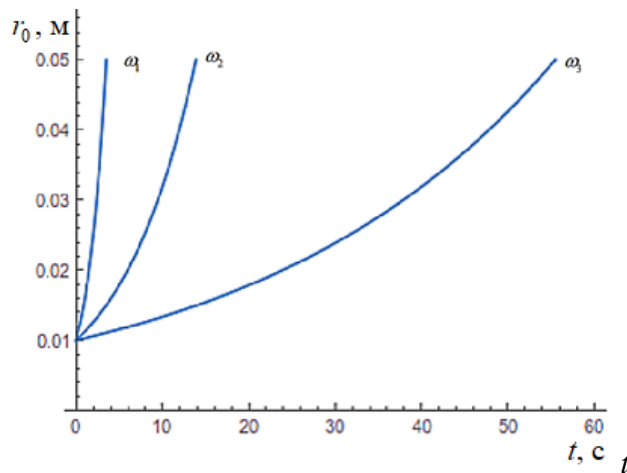


Рис. 4. Закон относительного движения $r_0(t)$ фронта каплей глицерина при различных угловых скоростях вращения диска

Для сильновязких жидкостей, например, для глицерина, $e^{\lambda_2 t} \ll 1$ почти все время движения. Тогда из последнего уравнения можно получить

$$T = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{R_0}{r_{00}}. \quad (22)$$

Из соотношения (20) определяем скорость капли при движении с трением

$$v_0(t) = \dot{r}_0(t) = \frac{\omega^2 h^4}{\sqrt{v^2 + \omega^2 h^4}} \cdot r_{00} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (23)$$

Видно, что для сильновязких жидкостей скорость очень мала по абсолютной величине, но растет со временем и с удалением от оси вращения.

Оценим влияние действия силы Кориолиса на движение капли. Найдем отношение величины силы Кориолиса F_c к силе инерции F_i , предполагая изначально, что относительное движение близко к прямолинейному

$$\frac{F_c}{F_i} = \frac{2m\omega v(t)}{m\omega^2 r_0(t)} = \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\omega} \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}. \quad (24)$$

Для жидкостей с большой вязкостью $e^{\lambda_2 t} \ll 1$, если $t > t_0$, где t_0 – достаточно малое время. Тогда формула (24) преобразуется к виду

$$\frac{F_c}{F_i} = \frac{2\lambda_1}{\omega}. \quad (25)$$

Вычисления для движения капли глицерина толщиной $h = 0,002$ м на диске, вращающемся с угловой скоростью $\omega = 2\pi$ рад/с позволяют получить величины $\lambda_1 = 0,116$ с⁻¹, $\lambda_2 = -320,12$ с⁻¹. Тогда отношение сил равно $F_c/F_i = 0,037$, т. е. сила Кориолиса составляет менее 4 % от силы инерции, что объясняет почти прямолинейную возможность движения капли по радиусу диска для сильновязких жидкостей. С ростом угловой скорости вращения влияние силы Кориолиса увеличивается.

Выводы. В результате исследований построена приближенная модель движения фронта жидкого слоя на вращающемся диске, выведены уравнения движения капли как материальной точки с вязким трением. Предложен метод, позволяющий связать закон сопротивления капли при движении с коэффициентом кинематической вязкости жидкости. Проведено численное решение уравнений движения как задачи Коши, найдены абсолютные и относительные законы движения и траектории фронтов жидких слоев для различных жидкостей при разных угловых скоростях. Показано, что в случае ривулетного движения сильновязких жидкостей, как глицерин, при умеренных угловых скоростях относительные траектории близки к прямым линиям, а для жидкостей с небольшой вязкостью, как вода, они имеют вид хорошо развитых спиралей. Проведена оценка влияния силы Кориолиса на движение, для сильновязких жидкостей получено аналитическое решение уравнений движения, удобное для инженерных расчетов. Качественное сравнение результатов с экспериментами подтверждает возможность проведенного приближенного моделирования. Результаты работы могут быть использованы для оценки параметров ручейковых течений на вращающемся диске, использующихся для смазок горизонтальных поверхностей, нанесении покрытий вращением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Актершев, С. П. Волновое течение вертикального ривулета / С. П. Актершев, С. В. Алексеенко // Письма в ЖТФ. – 2015. – Том 41, вып. 1.

2. Yepikhin, V. Perturbed motion of a viscous fluid layer on the surface of a rotation cylinder / V. Yepikhin, P. Konon, V. Shkadov // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 1994. – № 66(6). – P. 615–621.
3. Конон, П. Н. Экспериментальное и теоретическое исследование поведения слоя жидкости на вращающемся диске / П. Н. Конон [и др.] // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». – Минск. – Вып. 31. – 2016. – С. 87–94.
4. Сисоев, Г. М. Течение пленки вязкой жидкости по поверхности вращающегося диска / Г. М. Сисоев, А. Ф. Тальдик, В. Я. Шкадов // ИФЖ. – 1986. – Т. 51, № 4. – С. 571–575.
5. Raucher, J. W. An asymptotic solution for laminar flow of a thin film on rotating disk / J. W. Raucher, R. E. Kelly, J. D. Cole // Journ. Of Appl. Mtch. – 1973. – Vol. 40, No. 1. – P. 45–51.
6. Шиляев, М. И. Асимптотический профиль свободной поверхности пленки на вращающемся диске / М. И. Шиляев, В. Э. Борзых, А. В. Толстых // Теплофизика и аэромеханика. – 1995. – Т. 2, № 4. – С. 361–366.
7. Королинская, С. И. Об изменении сферической формы капли вязкого вещества под действием переменной силы с учетом поверхностного натяжения / С. И. Королинская // МЖГ. – 1967. – № 3 – С. 56–60.
8. Конон, П. Н. Равновесные формы капли жидкости на вращающемся диске / П. Н. Конон, Е. И. Могилевский, Г. Н. Сицко, В. Я. Шкадов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. Изд-во Моск. Университета (М.). – 2020. – № 4. – С. 43–50.
9. Audzeichyk, E. V. Analytical and numerical research of the forms of equilibrium of a liquid limited volume on a rotating horizontal base / E. V. Audzeichyk, P. N. Konon, E. I. Moglevskiy // Механика машин, механизмов и материалов. – Минск. – 2020. – № 2(51). – С. 91–96.
10. Audzeichyk, Y. V. Analytical and numerical investigation of the equilibrium of a limited volume of liquid on a rotating horizontal base / Y. V. Audzeichyk, P. N. Konon // VII All-russian conference with foreign participants – Free boundary problems: theory, experiment and applications. – Krasnoyarsk. – July 1–4, 2020. – P. 38–39.
11. Шкадов, В. Я. Течения вязкой жидкости / В. Я. Шкадов, З. Д. Запрянов // Издательство: М.: Изд-во МГУ. – С. 200.
12. Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики. Часть 1. / Н. Н. Бухгольц // М.: Наука. – 1965. – С. 468.

Поступила: 01.02.2021