УДК 537.312.6:624.042.5

ВЫПУЧИВАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ, ОТКРЫТОГО ТОНКОСТЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ВСЛЕДСТВИЕ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА

[1]Мартыненко Т. М., [2]Скляр О. Н., [2]Мартыненко И. М., [2]Куранова О. В.

[1]Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск
[2]Белорусский национальный технический университет, Минск

Ни одна задача в области изучения сопротивления материалов не имеет такую историю, как теория выпучивания сжатых элементов металлических конструкций. Причины затруднений, встречающихся при исследовании задач выпучивания, обусловлены частично особенностями самих задач и частично особенностями материала, из которого выполнены металлические конструкции. Часто расчет конструкции заключается в определении напряжений, которое основано на предположении о существовании между внутренними и внешними силами устойчивого равновесия, т. е. равновесия, при котором любое незначительное изменение условий нагружения в определенных пределах не вызывает увеличения напряжений или непропорциональных упругих искривлений системы. Следовательно, введение в расчет напряжения, называемого допускаемым напряжением, обеспечивает степень безопасности конструкции. Совершенно с другой точки зрения рассматривается задача о выпучивании, а именно исследование возможного неустойчивого равновесия между внешней нагрузкой и внутренним сопротивлением конструкции. Дополнительным затруднением является тот факт, что явление выпучивания вообще зависит от сложного соотношения напряжений и деформаций рассматриваемого материала, что вызывает большие затруднения как в области теоретических, так и в области экспериментальных исследований [1, 2].

Рассмотрим стержень постоянного, но вообще произвольного открытого поперечного сечения, составленного из n тонких плоских пластин (рис. 1). Пластины могут иметь переменную толщину, но должны быть достаточно тонкими для того, чтобы можно было пренебречь их поперечной жесткостью по сравнению с жесткостью в их собственной плоскости, а длина стержня велика по сравнению с размерами поперечного сечения. Выберем систему координат x, y, z с началом O в центре тяжести сечения; x и y являются главными осями сечения, а z – продольной осевой линией. Наряду с системой координат x, y, z в каждом поперечном сечении проводим проходящие через центр тяжести первоначально параллельные главным осям, связанные с сечением оси ξ и η. Вследствие перемещения поперечных сечений оси ξ и η будут двигаться вместе с ними, а составляющие перемещения центра тяжести, параллельные к этим осям, будут соответственно u и v. Под действием внешних нагрузок стержень будет деформироваться; предположим, что деформация не вызывает искривления поперечных сечений стержня. Следовательно, составляющие перемещения любой точки, находящейся в плоскости поперечного сечения, будут определены координатами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ центра тяжести и углом закручивания β. С другой стороны, эти перемещения определяются компонентами $\bar{u}$ и $\bar{v}$ перемещения центра тяжести и углом β. Переменные $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$, и β являются функциями координаты z.

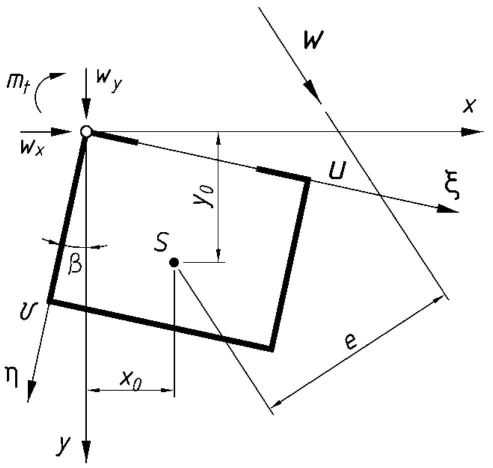

Рис. 1. Стержень постоянного открытого поперечного сечения

Учитывая вышеизложенное, выведем теперь основное дифференциальное уравнение кручения и изгиба на основе теоремы о стационарном значении потенциальной энергии. Потенциальная энергия U состоит из двух частей: из потенциальной энергии внешних нагрузок и энергии деформации V – деформированного стержня. В рассмотренном случае V можно разделить на две части: V_1, обусловленная продольными, нормальными напряжениями, и V_2 обусловленная напряжениями сдвига.

Согласно теореме о стационарном значении потенциальной энергии величины деформации $\bar{u}$, $\bar{v}$, β и ε должны быть такими, чтобы выражение для полной потенциальной энергии принимало минимальное значение. Такую задачу можно решить с помощью вариационного исчисления; U принимает стационарное значение, при удовлетворения уравнения Эйлера. Составим систему уравнений для нахождения неизвестных:

$$EJ_y\bar{u}'''' + ER_y\beta'''' = w_x; \qquad (1)$$

$$EJ_x\bar{v}'''' + ER_x\beta'''' = w_y; \qquad (2)$$

$$ER_y\bar{u}'''' + ER_x\bar{v}'''' + ER_\beta\beta'''' - GK\beta'' = \bar{m}_t; \qquad (3)$$

$$EA\varepsilon = 0, \qquad (4)$$

где J_x, J_y – главные осевые моменты инерции, R_x, R_y коэффициенты которые обращаются в 0, в случае симметрии поперечного сечения относительно оси x или y, при двойной симметрии $R_x = R_y = 0$, но не R_β, G – модуль сдвига K – постоянная кручения.

Согласно обычной теории изгиба имеем следующие уравнения [3]:

$$EJ_y\bar{u}'' = w_x; \quad EJ_x\bar{v}'' = w_y;$$

дифференцируя дважды, получим:

$$EJ_y\bar{u}'''' = w_x; \; EJ_x\bar{v}'''' = w_y. \qquad (5)$$

Эти уравнения отличаются от уравнений (1) и (2), которые содержат добавочные члены, зависящие от R_x, R_y.

Исследуя кручение двутавровых балок, Тимошенко С. П. [4] получил следующее уравнение: $C\beta' - \dfrac{Dh^2}{2}\beta = M_z$, где M_z – действующий крутящий момент, а C идентичен GK в уравнении (3). Дифференцируя это уравнение и принимая во внимание, что

$\frac{dM_z}{dz} = -\bar{m}_t$, получим:

$$\frac{Dh^2}{2}\beta'''' - GK\beta'' = \bar{m}_t; \qquad (6)$$

Если отождествлять ER_β с членом $\frac{Dh^2}{2}$, то уравнение (3) совпадает с (6), за исключением членов, содержащих R_x и R_y. Не будем обсуждать уравнение (4); оно отражает тот факт, что средняя продольная деформация равна нулю, так как продольная сила отсутствует. Выбором соответствующих координатных осей можно упростить уравнения (1), (2) и (3).

Рассмотрим точку S в каждом поперечном сечении с координатами x_0, y_0 в результате изгиба балки эта точка займет положение S'. Координаты u и v определим как компоненты перемещения точки S, параллельные подвижным координатным осям ξ и η. При малых значениях β, $\cos\beta = 1$ и $\sin\beta = \beta$ из рис. 1 получим следующие соотношения:

$$\bar{u} = u + y_0\beta; \ \bar{v} = v - x_0\beta. \qquad (7)$$

Можно использовать любые значения x_0 и y_0. Если положить, что $x_0 = \frac{R_x}{J_x}$ и $y_0 = -\frac{R_y}{J_y}$, то уравнение (7) примет вид:

$$\bar{u} = u - \frac{R_y}{J_y}\beta; \quad \bar{v} = v - \frac{R_x}{J_x}\beta. \qquad (8)$$

Подставляя эти уравнения в уравнения (1), (2) и (3), получим:

$$EJ_y u'''' = w_x; \qquad (9)$$

$$EJ_x v'''' = w_y; \qquad (10)$$

$$ER_y u'''' + ER_x v'''' + E\left(R_\beta - \frac{R_x^2}{J_x} - \frac{R_y^2}{J_y}\right)\beta'''' - GK\beta'' = \bar{m}_t. \qquad (11)$$

Первые два уравнения можно использовать для того, чтобы исключить u'''' и v'''', а третье, используя выражения для x_0 и y_0, перепишем в следующем виде:

$$E\left(R_\beta - \frac{R_x^2}{J_x} - \frac{R_y^2}{J_y}\right)\beta'''' - GK\beta'' = \bar{m}_t + y_0 w_x - x_0 w_y. \qquad (12)$$

Если компоненты внешних сил w_x, w_y и $\bar{m}_t$ заменить силами, действующими в точке S, значения w_x и w_y останутся неизменными, но крутящий момент составит $\bar{m}_t = ew$. Легко убедиться, что $m_t = \bar{m}_t + y_0 w_x - x_0 w_y$, которое идентично выражению правой части уравнения (12). Кроме того, если определить постоянную Γ с помощью выражения $\Gamma = R_\beta - \frac{R_x^2}{J_x} - \frac{R_y^2}{J_y}$, тогда можно переписать уравнения (9), (10) и (12) в следующем виде:

$$EJ_y u'''' = w_x; \tag{13}$$

$$EJ_x v'''' = w_y; \tag{14}$$

$$E\Gamma\beta'''' - GK\beta'' = m_t. \tag{15}$$

Эти уравнения идентичны по форме с уравнениями (5) и (6) обычной теории изгиба и кручения, но координаты $\overline{u}$, $\overline{v}$ и β необходимо отсчитывать от начала S, а крутящий момент m_t определять относительно той же точки. На основании уравнения (15) можно заключить, что в случае, если стержень не закручен ($\beta = 0$), m_t должно равняться нулю; это означает, что равнодействующая внешних сил W должна проходить через точку S. Это обстоятельство служит основой для определения центра сдвига поперечного сечения, а точка S должна являться центром сдвига. В случае, когда стержень закручивается, но не изгибается, $u = v = 0$, и из уравнений (13) и (14) получим $w_x = w_y = 0$; это показывает, что центр сдвига S в случае чистого кручения представляет собой центр кручения поперечного сечения.

Подставляя значения u и v из уравнений (8), получим выражение для V в его окончательной форме:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2}\int\left(ER_y u''^2 + ER_x v''^2 + E\Gamma\beta''^2 + GK\beta'^2 + BA\varepsilon^2\right)dz. \tag{16}$$

Выводы. В данном изложении подразумевается, что центр сдвига S определяется единственным образом при условии, если стержень не закручивается, когда равнодействующая внешних сил проходит через точку S. Новожилов В. В. [5] показал, что граничные условия на торцах стержня влияют на положение центра сдвига. Допущение, что геометрическая форма поперечных сечений стержня не меняется, распространяется также на концевые сечения, и определение центра сдвига обусловлено единственно этим граничным условием. Из этого допущения следует, что коэффициент Пуассона равен нулю. Совершенно очевидно, что без предположения о недеформируемости поперечных сечений стержня возникнут затруднения при определении центра сдвига. Если поперечные сечения искривляются, то каждая часть поперечного сечения будет иметь свой собственный центр кручения, и возможность определения центра сдвига как общего центра кручения всего поперечного сечения исчезает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.

2. Власов, В. З. Общая теория оболочек / В. З. Власов. – М. : Физматгиз, 1949. – 784 с.

3. Блейх, Ф. Устойчивость металлических конструкций / Ф. Блейх. – М. : Физматгиз, 1959. – 544 с.

4. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П.Тимошенко, С. В. Войковский-Кригер. – М. : Физматгиз, 1963.

5. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1962.– 432 с.

6. Abaqus. Analysis User's Manual. Introduction, Spatial Modeling, and Execution. Publisher Simulia. – 2008. – P. 711.

Поступила: 29.01.2021