УДК 621.762.4

ИЗГИБ СОСТАВНЫХ БАЛОК

Дудяк А. И., Хвасько В. М.

Белорусский национальный технический университет, Минск

В балке, составленной из ряда стержней, слои которых не связаны между собой и трение между которыми отсутствует, каждый из изгибаемых стержней деформируется как отдельная независимая балка [1, 2]. Работу составных балок рассмотрим при наиболее простом случае изгиба – чистом изгибе. Под чистым изгибом понимают такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержней возникают только изгибающие моменты, а поперечные силы равны нулю (рис. 1) [1].

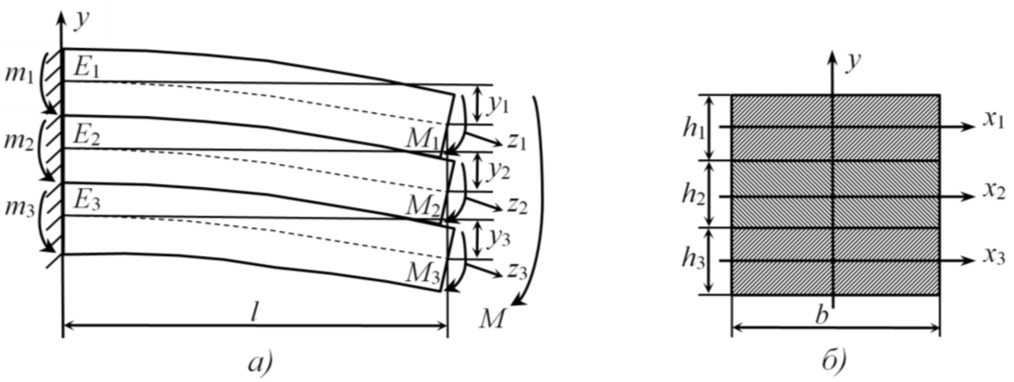

Рис. 1. Схема нагружения стержней: а) продольное сечение стержней; б) поперечные сечения стержней

В качестве примера возьмем консольную трехслойную балку прямоугольного поперечного сечения с различной высотой составных поперечных сечений стержней h_1, h_2, h_3 и изготовленных из различных материалов, которые отличаются модулями продольными упругости E_1, E_2, E_3. Под действием изгибающего момента M стержни изогнутся [2]. Очевидно, что полный изгибающий момент M можно разбить на отдельные изгибающие моменты M_1, M_2, M_3, которые подвергают деформациям отдельные части составной балки, причем:

$$M = M_1 + M_2 + M_3. \qquad (1)$$

Так как каждый стержень изгибается самостоятельно, то нейтральные слои всех трех стержней будут одной длины, также будут одинаковы их радиусы кривизны. В защемлении возникнут реактивные моменты и из условий статики следуют равенства: $m_1 = M_1$, $m_2 = M_2$, $m_3 = M_3$.

Используя метод начальных параметров [2], перемещения центров тяжести сечений y_1, y_2, y_3 на конце консоли будут описываться системой уравнений:

$$\begin{aligned}
E_1 I_{x1} y_1 &= E_1 I_{x1} y_{01} + E_1 I_{x1} \theta_{01} \cdot l - m_1 \frac{l^2}{2};\\
E_2 I_{x2} y_2 &= E_2 I_{x2} y_{02} + E_2 I_{x2} \theta_{02} \cdot l - m_2 \frac{l^2}{2};\\
E_3 I_{x3} y_3 &= E_3 I_{x3} y_{03} + E_3 I_{x3} \theta_{03} \cdot l - m_3 \frac{l^2}{2},
\end{aligned} \qquad (2)$$

где I_{x1}, I_{x2}, I_{x3} – моменты инерции сечений отдельных стержней [1].

Так как начало координат совпадает с защемлением, то начальные параметры – прогибы y_0 и углы поворотов сечений θ_0 в начале координат равны нулю. Поэтому система уравнений (2) с учетом начальных параметров примет окончательный вид:

$$E_1 I_{x1} y_1 = -m_1 \frac{l^2}{2}; \quad E_2 I_{x2} y_2 = -m_2 \frac{l^2}{2}; \quad E_3 I_{x3} y_3 = -m_3 \frac{l^2}{2}. \tag{3}$$

Из приведенной схемы изгиба составной балки (рис. 1) следует, что:

$$y_1 = y_2 = y_3. \tag{4}$$

Рассматривая совместно выражения (3) и (4), получим следующие равенства:

$$\frac{m_1}{E_1 I_{x1}} = \frac{m_2}{E_2 I_{x2}} = \frac{m_3}{E_3 I_{x3}}. \tag{5}$$

Используя соотношения (5), выразим величины изгибающих моментов m_2 и m_3 через жесткости сечений при изгибе $E_1 I_{x1}$, $E_2 I_{x2}$, $E_3 I_{x3}$ и величину изгибающего момента m_1:

$$m_2 = \frac{E_2 I_{x2}}{E_1 I_{x1}} m_1; \quad m_3 = \frac{E_3 I_{x3}}{E_1 I_{x1}} m_1. \tag{6}$$

Подставив полученные значения (6) в выражение (1), будем иметь:

$$M = M_1 + \frac{E_2 I_{x2}}{E_1 I_{x1}} M_1 + \frac{E_3 I_{x3}}{E_1 I_{x1}} M_1. \tag{7}$$

Из последнего равенства (7) получим формулу для определения величины изгибающего момента M_1, который воздействует на первый стержень:

$$M_1 = \frac{E_1 I_{x1}}{E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2} + E_3 I_{x3}} M = \frac{E_1 I_{x1}}{\left(E_0 I_{x0}\right)_C} M, \tag{8}$$

где $\left(E_0 I_{x0}\right)_C = E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2} + E_3 I_{x3}$ – суммарная жесткость пакета стержней.

Аналогично находим величины изгибающих моментов M_2 и M_3, выраженные через полный изгибающий момент M:

$$M_2 = \frac{E_2 I_{x2}}{\left(E_0 I_{x0}\right)_C} \cdot M; \quad M_3 = \frac{E_3 I_{x3}}{\left(E_0 I_{x0}\right)_C} \cdot M. \tag{9}$$

В общем виде формула для определения нормальных напряжений при чистом изгибе стержня представляет следующий вид [3]:

$$\sigma = \frac{M}{I_x} \cdot y, \tag{10}$$

где y – расстояние от точки, в которой определяют нормальное напряжение, до нейтрального слоя.

Подставив значения M_1, M_2 и M_3 из выражений (8) и (9) в формулу (10), получим выражения для определения нормальных напряжений в отдельных стержнях составной балки:

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{I_{x1}} \cdot y_1; \quad \sigma_2 = \frac{M_2}{I_{x2}} \cdot y_2; \quad \sigma_3 = \frac{M_3}{I_{x3}} \cdot y_3. \tag{11}$$

Максимальные нормальные напряжения при изгибе возникают в зонах, наиболее удаленных от нейтральной линии [3], поэтому:

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_1}{I_{x1}} \cdot y_{1\max}; \quad \sigma_{2\max} = \frac{M_2}{I_{x2}} \cdot y_{2\max}; \quad \sigma_{3\max} = \frac{M_3}{I_{x3}} \cdot y_{3\max}. \tag{12}$$

Моменты сопротивления стержней будут равны:

$$W_{x1} = \frac{I_{x1}}{y_{1\max}}; \quad W_{x2} = \frac{I_{x2}}{y_{2\max}}; \quad W_{x3} = \frac{I_{x3}}{y_{3\max}}. \tag{13}$$

С учетом выражений (13) максимальные напряжения в стержнях будут определяться из формул:

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_1}{W_{x1}}; \quad \sigma_{2\max} = \frac{M_2}{W_{x2}}; \quad \sigma_{3\max} = \frac{M_3}{W_{x3}}. \tag{14}$$

Для стержней прямоугольного поперечного сечения с шириной b и высотами h_1, h_2, h_3 имеем [1]:

$$W_{x1} = \frac{bh_1^2}{6}; \quad W_{x2} = \frac{bh_2^2}{6}; \quad W_{x3} = \frac{bh_3^2}{6}. \tag{15}$$

Таким образом, нормальные напряжения в стержнях i-ой составной балки зависят от жесткости сечения $E_i I_{xi}$. Чем больше жесткость сечения, тем больший изгибающий момент прикладывается к стержню, что легко устанавливается формулами (8) и (9).

Если балка состоит из n стержней, выполненных из различных материалов, то общую формулу для определения изгибающего момента, приходящегося на рассматриваемый стержень, следует принять в виде:

$$M_i = \frac{E_i I_{xi}}{\left(EI_x\right)_C} \cdot M. \tag{16}$$

При изготовлении всех стержней из одного и того же материала ($E_1 = E_2 = E_3 = E$), но разной высоты, величины изгибающих моментов, приходящихся на отдельные стержни балки, в соответствии с формулами (8) и (9), определяют из следующих соотношений:

$$M_1 = \frac{I_{x1}}{I_{xc}} \cdot M; \quad M_2 = \frac{I_{x2}}{I_{xc}} \cdot M; \quad M_3 = \frac{I_{x3}}{I_{xc}} \cdot M, \tag{17}$$

где $I_{xc} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$ – суммарный момент инерции пакета стержней.

Подставив значения M_1, M_2 и M_3 из выражений (17) в формулы (14), получим максимальные значения нормальных напряжений в стержнях.

Если составная балка состоит из n стержней из однородного материала, то общую формулу для определения изгибающего момента M_i, приходящегося на рассматриваемый стержень, следует определять из формулы:

$$M_i = \frac{I_{xi}}{I_{xc}} \cdot M. \tag{18}$$

Выводы. Таким образом, в соответствии с последней формулой установлено, что величина изгибающего момента, приходящегося на один стержень составной балки зависит от соотношения между моментами инерции стержня и суммарного момента инерции составной балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 511 с.
2. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев: Техника, 1967. – 790 с.
3. Татур, Г. К. Общий курс сопротивления материалов / Г. К. Татур. – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.

<u>*Поступила: 26.01.2021*</u>