УДК 621.835-41:514.764

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДЕТАЛЕЙ ШАГАЮЩИХ МАШИН С ПРИМЕНЕНИЕМ ПЕРСПЕКТИВНЫХ МЕТОДОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Скойбеда А. Т., Жуковец В. Н.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Ходовые системы современных мобильных машин работают, как правило, при высоком уровне динамических нагрузок. Поэтому, для обеспечения безотказной работы машин различного назначения, требуется решение, наряду с другими, проблемы обеспечения контактной прочности. Кроме выбора материалов, внимание при этом нужно уделять геометрическим параметрам соприкасающихся деталей и узлов, в частности, кривизне профилей контактирующих криволинейных цилиндрических поверхностей. Следует также учитывать, что от кривизны поверхности определенной детали зависят кинематические и динамические характеристики ходовой системы в целом.

При конструировании деталей машин, совершающих вращательное движение, требуется описание исходных параметров в полярных координатах. Это особенно важно, когда деталь должна иметь криволинейную цилиндрическую поверхность. Исходя из широко известных в дифференциальной геометрии выражений [1], кривизна линии в полярных координатах определяется как:

$$K(\phi)=\frac{\left|\rho^2+2\cdot\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2-\rho\cdot\frac{d^2\rho}{d\phi^2}\right|}{\left(\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1}$$

В ряде случаев может возникнуть задача, заключающаяся в том, чтобы получить выражение для построения кривой $\rho(\varphi)$, используя заданную в полярных координатах функцию кривизны $K(\varphi)$. Очевидно, что поиск решения дифференциального уравнения (1) в заданной форме крайне затруднителен. Задача может быть существенно облегчена, если использовать способ представления плоских кривых, изложенный в публикации [2]. В этой работе, при решении задачи о вычислении радиуса кривизны профиля кулачка, были получены следующие выражения:

$$\begin{cases}\frac{dH}{d\varphi}=H\cdot\mathrm{tg}\gamma;\\ R=\frac{H}{\left(1-\frac{d\gamma}{d\varphi}\right)\cdot\cos\gamma}-r.\end{cases} \tag{2}$$

В этой системе уравнений (2): $H(\varphi)$ – расстояние между осями вращения кулачка и ролика, мм; $\gamma(\varphi)$ – угол давления кулачка на ролик, радианы; $R(\varphi)$ – радиус кривизны профиля кулачка, мм; r – радиус ролика, мм; φ – угол поворота кулачкового вала, радианы.

Примем обозначение: $K=\frac{1}{R+r}$ – кривизна линии, описываемой осью вращения ролика при его воображаемом относительном качении вокруг профиля кулачка, 1/мм. При этом, кривизна линии является функцией $K=f(\varphi)$. Для соответствия между выражениями (1) и (2) примем обозначение: $H(\varphi)=\rho(\varphi)$.

Тогда, после выполнения ряда несложных преобразований системы (2), можно получить следующую систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{d\varphi} = \rho \cdot \mathrm{tg}\gamma; \\ \dfrac{d\gamma}{d\varphi} = 1 - \dfrac{\rho \cdot K}{\cos\gamma}. \end{cases} \tag{3}$$

Данная система (3) из двух дифференциальных уравнений первого порядка полностью эквивалентна дифференциальному уравнению второго порядка (1), что можно подтвердить преобразованиями. Необходимо отметить, что эти уравнения имеют большое прикладное значение при решении широкого круга технических задач. Помимо построения кулачкового профиля для механизмов различного назначения (например, системы газораспределения и подачи топлива в двигателях внутреннего сгорания), эти уравнения могут быть востребованы для решения задач автоматизированного проектирования различных деталей и узлов колесно-шагающей ходовой системы [3, 4].

Разработанный в БНТУ опытный образец колесно-шагающего движителя сферой своего применения предполагает мобильные машины сельскохозяйственного назначения. При этом, поскольку конструкция движителя позволяет перешагивать препятствия (бордюры, ступени, камни, бревна, траншеи), открываются перспективы по его применению также в лесном хозяйстве, горной промышленности, при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций, технических средств реабилитации людей с ограниченными возможностями [3].

Поскольку колесно-шагающий движитель подвергается переменным динамическим нагрузкам, возникает задача ограничения уровня контактных напряжений для соприкасающихся поверхностей. Известно, что величина контактных напряжений, среди прочих факторов, зависит от кривизны поверхностей. Данный вопрос ранее был рассмотрен и проанализирован, были получены выражения для колесно-шагающих ходовых систем различных конструкций [5]. Используем основные положения указанной работы, чтобы на их основе усовершенствовать методику построения плоских кривых по заданной кривизне.

Примем следующие обозначения в системе уравнений (3):

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho'_{\varphi}; \quad \frac{d\gamma}{d\varphi} = \gamma'_{\varphi}.$$

Тогда, после преобразований получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho'_{\varphi}}{\rho} = \mathrm{tg}\gamma; \\ (1-\gamma'_{\varphi}) \cdot \cos\gamma = \rho \cdot K. \end{cases} \tag{4}$$

Произведем логарифмирование второго уравнения:

$$\ln|1-\gamma'_{\varphi}| + \ln|\cos\gamma| = \ln|\rho| + \ln|K|.$$

Произведем дифференцирование по углу φ:

$$\frac{-\gamma''_{\varphi\varphi}}{1-\gamma'_{\varphi}} - \frac{\sin\gamma \cdot \gamma'_{\varphi}}{\cos\gamma} = \frac{\rho'_{\varphi}}{\rho} + \frac{K'_{\varphi}}{K}.$$

Поскольку в системе уравнений (4):

$\dfrac{\rho'_{\varphi}}{\rho} = \mathrm{tg}\gamma$, то получаем: $\dfrac{-\gamma''_{\varphi\varphi}}{1-\gamma'_{\varphi}} - \dfrac{\sin\gamma \cdot \gamma'_{\varphi}}{\cos\gamma} = \mathrm{tg}\gamma + \dfrac{K'_{\varphi}}{K}$.

Произведем преобразования:

$$\frac{\gamma''_{\varphi\varphi}}{\gamma'_{\varphi}-1}-\mathrm{tg}\gamma\cdot\gamma'_{\varphi}-\mathrm{tg}\gamma=\frac{K'_{\varphi}}{K};$$

$$\frac{\gamma''_{\varphi\varphi}}{\gamma'_{\varphi}-1}-\mathrm{tg}\gamma\cdot(\gamma'_{\varphi}+1)=\frac{K'_{\varphi}}{K};$$

$$\gamma''_{\varphi\varphi}-\mathrm{tg}\gamma\cdot(\gamma'_{\varphi}+1)\cdot(\gamma'_{\varphi}-1)=\frac{K'_{\varphi}}{K}\cdot(\gamma'_{\varphi}-1);$$

$$\gamma''_{\varphi\varphi}-\mathrm{tg}\gamma\cdot(\gamma'^2_{\varphi}-1)-\frac{K'_{\varphi}}{K}\cdot\gamma'_{\varphi}=-\frac{K'_{\varphi}}{K};$$

$$K\cdot\gamma''_{\varphi\varphi}-K\cdot\mathrm{tg}\gamma\cdot(\gamma'^2_{\varphi}-1)-K'_{\varphi}\cdot\gamma'_{\varphi}=-K'_{\varphi}. \qquad (5)$$

Таким образом, получено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка вместо двух уравнений первого порядка (3). Для нахождения решения уравнения (5), применим преобразования [6, с. 581, п. 6.53], используя замену переменной следующего вида:

$$\eta(\varphi)=\sin\gamma. \qquad (6)$$

Тогда $\frac{d(\sin\gamma)}{d\varphi}=\frac{d\eta}{d\varphi}=\eta'_{\varphi}$, а также $\frac{d(\sin\gamma)}{d\varphi}=\cos\gamma\cdot\frac{d\gamma}{d\varphi}=\cos\gamma\cdot\gamma'_{\varphi}$.

Следовательно $\eta'_{\varphi}=\cos\gamma\cdot\gamma'_{\varphi}$.

Поэтому

$$\gamma'_{\varphi}=\frac{\eta'_{\varphi}}{\cos\gamma}. \qquad (7)$$

Указанная подстановка [6, с. 581, п. 6.53], как правило, применяется в тех случаях, когда необходимо после преобразований получить различные виды уравнения Бесселя [6, 7]. Однако, рассматриваемая нами задача не может быть приведена к этому типу дифференциальных уравнений второго порядка.

Далее следуют преобразования:

$$\gamma''_{\varphi\varphi}=\left(\frac{\eta'_{\varphi}}{\cos\gamma}\right)'_{\varphi}=\frac{\left(\eta'_{\varphi}\right)'_{\varphi}\cdot\cos\gamma+\eta'_{\varphi}\cdot\sin\gamma\cdot\gamma'_{\varphi}}{\cos^2\gamma}=\frac{\eta''_{\varphi\varphi}\cdot\cos\gamma+\eta'_{\varphi}\cdot\eta\cdot\gamma'_{\varphi}}{\cos^2\gamma}=\frac{\eta''_{\varphi\varphi}}{\cos\gamma}+\frac{\left(\eta'_{\varphi}\right)^2\cdot\eta}{\cos^3\gamma}. \qquad (8)$$

Тогда дифференциальное уравнение (5) примет вид:

$$K\cdot\left(\frac{\eta''_{\varphi\varphi}}{\cos\gamma}+\frac{\left(\eta'_{\varphi}\right)^2\cdot\eta}{\cos^3\gamma}\right)-K\cdot\frac{\eta}{\cos\gamma}\cdot\left(\frac{\left(\eta'_{\varphi}\right)^2}{\cos^2\gamma}-1\right)-K'_{\varphi}\cdot\frac{\eta'_{\varphi}}{\cos\gamma}+K'_{\varphi}=0;$$

$$K\cdot\frac{\eta''_{\varphi\varphi}}{\cos\gamma}+K\cdot\frac{\left(\eta'_{\varphi}\right)^2\cdot\eta}{\cos^3\gamma}-K\cdot\frac{\left(\eta'_{\varphi}\right)^2\cdot\eta}{\cos^3\gamma}+K\cdot\frac{\eta}{\cos\gamma}-K'_{\varphi}\cdot\frac{\eta'_{\varphi}}{\cos\gamma}+K'_{\varphi}=0;$$

$$K\cdot\frac{\eta''_{\varphi\varphi}}{\cos\gamma}-K'_{\varphi}\cdot\frac{\eta'_{\varphi}}{\cos\gamma}+K\cdot\frac{\eta}{\cos\gamma}+K'_{\varphi}=0;$$

$$K\cdot\eta''_{\varphi\varphi}-K'_{\varphi}\cdot\eta'_{\varphi}+K\cdot\eta+K'_{\varphi}\cdot\cos\gamma=0.$$

Будем исходить из условия, что угол $\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому $\cos\gamma>0$.

Поскольку $\cos\gamma=\sqrt{1-\sin^2\gamma}=\sqrt{1-\eta^2}$, получаем дифференциальное уравнение:

$$K\cdot\eta''_{\varphi\varphi}-K'_{\varphi}\cdot\eta'_{\varphi}+K\cdot\eta+K'_{\varphi}\cdot\sqrt{1-\eta^2}=0. \qquad (9)$$

Таким образом, после интегрирования уравнения (9) получим функцию вида $\eta(\varphi)$. Поскольку $\eta(\varphi)=\sin\gamma$, можно затем найти функцию $\gamma(\varphi)$, после чего $\gamma(\varphi)$ следует подставить в первое уравнение системы (4):

$$\frac{\rho'_{\varphi}}{\rho} = \mathrm{tg}[\gamma(\varphi)].$$

Это будет уравнение с разделяющимися переменными, решение которого имеет вид:

$$\ln|\rho| = \int \mathrm{tg}[\gamma(\varphi)] \cdot d\varphi. \tag{10}$$

Однако, найти решение согласно выражению (10) будет крайне затруднительно. Можно использовать другой способ, позволяющий получить приближенное аналитическое решение достаточно высокой точности. Для этого воспользуемся вторым уравнением системы (4):

$$(1-\gamma'_{\varphi}) \cdot \cos\gamma = \rho \cdot K.$$

С учетом выражения $\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \sqrt{1-\eta^2}$, а также (7), получаем зависимость вида:

$$\rho = \frac{\sqrt{1-\eta^2} - \eta'_{\varphi}}{K}. \tag{11}$$

С другой стороны, уравнение (9) можно представить в виде:

$$-\frac{\left(\eta''_{\varphi\varphi} + \eta\right)}{K'_{\varphi}} = \frac{\sqrt{1-\eta^2} - \eta'_{\varphi}}{K}. \tag{12}$$

Очевидно, что в итоге получается выражение:

$$\rho = -\frac{\left(\eta''_{\varphi\varphi} + \eta\right)}{K'_{\varphi}}. \tag{13}$$

В итоге, для нахождения уравнения $\rho(\varphi)$ плоской кривой в полярных координатах при известном выражении кривизны $K(\varphi)$, сначала следует из уравнения (9) найти функцию $\eta(\varphi)$, а затем воспользоваться либо выражением (11), либо (13). Для проверки точности решения следует вычислить кривизну линии. Так как $\rho'_{\varphi} = \rho \cdot \mathrm{tg}\gamma$, то после преобразований получаем:

$$\rho'_{\varphi} = \rho \cdot \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}; \tag{14}$$

$$\rho''_{\varphi\varphi} = \rho \cdot \left(\frac{\eta^2}{1-\eta^2} + \frac{\eta'_{\varphi}}{\sqrt{1-\eta^2}} \cdot \frac{1}{1-\eta^2} \right). \tag{15}$$

Затем, используя формулы (1, 11, 13-15), следует вычислить кривизну линии.

Таким образом, принципиальным вопросом является интегрирование уравнения (9), чтобы получить функцию вида $\eta(\varphi)$. При этом данное уравнение не упоминается в справочниках [6, 7], поэтому нахождение его решения представляет собой нестандартную задачу.

В работе [8] было описано приближенное решение задачи для одного частного случая. Была задана функция кривизны $K = k_0 \cdot e^{k_1 \cdot \varphi}$, где k_0, k_1 – постоянные коэффициенты. После преобразований, было получено автономное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида [5, 8]:

$$\eta''_{\varphi\varphi} - k_1 \cdot \eta'_{\varphi} + \eta + k_1 \cdot \sqrt{1-\eta^2} = 0.$$

Можно понизить его порядок до первого, применив подстановки и преобразовав:

$$\eta'_{\varphi} = p(\eta); \; \eta''_{\varphi\varphi} = p \cdot \frac{dp}{d\eta}.$$

$$p \cdot \frac{dp}{d\eta} - k_1 \cdot p + \eta + k_1 \cdot \sqrt{1-\eta^2} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка относится к группе уравнений Абеля второго рода [6, 7]. Несмотря на понижение порядка, нахождение решения представляется затруднительным, особенно с учетом того, что данная форма уравнений Абеля второго рода не описана в справочнике [7]. По этой причине, целесообразно использовать методику для получения приближенного решения, данную в работе [8]. Описанная методика имеет ограниченное применение, поэтому следует найти общее решение для большего числа функций кривизны. Представим уравнение (13) в виде:

$$\eta''_{\varphi\varphi} + \eta = -K'_{\varphi} \cdot \rho . \tag{16}$$

Выражение в правой части уравнения (16) есть некоторая функция $f(\varphi) = -K'_{\varphi} \cdot \rho$. Чтобы найти функцию $\eta(\varphi)$, следует решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (16). Решение представим в виде $\eta = \bar{\eta} + \eta^*$. Для нахождения $\bar{\eta}$ следует решить уравнение $\eta''_{\varphi\varphi} + \eta = 0$.

Получаем: $\bar{\eta} = C_1 \cdot \sin\varphi + C_2 \cdot \cos\varphi$, где C_1, C_2 – постоянные интегрирования. Определять η^* следует по методу Лагранжа [1, 6]. Тогда решение уравнения (16) должно принять вид: $\eta = C_1(\varphi) \cdot \sin\varphi + C_2(\varphi) \cdot \cos\varphi$.

Для нахождения функций $C_1(\varphi), C_2(\varphi)$ следует воспользоваться системой уравнений:

$$\begin{cases} C'_{1\phi} \cdot \sin\phi + C'_{2\phi} \cdot \cos\phi = 0; \\ C'_{1\phi} \cdot \cos\phi - C'_{2\phi} \cdot \sin\phi = -K'_{\phi} \cdot \rho. \end{cases} \tag{17}$$

Выполнив преобразования, получим:

$$C'_{1\varphi} = -K'_{\varphi} \cdot \rho \cdot \cos\varphi ,$$

$$C'_{2\varphi} = K'_{\varphi} \cdot \rho \cdot \sin\varphi .$$

После интегрирования получим:

$C_1(\varphi) = I_1 + C_1$, $C_2(\varphi) = I_2 + C_2$, где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Здесь:

$I_1 = -\int K'_{\varphi} \cdot \rho \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi$; $I_2 = \int K'_{\varphi} \cdot \rho \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi$ – первообразные функции без учета постоянных величин интегрирования. После этого получаем решение:

$$\eta = C_1 \cdot \sin\varphi + C_2 \cdot \cos\varphi + I_1 \cdot \sin\varphi + I_2 \cdot \cos\varphi .$$

Найдем производную и после преобразований получим:

$$\eta'_{\varphi} = C_1 \cdot \cos\varphi - C_2 \cdot \sin\varphi + I_1 \cdot \cos\varphi - I_2 \cdot \sin\varphi .$$

Таким образом:

$$\eta = (C_1 + I_1) \cdot \sin\varphi + (C_2 + I_2) \cdot \cos\varphi . \tag{18}$$

$$\eta'_{\varphi} = (C_1 + I_1) \cdot \cos\varphi - (C_2 + I_2) \cdot \sin\varphi . \tag{19}$$

$$\eta''_{\varphi\varphi} = I'_{1\varphi} \cdot \cos\varphi - I'_{2\varphi} \cdot \sin\varphi - (C_1 + I_1) \cdot \sin\varphi - (C_2 + I_2) \cdot \cos\varphi . \tag{20}$$

С другой стороны, из уравнения (11) можно получить выражение:

$$\begin{gathered} \rho \cdot K + \eta'_{\varphi} = \sqrt{1 - \eta^2} ; \\ (\rho \cdot K + \eta'_{\varphi})^2 + \eta^2 = 1; \\ \rho^2 \cdot K^2 + 2 \cdot \rho \cdot K \cdot \eta'_{\varphi} + \eta'^2_{\varphi} + \eta^2 = 1 . \end{gathered} \tag{21}$$

Используя формулы (18, 19), получим:

$$\eta^2 = (C_1 + I_1)^2 \cdot \sin^2\varphi + 2 \cdot (C_1 + I_1) \cdot (C_2 + I_2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + (C_2 + I_2)^2 \cdot \cos^2\varphi ;$$

$$\eta'^2_{\varphi} = (C_1 + I_1)^2 \cdot \cos^2\varphi - 2 \cdot (C_1 + I_1) \cdot (C_2 + I_2) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + (C_2 + I_2)^2 \cdot \sin^2\varphi .$$

Тогда:

$$\eta_\varphi'^2+\eta^2=(C_1+I_1)^2+(C_2+I_2)^2.$$

Представим:

$$\rho^2\cdot K^2=\rho^2\cdot K^2\cdot\cos^2\varphi+\rho^2\cdot K^2\cdot\sin^2\varphi.$$

Тогда получим:

$$\rho^2\cdot K^2\cdot\cos^2\varphi+\rho^2\cdot K^2\cdot\sin^2\varphi+2\cdot\rho\cdot K\cdot(C_1+I_1)\cdot\cos\varphi-2\cdot\rho\cdot K\cdot(C_2+I_2)\cdot\sin\varphi+$$
$$+(C_1+I_1)^2+(C_2+I_2)^2=(\rho^2\cdot K^2\cdot\cos^2\varphi+2\cdot\rho\cdot K\cdot(C_1+I_1)\cdot\cos\varphi+(C_1+I_1)^2)+$$
$$+(\rho^2\cdot K^2\cdot\sin^2\varphi-2\cdot\rho\cdot K\cdot(C_2+I_2)\cdot\sin\varphi+(C_2+I_2)^2)=(\rho\cdot K\cdot\cos\varphi+(C_1+I_1))^2+$$
$$+(\rho\cdot K\cdot\sin\varphi-(C_2+I_2))^2=(\rho\cdot K\cdot\cos\varphi+I_1+C_1)^2+(\rho\cdot K\cdot\sin\varphi-I_2-C_2)^2=1.$$

Таким образом, получаем следующее выражение:

$$(\rho\cdot K\cdot\cos\varphi+I_1+C_1)^2+(\rho\cdot K\cdot\sin\varphi-I_2-C_2)^2=1. \qquad (22)$$

Находим постоянные интегрирования C_1, C_2 из выражений (18–19), используя следующие начальные условия: $\varphi=\varphi_0$, $\eta=\sin\gamma_0$, $\eta_\varphi'=\cos\gamma_0-\rho(\varphi_0)\cdot K(\varphi_0)$. После преобразований получаем:

$$\begin{cases}\sin\gamma_0=(C_1+I_1(\varphi_0))\cdot\sin\varphi_0+(C_2+I_2(\varphi_0))\cdot\cos\varphi_0;\\ \cos\gamma_0-\rho(\varphi_0)\cdot K(\varphi_0)=(C_1+I_1(\varphi_0))\cdot\cos\varphi_0-(C_2+I_2(\varphi_0))\cdot\sin\varphi_0.\end{cases}$$

$$C_1=\cos(\gamma_0-\varphi_0)-\rho(\varphi_0)\cdot K(\varphi_0)\cdot\cos\varphi_0-I_1(\varphi_0). \qquad (23)$$

$$C_2=\sin(\gamma_0-\varphi_0)+\rho(\varphi_0)\cdot K(\varphi_0)\cdot\sin\varphi_0-I_2(\varphi_0). \qquad (24)$$

Представим, что:

$$A=\cos(\gamma_0-\varphi_0)-\rho(\varphi_0)\cdot K(\varphi_0)\cdot\cos\varphi_0. \qquad (25)$$

$$B=\sin(\gamma_0-\varphi_0)+\rho(\varphi_0)\cdot K(\varphi_0)\cdot\sin\varphi_0. \qquad (26)$$

Тогда постоянные интегрирования примут вид:

$$C_1=A-I_1(\varphi_0). \qquad (27)$$

$$C_2=B-I_2(\varphi_0). \qquad (28)$$

Подставим данные выражения в формулы (18-20) и получим:

$$\eta=A\cdot\sin\varphi+B\cdot\cos\varphi+(I_1-I_1(\varphi_0))\cdot\sin\varphi+(I_2-I_2(\varphi_0))\cdot\cos\varphi. \qquad (29)$$

$$\eta_\varphi'=A\cdot\cos\varphi-B\cdot\sin\varphi+(I_1-I_1(\varphi_0))\cdot\cos\varphi-(I_2-I_2(\varphi_0))\cdot\sin\varphi. \qquad (30)$$

$$\eta_{\varphi\varphi}''=-A\cdot\sin\varphi-B\cdot\cos\varphi-(I_1-I_1(\varphi_0))\cdot\sin\varphi-(I_2-I_2(\varphi_0))\cdot\cos\varphi+I_{1\varphi}'\cdot\cos\varphi-I_{2\varphi}'\cdot\sin\varphi.$$

Поскольку $I_1=-\int K_\varphi'\cdot\rho\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi$; $I_2=\int K_\varphi'\cdot\rho\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi$, получаем что:

$$I_{1\varphi}'\cdot\cos\varphi-I_{2\varphi}'\cdot\sin\varphi=-K_\varphi'\cdot\rho\cdot\cos^2\varphi-K_\varphi'\cdot\rho\cdot\sin^2\varphi=-K_\varphi'\cdot\rho.$$

Тогда:

$$\eta_{\varphi\varphi}''=-A\cdot\sin\varphi-B\cdot\cos\varphi-(I_1-I_1(\varphi_0))\cdot\sin\varphi-(I_2-I_2(\varphi_0))\cdot\cos\varphi-K_\varphi'\cdot\rho. \qquad (31)$$

Для особой части решения уравнения принимаем обозначения, а затем выражаем производные:

$$\mu_1=(I_1-I_1(\varphi_0))\cdot\sin\varphi. \qquad (32)$$

$$\mu_2=(I_2-I_2(\varphi_0))\cdot\cos\varphi. \qquad (33)$$

$$\mu=\mu_1+\mu_2=(I_1-I_1(\varphi_0))\cdot\sin\varphi+(I_2-I_2(\varphi_0))\cdot\cos\varphi. \qquad (34)$$

$$\mu_\varphi'=\mu_{1\varphi}'+\mu_{2\varphi}'=(I_1-I_1(\varphi_0))\cdot\cos\varphi-(I_2-I_2(\varphi_0))\cdot\sin\varphi. \qquad (35)$$

$$\begin{aligned}\mu_{\varphi\varphi}''=\mu_{1\varphi\varphi}''+\mu_{2\varphi\varphi}''&=-(I_1-I_1(\varphi_0))\cdot\sin\varphi+I_{1\varphi}'\cdot\cos\varphi-(I_2-I_2(\varphi_0))\cdot\cos\varphi-I_{2\varphi}'\cdot\sin\varphi=\\&=-(I_1-I_1(\varphi_0))\cdot\sin\varphi-(I_2-I_2(\varphi_0))\cdot\cos\varphi-K_\varphi'\cdot\rho.\end{aligned} \qquad (36)$$

При начальном значении угла $\varphi=\varphi_0$ будут выполняться условия:

$$\mu_1(\varphi_0)=0,\ \mu_2(\varphi_0)=0,\ \mu(\varphi_0)=0,\ \mu'_{1\varphi}(\varphi_0)=0,\ \mu'_{2\varphi}(\varphi_0)=0,\ \mu'_{\varphi}(\varphi_0)=0.$$

Следовательно:

$$\eta = A\cdot\sin\varphi + B\cdot\cos\varphi + \mu. \tag{37}$$

$$\eta'_{\varphi} = A\cdot\cos\varphi - B\cdot\sin\varphi + \mu'_{\varphi}. \tag{38}$$

$$\eta''_{\varphi\varphi} = -A\cdot\sin\varphi - B\cdot\cos\varphi + \mu''_{\varphi\varphi}. \tag{39}$$

Используя формулы (13), (37), (39), получаем:

$$\rho = -\frac{\left(\mu''_{\varphi\varphi}+\mu\right)}{K'_{\varphi}}. \tag{40}$$

Решение по формуле (40) будет находиться по отдельной методике для каждой функции кривизны. В тех случаях, когда функция кривизны представляет собой сложное выражение, следует применять другие методы. Например, в ряде случаев поиск решения можно рационализировать, если в исходном уравнении $K\cdot\eta''_{\varphi\varphi} - K'_{\varphi}\cdot\eta'_{\varphi} + K\cdot\eta + K'_{\varphi}\cdot\sqrt{1-\eta^2} = 0$, заменить выражение с квадратным корнем – разложением в ряд по формуле бинома Ньютона [1]:

$$\sqrt{1-\eta^2} \approx 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\eta^2 - \tfrac{1}{8}\cdot\eta^4 - \tfrac{1}{16}\cdot\eta^6 - \tfrac{5}{128}\cdot\eta^8 - \tfrac{7}{256}\cdot\eta^{10} - \tfrac{21}{1024}\cdot\eta^{12} - \tfrac{33}{2048}\cdot\eta^{14} - \tfrac{429}{32768}\cdot\eta^{16} - \tfrac{715}{65536}\cdot\eta^{18} -$$
$$- \tfrac{2431}{262144}\cdot\eta^{20} - \tfrac{4199}{524288}\cdot\eta^{22} - \tfrac{29393}{4194304}\cdot\eta^{24} - \tfrac{52003}{8388608}\cdot\eta^{26} - \tfrac{185725}{33554432}\cdot\eta^{28} - \tfrac{334305}{67108864}\cdot\eta^{30}.$$

Также, можно получить решение в виде многочлена, используя систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \rho'_{\varphi} = \dfrac{\rho\cdot\eta}{\lambda}; \\ \eta'_{\varphi} = \lambda - K\cdot\rho; \\ \lambda'_{\varphi} = K\cdot\rho'_{\varphi} - \eta. \end{cases} \tag{41}$$

Используя систему (41), можно избежать лавинообразного усложнения выражений для производных высокого порядка, что позволит повысить точность разложения в ряд для искомой функции $\rho(\varphi)$. Здесь функция кривизны $K(\varphi)$ задана, неизвестными функциями являются $\eta(\varphi)=\sin\gamma$, $\lambda(\varphi)=\cos\gamma$, а также уравнение кривой $\rho(\varphi)$ в полярных координатах. Таким образом, с помощью системы (41) можно получить приближенное решение уравнения (1) для любой непрерывной, бесконечно дифференцируемой функции кривизны $K(\varphi)$, производные любого порядка которой не имеют разрывов на всей области определения.

Выводы. Приведенное теоретическое обоснование необходимо для разработки методик построения плоских кривых, определяемых законом изменения кривизны в полярных координатах. Должна обеспечиваться реализация расчетов плоских кривых для конкретных функций кривизны, не имеющих бесконечных разрывов. Областью применения описанных методов дифференциальной геометрии являются системы автоматизированного проектирования. В результате, облегчается решение задач инженерной практики при проектировании колесно-шагающих ходовых систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воднев, В. Т. Основные математические формулы: Справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович; под ред. Ю.С. Богданова. – Мн.: Вышэйшая школа, 1995. – 380 с.

2. Жуковец, В. Н. Профиль плоского кулачка в виде замкнутой кривой, описанной системой уравнений в параметрическом виде / В. Н. Жуковец // Весці НАН Беларусі. – 2006. – № 1. – С. 76–86.

3. Скойбеда, А. Т. Колесно-шагающий движитель и его динамические преимущества по сравнению с колесом / А. Т. Скойбеда, И. М. Комяк, В. Н. Жуковец // Механика-2011: сб. науч. тр. V Белорусского конгресса по теорет. и прикладной механике; Минск, 26–28 окт. 2011 г.: в 2 т. – Минск, 2011. – Т. 1. – С. 138–144.

4. Скойбеда, А. Т. Рациональный профиль опорных башмаков колесно-шагающего движителя / А. Т. Скойбеда, В. Н. Жуковец // Наука и техника. Международный научно-технический журнал. – 2013. – № 6. – С. 38–42.

5. Скойбеда, А. Т. Колесно-шагающие движители для транспортного средства высокой проходимости / А. Т. Скойбеда, В. Н. Жуковец // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». – Минск, 2013. – Вып. 28. – С. 228–233.

6. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1965. – 704 с.

7. Зайцев, В. Ф. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М.: Факториал, 1997. – 512 с.

8. Скойбеда, А. Т. Решение автономного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка при построении плоских кривых / А. Т. Скойбеда, В. Н. Жуковец // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. Вып. 33. – 2018. – С. 388–397.

Поступила: 30.01.2021