УДК 539.3:519.63

К РЕШЕНИЮ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Веремейчик А. И., Хвисевич В. М.

Брестский государственный технический университет, Брест

Введение. Как правило, все материалы, используемые для создания конструктивных элементов машин и механизмов, имеют определенную неоднородность, которую можно разделить на микронеоднородность (дефекты и неправильность кристаллической решетки, молекулярная структура полимеров и т. д.) и макронеоднородность (параметры, определяющие свойства среды). С позиции инженерной практики интерес представляет исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) тел с макронеоднородностью (непрерывной неоднородностью). Неоднородность упругих свойств возникает в процессах формирования тел (процессы отливки), при различных технологических процессах (различные виды обработки тел), эксплуатации конструктивных элементов на практике (воздействие температуры, радиации и т. д.).

Для исследования НДС осесимметричных тел с непрерывной неоднородностью необходимо поставить краевую задачу теории упругости (термоупругости) и разработать эффективный метод ее реализации. Для тел со сложной геометрией области тел и граничных условий аналитическое решение такого рода задач невозможно, поэтому в настоящее время применение нашли различные численные методы, наиболее распространенным из которых является метод конечных элементов (МКЭ). Для решения поставленной задачи используем метод граничных интегральных уравнений теории потенциала, с помощью которого дифференциальные уравнения сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода, благодаря чему он имеет некоторые преимущества по сравнению с МКЭ [1, 2].

Постановка задачи. Рассмотрим в цилиндрической системе координат ρ, z, ϑ упругое, однородное, изотропное тело вращения (ось z направим по оси вращения), которое подвергается воздействию осесимметричного стационарного температурного поля $T(\rho, z)$ и поверхностных сил p_ρ, p_z, которые таковы, что перемещения, деформации и напряжения не зависят от угловой координаты. Через T обозначим температуру, отсчитываемую от некоторой начальной температуры, соответствующей естественному состоянию тела.

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях имеют вид:

$$\begin{cases} \Delta u - \dfrac{u}{\rho^2} + \dfrac{1}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial e}{\partial \rho} - \dfrac{2(1+\upsilon)}{1-2\upsilon}\alpha\dfrac{\partial T}{\partial \rho} = 0, \\ \Delta w + \dfrac{1}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial e}{\partial z} - \dfrac{2(1+\upsilon)}{1-2\upsilon}\alpha\dfrac{\partial T}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $e = \left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{u}{\rho} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)$.

Напряжения по гипотезе Дюамеля-Неймана в перемещениях:

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e - \frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\alpha T\right), \quad \sigma_{zz} = \frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e - \frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\alpha T\right), \tag{2}$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}=\frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{u}{\rho}+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e-\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\alpha T\right),\ \sigma_{\rho z}=\frac{E}{2(1+\upsilon)}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\rho}\right).$$

Формулы Коши:

$$\varepsilon_{\rho\rho}=\frac{\partial u}{\partial\rho};\qquad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z};\quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta}=\frac{u}{\rho};\qquad \gamma_{\rho z}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\rho}. \tag{3}$$

Решение осесимметричной задачи в перемещениях в общем случае сводится к определению десяти неизвестных, которые удовлетворяют уравнениям (1), (2), (3), уравнениям совместности [3], граничным условиям:

$$\begin{cases}\sigma_{\rho\rho}n_\rho+\sigma_{\rho z}n_z=p_\rho(x_s),\\ \sigma_{\rho z}n_\rho+\sigma_{zz}n_z=p_z(x_s),\end{cases} \tag{4}$$

где p_ρ, p_z – заданные механические усилия на поверхности S, а также температурного поля T, которое подчиняется уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2T}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial\rho}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}=0. \tag{5}$$

Учтем, что модуль упругости E и коэффициент линейного расширения α являются функциями температуры T, а коэффициент Пуассона $\upsilon=const$ [4]. Для данной задачи выражения (2) примут вид:

$$\sigma_{\rho\rho}=\frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e-\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\int_0^T\alpha(T)\,dT\right),$$

$$\sigma_{zz}=\frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e-\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\int_0^T\alpha(T)\,dT\right),$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}=\frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{u}{\rho}+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e-\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\int_0^T\alpha(T)\,dT\right),\quad \sigma_{\rho z}=\frac{E}{2(1+\upsilon)}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\rho}\right). \tag{6}$$

Подставим (6) в дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho}+\dfrac{\sigma_{\rho\rho}-\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\rho}+\dfrac{\sigma_{\rho z}}{\partial z}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial\rho}+\dfrac{\sigma_{\rho z}}{\rho}+\dfrac{\sigma_{zz}}{\partial z}=0,\end{cases} \tag{7}$$

тогда с учетом переменных $E(T)$ и $\alpha(T)$, получим дифференциальные уравнения равновесия осесимметричной задачи термоупругости в перемещениях:

$$\begin{cases}\Delta u-\dfrac{u}{\rho^2}+\dfrac{1}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial e}{\partial\rho}-\dfrac{2(1+\upsilon)}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\displaystyle\int_0^T\alpha(T)\,dT\right)=-\dfrac{2(1+\upsilon)}{E^2}\dfrac{dE}{dT}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\rho}\sigma_{\rho\rho}+\dfrac{\partial T}{\partial z}\sigma_{\rho z}\right),\\[2ex] \Delta w+\dfrac{1}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial e}{\partial z}-\dfrac{2(1+\upsilon)}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\displaystyle\int_0^T\alpha(T)\,dT\right)=-\dfrac{2(1+\upsilon)}{E^2}\dfrac{dE}{dT}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\rho}\sigma_{\rho z}+\dfrac{\partial T}{\partial z}\sigma_{zz}\right).\end{cases} \tag{8}$$

Приведение осесимметричной краевой задачи термоупругости неоднородных тел к последовательности краевых задач однородной термоупругости. Одним из наиболее эффективных методов решения краевых задач теории упругости и термоупругости неоднородных тел является метод возмущений, предложенный и разработанный В. А. Ломакиным [5], позволяющий свести краевую задачу термоупругости неоднородных тел к последовательности краевых задач однородной термоупругости и теории упругости однородных тел с фиктивными нагрузками.

Применим метод возмущений к осесимметричной краевой задаче (6), (7), (8). Ее решение будем разыскивать в виде степенных рядов

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^k u^k\left(\rho,z\right),\qquad w=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^k w^k\left(\rho,z\right). \tag{9}$$

Подставляя (9) в соотношения (6), (7), (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях φ, получим краевую задачу для u^0, w^0:

$$\begin{cases}\Delta u^0-\dfrac{u^0}{\rho^2}+\dfrac{1}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial e^0}{\partial\rho}=\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\int\limits_0^T\alpha\left(T\right)dT\right),\\ \Delta w^0+\dfrac{1}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial e^0}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\int\limits_0^T\alpha\left(T\right)dT\right),\end{cases} \tag{10}$$

граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma^0_{\rho\rho}n_\rho+\sigma^0_{\rho z}n_z&=p_\rho\left(x_s\right),\\ \sigma^0_{\rho z}n_\rho+\sigma^0_{zz}n_z&=p_z\left(x_s\right),\end{aligned} \tag{11}$$

и выражения для напряжений:

$$\sigma^0_{\rho\rho}=\frac{E\left(T\right)}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial u^0}{\partial\rho}+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e^0-\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\int\limits_0^T\alpha\left(T\right)dT\right),$$

$$\sigma^0_{zz}=\frac{E\left(T\right)}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial w^0}{\partial z}+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e^0-\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\int\limits_0^T\alpha\left(T\right)dT\right),$$

$$\sigma^0_{\vartheta\vartheta}=\frac{E\left(T\right)}{1+\upsilon}\left(\frac{u^0}{\rho}+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e^0-\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\int\limits_0^T\alpha\left(T\right)dT\right),\quad \sigma^0_{\rho z}=\frac{E\left(T\right)}{2\left(1+\upsilon\right)}\left(\frac{\partial u^0}{\partial z}+\frac{\partial w^0}{\partial\rho}\right). \tag{12}$$

Для функций $u^1\left(\rho,z\right)$, $w^1\left(\rho,z\right)$ уравнения (10)–(12) примут вид:

$$\begin{cases}\Delta u^1-\dfrac{u^1}{\rho^2}+\dfrac{1}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial e^1}{\partial\rho}=-\dfrac{2\left(1+\upsilon\right)}{E^2}\dfrac{dE}{dT}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\rho}\sigma^0_{\rho\rho}+\dfrac{\partial T}{\partial z}\sigma^0_{\rho z}\right),\\ \Delta w^1+\dfrac{1}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial e^1}{\partial z}=-\dfrac{2\left(1+\upsilon\right)}{E^2}\dfrac{dE}{dT}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\rho}\sigma^0_{\rho z}+\dfrac{\partial T}{\partial z}\sigma^0_{zz}\right),\end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\sigma^1_{\rho\rho}n_\rho+\sigma^1_{\rho z}n_z&=0,\\ \sigma^1_{\rho z}n_\rho+\sigma^1_{zz}n_z&=0,\end{aligned} \tag{14}$$

$$\sigma^1_{\rho\rho}=\frac{E\left(T\right)}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial u^1}{\partial\rho}+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e^1\right),\quad \sigma^1_{zz}=\frac{E\left(T\right)}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial w^1}{\partial z}+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e^1\right), \tag{15}$$

$$\sigma^1_{\vartheta\vartheta}=\frac{E\left(T\right)}{1+\upsilon}\left(\frac{u^1}{\rho}+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e^1\right),\quad \sigma^1_{\rho z}=\frac{E\left(T\right)}{2\left(1+\upsilon\right)}\left(\frac{\partial u^1}{\partial z}+\frac{\partial w^1}{\partial\rho}\right),$$

где $e^1=\left(\dfrac{\partial u^1}{\partial\rho}+\dfrac{u^1}{\rho}+\dfrac{\partial w^1}{\partial z}\right)$.

Краевые задачи для функций u^k, w^k строятся аналогично:

$$\begin{cases}\Delta u^k-\dfrac{u^k}{\rho^2}+\dfrac{1}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial e^k}{\partial\rho}=-\dfrac{2\left(1+\upsilon\right)}{E^2}\dfrac{dE}{dT}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\rho}\sigma^{k-1}_{\rho\rho}+\dfrac{\partial T}{\partial z}\sigma^{k-1}_{\rho z}\right),\\ \Delta w^k+\dfrac{1}{1-2\upsilon}\dfrac{\partial e^k}{\partial z}=-\dfrac{2\left(1+\upsilon\right)}{E^2}\dfrac{dE}{dT}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\rho}\sigma^{k-1}_{\rho z}+\dfrac{\partial T}{\partial z}\sigma^{k-1}_{zz}\right),\end{cases} \tag{16}$$

$$\sigma_{\rho\rho}^k n_\rho + \sigma_{\rho z}^k n_z = 0,$$
$$\sigma_{\rho z}^k n_\rho + \sigma_{zz}^k n_z = 0, \tag{17}$$

$$\sigma_{\rho\rho}^k = \frac{E(T)}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial u^k}{\partial \rho} + \frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e^k\right), \quad \sigma_{zz}^k = \frac{E(T)}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial w^k}{\partial z} + \frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e^k\right), \tag{18}$$
$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^k = \frac{E(T)}{1+\upsilon}\left(\frac{u^k}{\rho} + \frac{\upsilon}{1-2\upsilon}e^k\right), \quad \sigma_{\rho z}^k = \frac{E(T)}{2(1+\upsilon)}\left(\frac{\partial u^k}{\partial z} + \frac{\partial w^k}{\partial \rho}\right),$$

где $e^k = \left(\frac{\partial u^k}{\partial \rho} + \frac{u^k}{\rho} + \frac{\partial w^k}{\partial z}\right)$, $(k = 2,\ 3,\ \ldots)$.

Таким образом, в нулевом приближении задача (5)–(7) сводится к решению осесимметричной задачи классической термоупругости (10)–(12), а в последующих приближениях – к последовательности осесимметричных задач теории упругости однородного тела с фиктивными объемными силами (13)–(18).

Построение сингулярных интегральных уравнений осесимметричной краевой задачи термоупругости при коэффициенте $\alpha = \alpha(T)$. Рассмотрим краевую задачу термоупругости (10)–(12). В правой части дифференциальных уравнений (10) присутствует объемная сила, которая обусловлена зависимостью температурного коэффициента линейного расширения α от температуры T. Решение дифференциальных уравнений (10) ищем в форме:

$$u^{(0)} = u^U + u^T, \qquad w^{(0)} = w^U + w^T. \tag{19}$$

Общее решение u^U, w^U однородных дифференциальных уравнений, представляющее перемещения от силовых воздействий, имеет вид [6]:

$$u^U(x) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\upsilon)}\int_L \left[\upsilon_\rho(y)C_{\rho\rho} + \upsilon_z(y)C_{\rho z}\right]dl_y,$$
$$w^U(x) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\upsilon)}\int_L \left[\upsilon_\rho(y)C_{z\rho} + \upsilon_z(y)C_{zz}\right]dl_y, \tag{20}$$

$$C_{\rho\rho} = \frac{1}{kn\sqrt{2-n^2}}\left\{\left[k^2 - 3n^2 - 4n^2(3-4\upsilon) + \frac{k^2-n^2}{1-k^2} - \frac{k^2n^2(k^2-n^2)}{(2-n^2)(1-k^2)}\right]E + \right.$$
$$\left. + \left[2n^2(2-k^2)(3-4\upsilon) + (4n^2 - n^2k^2 - 2k^2) - \frac{k^2n^4}{2-n^2}\right]K\right\},$$

$$C_{\rho z} = \frac{Zk}{\rho_x n\sqrt{2-n^2}}\left(\frac{k^2-n^2}{1-k^2}E + n^2K\right),$$
$$C_{z\rho} = \frac{Zk}{\rho_x n\sqrt{2-n^2}}\left[\frac{k^2-(2-n^2)}{1-k^2}E + (2-n^2)K\right], \tag{21}$$
$$C_{zz} = \frac{kn}{\sqrt{2-n^2}}\left\{\frac{Z^2k^2(2-n^2)}{2\rho_x^2 n^2(1-k^2)}E + \left[2 + 4(1-2\upsilon)\right]K\right\},$$

где μ – модуль сдвига; L – длина контура меридионального сечения тела; $k^2 = \frac{4\rho_y\rho_x}{(\rho_y+\rho_x)^2 + Z^2}$, $n^2 = \frac{2\rho_y}{\rho_y+\rho_x}$, внутренние интегралы в (20) являются полными эллиптическими интегралами первого K и второго E рода [7].

Частное решение (10) представим в виде [8] как градиент некоторой функции W:

$$u^T=\frac{\partial W}{\partial \rho_x},\ w^T=\frac{\partial W}{\partial z_x}. \qquad (22)$$

Подставив (22) в (10), получаем соотношение, при котором система (10) обращается в тождество:

$$\Delta W=\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\int_0^T \alpha\left(T\right)dT. \qquad (23)$$

Принимаем для $\alpha\left(T\right)$ зависимость [4]:

$$\alpha=\alpha_0\left(1+\gamma T\right), \qquad (24)$$

где α_0 – значение коэффициента теплового расширения для исходного состояния, γ – постоянная величина, определяемая из экспериментов. Тогда:

$$\Delta W=\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\alpha_0\left(T+\gamma\frac{T^2}{2}\right)=abT-acT^*, \qquad (25)$$

где $a=\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\alpha_0$, $b=1+\frac{\gamma}{k}$, $c=\frac{\gamma}{k\lambda_0}$. Выражая температуру T через гармоническую функцию $T^*=\int_0^T \lambda\left(T\right)dT$ согласно [7], получаем:

$$T=\frac{1}{k}\left(1-\sqrt{1-\frac{2k}{\lambda_0}T^*}\right), \qquad (26)$$

при этом

$$\lambda\left(T\right)=\lambda_0\left(1-kT\right), \qquad (27)$$

где k – определяется с помощью экспериментальных кривых, λ_0 – коэффициент теплопроводности при исходной температуре.

Тогда:

$$W=-\frac{ab}{4\pi}\int_V T\left(y\right)\frac{1}{r}dV_y+\frac{ac}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\iint_{S_i+S_e}\chi\left(y\right)\frac{dr}{dn_y}-\sum_{i=1}^{n}A_i r_{A_i}\right], \qquad (28)$$

или:

$$W=W^{(N)}+W^{(G)},\ W^{(N)}=-\frac{ab}{4\pi}\int_V T\left(y\right)\frac{1}{r}dV_y,\ W^{(G)}=W^{(K)}+W^{(M)}, \qquad (29)$$

где $a=\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\alpha_0$, $b=1+\frac{\gamma}{k}$, $c=\frac{\gamma}{k\lambda_0}$, $r_{A_i}=\sqrt{\rho_x^2+\rho_{A_i}^2-2\rho_x\rho_{A_i}\cos\Theta+Z^2}$ – расстояние между фиктивным источником теплоты мощностью A_k, помещенном в область, ограниченную поверхностью S_i, и точкой x с поверхности S_x.

Интерес представляют добавки перемещений $\overset{(N)}{u}{}^T$, $\overset{(N)}{w}{}^T$ и напряжений $\overset{(N)}{\sigma}_{\rho\rho},\ldots,\overset{(N)}{\sigma}_{\rho z}$, которые выражаются через бигармоническую функцию $\overset{(G)}{W}$ в (29), через которую определяется частное решение дифференциальных уравнений. С ее помощью получим формулы температурных добавок перемещений и напряжений:

$$u^T=\frac{\partial W^{(G)}}{\partial \rho_x}=\overset{(K)}{u}{}^T+\overset{(M)}{u}{}^T=\overset{(K)}{u}{}^T+\frac{a}{8\pi\mu}\sum_{i=1}^{n}A_i\frac{2}{R_{A_i}}\rho_{A_i}\left\{\left[2\left(\rho_{A_i}+\rho_x\right)-\frac{R_{A_i}^2}{\rho_x}\right]K+\frac{R_{A_i}^2}{\rho_x}E\right\}, \qquad (30)$$

$$w^T = \frac{\partial W^{(G)}}{\partial z_x} = \overset{(K)}{w}{}^T + \overset{(M)}{w}{}^T = \overset{(K)}{w}{}^T + \frac{a}{8\pi\mu}\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{R_{A_i}}\rho_{A_i} Z,$$

$$\sigma^T_{\rho\rho} = \overset{(K)}{\sigma}{}^T_{\rho\rho} + \overset{(M)}{\sigma}{}^T_{\rho\rho}, \quad \sigma^T_{\vartheta\vartheta} = \overset{(K)}{\sigma}{}^T_{\vartheta\vartheta} + \overset{(M)}{\sigma}{}^T_{\vartheta\vartheta}, \quad \sigma^T_{zz} = \overset{(K)}{\sigma}{}^T_{zz} + \overset{(M)}{\sigma}{}^T_{zz}, \quad \sigma^T_{\rho z} = \overset{(K)}{\sigma}{}^T_{\rho z} + \overset{(M)}{\sigma}{}^T_{\rho z},$$

$$\overset{(M)}{\sigma}{}^T_{\rho\rho}(x) = -\mu a \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{2}{R_{A_i}}\left\{\rho_{A_i}\left[\frac{2(\rho_{A_i}-\rho_x)^2}{R_{1A_i}^2} + \frac{R_{A_i}^2}{\rho_x^2} - 2\right]E + \rho_{A_i}\left(4 + \frac{2\rho_{A_i}}{\rho_x} - \frac{R_{A_i}^2}{\rho_x^2}\right)K\right\},$$

$$\overset{(M)}{\sigma}{}^T_{zz}(x) = -\mu a \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{4}{R_{A_i}}\left(\frac{\rho_{A_i} Z^2}{R_{1A_i}^2}E + \rho_{A_i} K\right), \tag{31}$$

$$\overset{(M)}{\sigma}{}^T_{\vartheta\vartheta}(x) = -\mu a \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{2}{R_{A_i}}\left[\frac{\rho_{A_i} R_{A_i}^2}{\rho_x^2}E + \left(\frac{\rho_{A_i} R_{A_i}^2}{\rho_x^2} - \frac{2\rho_{A_i}^2}{\rho_x} + 2\rho_{A_i}\right)K\right],$$

$$\overset{(M)}{\sigma}{}^T_{\rho z}(x) = -\mu a \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{2}{R_{A_i}}\left\{\frac{\rho_{A_i}^2 Z}{\rho_x}\left[\frac{1}{\rho_x} - \frac{2(\rho_{A_i}-\rho_x)}{R_{1A_i}^2}\right]E + \frac{\rho_{A_i}}{\rho_x} ZK\right\},$$

где $R_{A_i} = \sqrt{(\rho_{A_i}+\rho_x)^2 + Z^2}$, $Z = z_{A_i} - z_x$, $\overset{(K)}{u}{}^T$, $\overset{(K)}{w}{}^T$ – соответствуют частному решению дифференциальных уравнений термоупругости при классическом способе представления температуры.

Определяем частные производные от $1/r$:

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial\rho_x} = \frac{\rho_y\cos\Theta - \rho_x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2(1/r)}{\partial\rho_x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\rho_y\cos\Theta-\rho_x)}{r^4}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial(1/r)}{\partial z_x} = \frac{Z}{r^3}, \quad \frac{\partial^2(1/r)}{\partial z_x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3Z^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2(1/r)}{\partial\rho_x\partial z_x} = \frac{3Z(\rho_y\cos\Theta-\rho_x)}{r^5}.$$

Подставим (29) в (23), учитывая (32) и что $dV_y = \rho_y d\Theta dF_y$, где F_y – площадь меридионального сечения области V^+, получим температурные добавки перемещений:

$$\overset{(N)}{u}{}^T = \frac{ab}{4\pi}\int_F T(y)\rho_y dF_y \int_0^{2\pi}\frac{(\rho_x - \rho_y\cos\Theta)}{r^3}d\Theta, \quad \overset{(N)}{w}{}^T = -\frac{ab}{4\pi}\int_F T(y)\rho_y dF_y \int_0^{2\pi}\frac{Z}{r^3}d\Theta. \tag{33}$$

После преобразования, используя таблицу интегралов [6], получим:

$$\overset{(N)}{u}{}^T = -\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y)\frac{1}{R}\left\{\left[\frac{\rho_y(\rho_y - 2\rho_x)}{R_1^2} + \frac{\rho_y}{\rho_x}\right]E + \frac{\rho_y}{\rho_x}K\right\}dF_y,$$

$$\overset{(N)}{w}{}^T = -\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y)\frac{1}{R}\frac{\rho_y Z}{R_1^2}E dF_y. \tag{34}$$

Температурные добавки напряжений представляем в виде суммы:

$$\sigma^T_{\rho\rho} = \overset{(N)}{\sigma}{}^T_{\rho\rho} + \overset{(G)}{\sigma}{}^T_{\rho\rho}, \quad \sigma^T_{\vartheta\vartheta} = \overset{(N)}{\sigma}{}^T_{\vartheta\vartheta} + \overset{(G)}{\sigma}{}^T_{\vartheta\vartheta}, \quad \sigma^T_{zz} = \overset{(N)}{\sigma}{}^T_{zz} + \overset{(G)}{\sigma}{}^T_{zz}, \quad \sigma^T_{\rho z} = \overset{(N)}{\sigma}{}^T_{\rho z} + \overset{(G)}{\sigma}{}^T_{\rho z}. \tag{35}$$

Как и для добавок перемещений, интерес представляет построение формул для

$\overset{(N)}{\sigma}{}^{T}_{\rho\rho},...,\overset{(N)}{\sigma}{}^{T}_{\rho z}$, т.к. для $\overset{(G)}{\sigma}{}^{T}_{\rho\rho},...,\overset{(G)}{\sigma}{}^{T}_{\rho z}$ справедливы выражения [6], умноженные на $c=\dfrac{\gamma}{k\lambda_0}$ с учетом переменного $\mu(T)$.

Подставим (29) в формулы для температурных добавок напряжений [8]:

$$\sigma^T_{ij}=\frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}-\Delta W\delta_{ij}\right), \tag{36}$$

в результате получим:

$$\begin{gathered}\sigma^T_{\rho\rho}=2\mu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\rho_x^2}-\Delta W\right),\ \sigma^T_{zz}=2\mu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z_x^2}-\Delta W\right),\\ \sigma^T_{\vartheta\vartheta}=2\mu\left(\frac{1}{\rho_x}\frac{\partial W}{\partial\rho_x}-\Delta W\right),\ \sigma^T_{\rho z}=2\mu\frac{\partial^2 W}{\partial\rho_x\partial z_x}.\end{gathered} \tag{37}$$

Тогда с учетом (32), после интегрирования по ϑ и преобразований получим формулы добавок напряжений внутри области V^+:

$$\begin{gathered}\overset{(N)}{\sigma}{}^{T}_{\rho\rho}(x)=-\frac{a_1E(T)}{4\pi}\left(4\pi T(x)+\int_F T(y)\frac{2}{\rho_x R}\left(\left\{\frac{4\rho_y\rho_x}{R^2}\left[\frac{(\rho_y-\rho_x)^2}{R_1^2}-1\right]+\right.\right.\right.\\ \left.\left.\left.+4\rho_y\rho_x\frac{(\rho_y-\rho_x)^2}{R_1^4}-\frac{2\rho_y^2}{R_1^2}-\frac{\rho_y}{\rho_x}\right\}E+\left\{\frac{\rho_y}{\rho_x}+\frac{2\rho_y\rho_x}{R^2}\left[1-\frac{(\rho_y-\rho_x)^2}{R_1^2}\right]\right\}K\right)dF_y\right),\\ \overset{(N)}{\sigma}{}^{T}_{zz}(x)=-\frac{a_1E(T)}{4\pi}\left(4\pi T(x)+\int_F T(y)\frac{1}{R}\left(\left\{\frac{4\rho_y}{R_1^2}\left[\frac{Z^2}{R_1^2}-\frac{(\rho_y-\rho_x)^2}{R_1^2}+\frac{2Z^2}{R^2}\right]\right\}E-\right.\right.\\ \left.\left.-\frac{4\rho_y}{R^2}\frac{Z^2}{R_1^2}K\right)dF_y\right),\\ \overset{(N)}{\sigma}{}^{T}_{\vartheta\vartheta}(x)=-\frac{a_1E(T)}{4\pi}\left(4\pi T(x)+\int_F T(y)\frac{2}{\rho_x R}\left\{\left[\frac{2\rho_y(\rho_y-\rho_x)}{R_1^2}+\frac{\rho_y}{\rho_x}\right]E-\frac{\rho_y}{\rho_x}K\right\}dF_y\right),\\ \overset{(N)}{\sigma}{}^{T}_{\rho z}(x)=-\frac{a_1E(T)}{4\pi}\left\{\left[\frac{\rho_y Z}{R^2}+\frac{4\rho_y Z}{R_1^2}\left(\frac{\rho_y-\rho_x}{R_1^2}\rho_x-\frac{\rho_x^2}{R^2}\right)\right]E+\frac{1}{2}\left[\frac{Z\rho_y}{R_1^2}\left(\frac{\rho_x^2}{R^2}-1\right)-\right.\right.\\ \left.\left.-\frac{\rho_y Z}{R^2}\right]K\right\}dF_y,\end{gathered} \tag{38}$$

где $R^2=\sqrt{(\rho_y+\rho_x)^2+Z^2}$, $R_1^2=\sqrt{(\rho_y-\rho_x)^2+Z^2}$, $a_1=\dfrac{b\alpha_0}{1-\upsilon}$.

Если точка x совпадает с точкой y, то с учетом предельных значений в формулах напряжений $\overset{(N)}{\sigma}{}^{T}_{\rho\rho}$, $\overset{(N)}{\sigma}{}^{T}_{zz}$, $\overset{(N)}{\sigma}{}^{T}_{\vartheta\vartheta}$ вместо $4\pi T(x)$ принимается $\dfrac{8}{3}\pi T(x)$.

Температурные добавки напряжений в граничных точках области V^+:

$$\overset{(N)}{\sigma^T}_{\rho\rho}\left(x_S\right)=-\frac{a_1E(T)}{4\pi}\left(4\pi T\left(x_S\right)\left(1-\frac{n_{\rho_x}^2}{2}\right)+\int_F T(y)\frac{2}{\rho_x R}\left(\left\{\frac{4\rho_y\rho_x}{R^2}\left[\frac{\left(\rho_y-\rho_x\right)^2}{R_1^2}-1\right]+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+4\rho_y\rho_x\frac{\left(\rho_y-\rho_x\right)^2}{R_1^4}-\frac{2\rho_y^2}{R_1^2}-\frac{\rho_y}{\rho_x}\right\}E+\left\{\frac{\rho_y}{\rho_x}+\frac{2\rho_y\rho_x}{R^2}\left[1-\frac{\left(\rho_y-\rho_x\right)^2}{R_1^2}\right]\right\}K\right)dF_y\right),$$

$$\overset{(N)}{\sigma^T}_{zz}\left(x_S\right)=-\frac{a_1E(T)}{4\pi}\left(4\pi T\left(x_S\right)\left(1-\frac{n_{z_x}^2}{2}\right)+\int_F T(y)\frac{1}{R}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left\{\frac{4\rho_y}{R_1^2}\left[\frac{Z^2}{R_1^2}-\frac{\left(\rho_y-\rho_x\right)^2}{R_1^2}+\frac{2Z^2}{R^2}\right]\right\}E-\frac{4\rho_y}{R^2}\frac{Z^2}{R_1^2}K\right)dF_y\right), \qquad (39)$$

$$\overset{(N)}{\sigma^T}_{\vartheta\vartheta}\left(x_S\right)=-\frac{a_1E(T)}{4\pi}\left(4\pi T\left(x_S\right)+\int_F T(y)\frac{2}{\rho_x R}\left\{\left[\frac{2\rho_y\left(\rho_y-\rho_x\right)}{R_1^2}+\frac{\rho_y}{\rho_x}\right]E-\frac{\rho_y}{\rho_x}K\right\}dF_y\right),$$

$$\overset{(N)}{\sigma^T}_{\rho z}\left(x_S\right)=-\frac{a_1E(T)}{4\pi}\left(2\pi T\left(x_S\right)n_{\rho_x}n_{z_x}-\int_F T(y)\frac{2}{\rho_x R}\left\{\left[\frac{\rho_y Z}{R^2}+\frac{4\rho_y Z}{R_1^2}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\frac{\rho_y-\rho_x}{R_1^2}\rho_x-\frac{\rho_x^2}{R^2}\right)\right]E+\frac{1}{2}\left[\frac{Z\rho_y}{R_1^2}\left(\frac{\rho_x^2}{R^2}-1\right)-\frac{\rho_y Z}{R^2}\right]K\right\}dF_y\right).$$

Полные перемещения определяем как сумму:

$$u^{(0)}=u^U+\overset{(G)}{u}{}^T+\overset{(N)}{u}{}^T=u^U+\frac{(1+\upsilon)^2\alpha_0}{2\pi(1-\upsilon)E(T)}\left(c\left(\int_L\chi(y)\frac{1}{R}\left(\left\{\frac{\rho_y}{\rho_x}\left(\rho_y n_{\rho_y}+Zn_{z_y}\right)-\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\rho_y-\rho_x\right)}{R_1^2}2\rho_y\left[\left(\rho_y-\rho_x\right)n_{\rho_y}+Zn_{z_y}\right]+\rho_x n_{\rho_y}\right\}E-\left[\frac{\rho_y}{\rho_x}\left(\rho_y n_{\rho_y}+Zn_{z_y}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\rho_x n_{\rho_y}\right]K\right)dl_y-\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{1}{R_{A_k}}\rho_{A_k}\left\{\left[2\left(\rho_{A_k}+\rho_x\right)-\frac{R_{A_k}^2}{\rho_x}\right]K+\frac{R_{A_k}^2}{\rho_x}E\right\}\right)-$$

$$\left.-b\int_F T(y)\frac{1}{R}\left\{\left[\frac{\rho_y\left(\rho_y-2\rho_x\right)}{R_1^2}+\frac{\rho_y}{\rho_x}\right]E+\frac{\rho_y}{\rho_x}K\right\}dF_y\right),$$

$$w^{(0)}=w^U+\overset{(G)}{w}{}^T+\overset{(N)}{w}{}^T=w^U+\frac{(1+\upsilon)^2\alpha_0}{2\pi(1-\upsilon)E(T)}\left(c\left(\int_L\chi(y)\frac{1}{R}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\left\{\left[2\rho_y\frac{\left(\rho_y-\rho_x\right)}{R_1^2}-1\right]Zn_{\rho_y}+2\rho_y\frac{Z^2}{R_1^2}n_{z_y}\right\}E+\left(Zn_{\rho_y}-2\rho_y n_{z_y}\right)K\right)dl_y-\right. \qquad (40)$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{2}{R_{A_k}}\rho_{A_k}Z\left(-2b\int_F T(y)\frac{1}{R}\frac{\rho_y Z}{R_1^2}EdF_y\right)\right).$$

Полные напряжения, как и перемещения, в общем виде определяются по формулам:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^{(0)}(x) &= \sigma_{\rho\rho}^{U}(x) + \sigma_{\rho\rho}^{T}(x) = \sigma_{\rho\rho}^{U}(x) + \overset{(G)}{\sigma}{}_{\rho\rho}^{T}(x) + \overset{(N)}{\sigma}{}_{\rho\rho}^{T}(x),\\
\sigma_{zz}^{(0)}(x) &= \sigma_{zz}^{U}(x) + \sigma_{zz}^{T}(x) = \sigma_{zz}^{U}(x) + \overset{(G)}{\sigma}{}_{zz}^{T}(x) + \overset{(N)}{\sigma}{}_{zz}^{T}(x),\\
\sigma_{\vartheta\vartheta}^{(0)}(x) &= \sigma_{\vartheta\vartheta}^{U}(x) + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{T}(x) = \sigma_{\vartheta\vartheta}^{U}(x) + \overset{(G)}{\sigma}{}_{\vartheta\vartheta}^{T}(x) + \overset{(N)}{\sigma}{}_{\vartheta\vartheta}^{T}(x),\\
\sigma_{\rho z}^{(0)}(x) &= \sigma_{\rho z}^{U}(x) + \sigma_{\rho z}^{T}(x) = \sigma_{\rho z}^{U}(x) + \overset{(G)}{\sigma}{}_{\rho z}^{T}(x) + \overset{(N)}{\sigma}{}_{\rho z}^{T}(x).
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Здесь напряжения $\sigma_{\rho\rho}^{U}(x),...,\sigma_{\rho z}^{U}(x)$ соответствуют перемещениям u^U, w^U и для их определения используются формулы, приведенные в [6].

Напряжения в граничных точках области определяем аналогично (41), учитывая формулы скачков:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^{(0)}(x_S) &= \sigma_{\rho\rho}^{U}(x_S) + \sigma_{\rho\rho}^{T}(x_S) = \sigma_{\rho\rho}^{U}(x_S) + \overset{(G)}{\sigma}{}_{\rho\rho}^{T}(x_S) + \overset{(N)}{\sigma}{}_{\rho\rho}^{T}(x_S),\\
\sigma_{\rho z}^{(0)}(x_S) &= \sigma_{\rho z}^{U}(x_S) + \sigma_{\rho z}^{T}(x_S) = \sigma_{\rho z}^{U}(x_S) + \overset{(G)}{\sigma}{}_{\rho z}^{T}(x_S) + \overset{(N)}{\sigma}{}_{\rho z}^{T}(x_S),
\end{aligned}
\tag{42}
$$

где $\sigma_{\rho\rho}^{U}(x_S),...,\sigma_{\rho z}^{U}(x_S)$ соответствуют [6]:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}(x_S) &= \frac{1}{1-\upsilon}\left[\upsilon_\rho(x_S)\left(2-\upsilon-n_{\rho_x}^2\right)n_{\rho_x} + \upsilon_z(x_S)\left(\upsilon-n_{\rho_x}^2\right)n_{z_x}\right] + V.p.\sigma_{\rho\rho},\\
\sigma_{zz}(x_S) &= \frac{1}{1-\upsilon}\left[\upsilon_\rho(x_S)\left(\upsilon-n_{z_x}^2\right)n_{\rho_x} + \upsilon_z(x_S)\left(2-\upsilon-n_{z_x}^2\right)n_{z_x}\right] + V.p.\sigma_{zz},\\
\sigma_{\vartheta\vartheta}(x_S) &= \frac{\upsilon}{1-\upsilon}\left[\upsilon_\rho(x_S)n_{\rho_x} + \upsilon_z(x_S)n_{z_x}\right] + V.p.\sigma_{\vartheta\vartheta},\\
\sigma_{\rho z}(x_S) &= \frac{1}{1-\upsilon}\left[\upsilon_\rho(x_S)\left(1-\upsilon-n_{\rho_x}^2\right)n_{z_x} + \upsilon_z(x_S)\left(1-\upsilon-n_{z_x}^2\right)n_{\rho_x}\right] + V.p.\sigma_{\rho z},
\end{aligned}
\tag{43}
$$

где $V.p.$ – означает главное значение сингулярного интеграла по Коши, а $\overset{(G)}{\sigma}{}_{\rho\rho}^{T}(x_S)$,...., $\overset{(G)}{\sigma}{}_{\rho z}^{T}(x_S)$ определяем по формулам [6], умножая соответствующие выражения на c и учитывая зависимость $E(T)$.

Компоненты температурной поверхностной нагрузки выражаются так:

$$
\begin{aligned}
p_\rho^T(x_S) &= -\left(\sigma_{\rho\rho}^T(x_S)n_{\rho_x} + \sigma_{\rho z}^T(x_S)n_{z_x}\right),,\\
p_z^T(x_S) &= -\left(\sigma_{\rho z}^T(x_S)n_{\rho_x} + \sigma_{zz}^T(x_S)n_{z_x}\right).
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Если ввести интегральный оператор интегральных уравнений осесимметричной задачи теории упругости:

$$
\begin{aligned}
I_\rho\left(\upsilon_\rho,\upsilon_z\right) &= \sigma_{\rho\rho}^U(x_S)n_{\rho_x} + \sigma_{\rho z}^U(x_S)n_{z_x},\\
I_z\left(\upsilon_\rho,\upsilon_z\right) &= \sigma_{\rho z}^u(x_S)n_{\rho_x} + \sigma_{zz}^u(x_S)n_{z_x},
\end{aligned}
\tag{45}
$$

то с учетом (44) получим систему сингулярных интегральных уравнений рассматриваемой задачи:

$$
\begin{aligned}
I_\rho\left(\upsilon_\rho,\upsilon_z\right) &= p_\rho(x_S) + p_\rho^T(x_S),\\
I_z\left(\upsilon_\rho,\upsilon_z\right) &= p_z(x_S) + p_z^T(x_S),
\end{aligned}
\tag{46}
$$

где $\rho_\rho(x_S)$, $\rho_z(x_S)$ – заданные механические нагрузки, I_ρ, I_z – операторы, которые в развернутом виде аналогичны левой части [6, 7].

Уравнения (46) содержат фиктивные нагрузки $p_\rho^T\left(x_S\right)$, $p_z^T\left(x_S\right)$, обусловленные неоднородностью механических свойств материала.

Выводы. Система (45) и уравнения (40) – (42) позволяет найти решение краевой осесимметричной задачи термоупругости при переменном $\alpha\left(T\right)$. Напряжения (41), (42) используются как плотность массовых сил в последующих приближениях решения задачи термоупругости неоднородного тела.

Рассмотренная методика может быть применена и для решения внешних задач. В этом случае при определении добавок напряжений (38), (39) учитывается внешний предел при определении неинтегральных слагаемых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М. : Мир, 1987. – 524 с.

2. Steinbach, O. Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems / O. Steinbach. – New York: Springer Science, 2008. – 386 p.

3. Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности: учебник для вузов / А. Г. Горшков. – М. : Физматлит, 2002. – 416 с.

4. Хвисевич, В. М. Численное решение двухмерных краевых задач термоупругости неоднородных тел / В. М. Хвисевич, А. И. Веремейчик // Перспективные материалы и технологии: монография: в 2 т. ; под. ред. чл.-корр. Рубаника В. В. – Витебск: УО «ВГТУ», 2019.– Т. 2. – Гл. 7. – С. 87–104.

5. Ломакин, В. А. Теория упругости неоднородных тел / В. А. Ломакин. – М. : Ленанд, 2014. – 367 с.

6. Копейкин, Ю. Д. Применение бигармонических потенциалов в краевых задачах статики упругого тела / Ю. Д. Копейкин // Диссертация доктора физ.-мат. наук. – М., 1969. – 280 с.

7. Кузьмич, Л. С. Эллиптические функции. Эллиптические интегралы: Алгоритм точного решения / Л. С. Кузьмич. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 48. с

8. Веремейчик, А. И. К решению плоских краевых задач термоупругости неоднородных тел методом потенциала / А. И. Веремейчик, В. В. Гарбачевский, В. М. Хвисевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – Вып. 30. – С. 184–189.

9. Хвисевич, В. М. О некоторых особенностях механико-математического моделирования плоских краевых задач неоднородной термоупругости / В. М. Хвисевич, А. И. Веремейчик // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – Вып. 35. – С. 114–123.

Поступила: 02.02.2021