УДК 539.374

ТЕРМОУПРУГИЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ

[1]Старовойтов Э. И., [2]Журавков М. А., [1]Яровая А. В.

[1]Белорусский государственный университет транспорта, Гомель
[2]Белорусский государственный университет, Минск

Введение. В связи с широким распространением композитных, в том числе трехслойных, элементов конструкций в технике и строительстве в последнее время значительное возрос спрос на разработку математических моделей и методов их расчета на различные виды и типы нагрузок.

Монографии [1–3] содержат различные математические модели статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций, включая стержни, пластины и оболочки. В них изложены методы решения соответствующих краевых задач. Гармонические и нестационарные динамические нагружения неоднородных цилиндрических и сферических оболочек исследованы в работах [4–7]. Изотермическое динамическое деформирование трехслойных круговых пластин при импульсных и резонансных непрерывных и локальных нагрузках рассмотрено в статьях [8– 11]. Постановки и методики решения краевых задач об изотермическом квазистатическом деформировании, в том числе циклическом, упругопластических слоистых стержней и пластин приведены в [12–15]. Термосиловое нагружение трехслойных пластин и оболочек исследовалось в работах [16–18].

Здесь рассмотрена задача о колебаниях упругой круговой трехслойной пластины в температурном поле. Проведен численный параметрический анализ зависимости собственных чисел и частот колебаний защемленной по контуру пластины от температуры.

1. Общее решение начально-краевой задачи. Постановка начально-краевой задачи проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z. Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось z направляется ей перпендикулярно вверх, к первому слою (рис. 1). Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого заполнителя ($h_3 = 2c$), воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали.

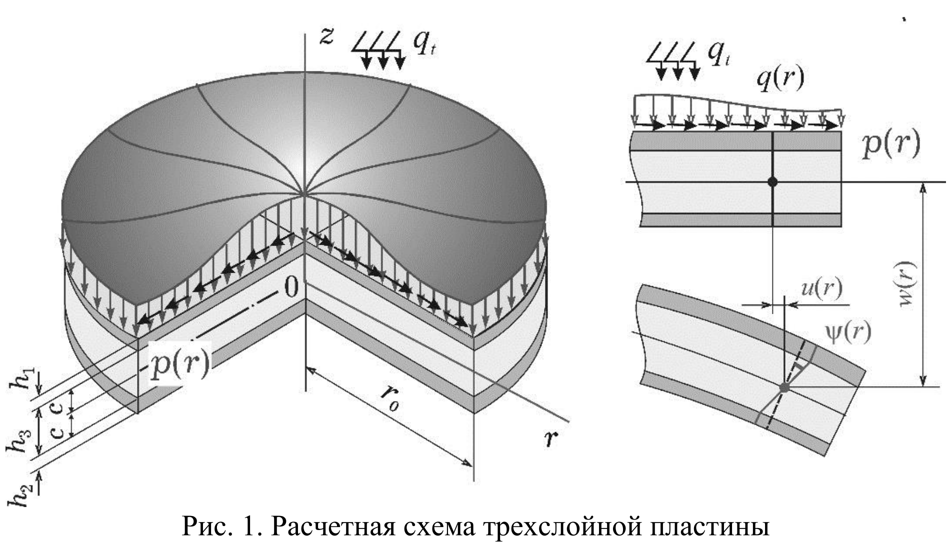

Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины

Считаем, что к наружной поверхности первого несущего слоя приложены произвольные распределенные нагрузки $q(r)$, $p(r)$, к контуру пластины – погонные усилия и моменты $T_r^0, H_r^0,\ M_r^0, Q^0$. Температурное поле принимается однородным. В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k =1, 2, 3 – номер слоя), а прогиб пластины w, относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$). Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0.

Из гипотезы прямолинейности нормали заполнителя следует, что

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)},_z + w,_r = \psi.$$

После интегрирования этого выражения с учетом принятых гипотез получим формулы, выражающие радиальные перемещения в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw,_r \quad c \le z \le c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw,_r \quad -c \le z \le c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw,_r \quad -c - h_2 \le z \le -c, \end{aligned} \tag{1}$$

где z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (1) и соотношений Коши, напряжения – из термоупругих соотношений закона Гука:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(T_k)\text{э}_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k) \quad (k = 1,\ 2,\ 3),$$
$$s_{rz}^{(3)} = 2G_k(T_k)\text{э}_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi),$$

где $s_\alpha^{(k)}, \text{э}_\alpha^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k), K_k(T_k)$ – модули сдвига и объемного деформирования; T_k – температура в k-ом слое, отсчитываемая от некоторого начального значения T_0; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k-го слоя.

Для описания зависимости модулей упругости $G(T)$, $K(T)$ материалов слоев от температуры применялась универсальная линейная формула Белла [2]:

$$\begin{gathered} \{G(T), K(T),\ E(T)\} = \{G(0), K(0),\ E(0)\}\,\varphi(T), \\ \varphi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \le 0{,}06, \\ 1{,}03(1 - T/(2T_\mathrm{m})), & 0{,}06 < T/T_m \le 0{,}57, \end{cases} \end{gathered} \tag{2}$$

где T_m – температура плавления материала; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ – значения модулей при, так называемом, нулевом напряжении, которые определяются из эксперимента, например, зная G_0 при некоторой начальной температуре T_0 получим, что $G(0) = G_0 / \varphi(T_0)$.

Уравнения движения рассматриваемой пластины получены вариационным методом в [2]. Соответствующая система дифференциальных уравнений вынужденных колебаний будет

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_2(a_1u + a_2\psi - a_3w,_r) &= -p, \\ \mathrm{L}_2(a_2u + a_4\psi - a_5w,_r) - 2cG_3\psi &= 0, \\ \mathrm{L}_3(a_3u + a_5\psi - a_6w,_r) - M_0\ddot{w} &= -q. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы

$$\mathrm{L}_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$\mathrm{L}_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(r\,\mathrm{L}_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

Коэффициенты

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+),$$

$$a_3 = h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right)K_1^+ - h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right)K_2^+, \quad a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}cK_3^+\right),$$

$$a_5 = c\left[h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+\right], \tag{4}$$

$$a_6 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+,$$

$$K_k^+ = K_k(T_{0k}) + \frac{4}{3}G_k(T_{0k}), \; K_k^- = K_k(T_{0k}) - \frac{2}{3}G_k(T_{0k}),$$

$M_0\ddot{w}$ – поперечные инерционные силы, $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$, ρ_k – плотность материала слоя; $T_{0k}(t)$ – величина усредненной температуры в k-ом слое в момент времени t.

Начальные условия принимаются однородными. В качестве граничных принимаются кинематические условия заделки контура пластины:

$$(u = \psi = w = w,_r = 0 \quad \text{при} \;\; r = 1). \tag{5}$$

2. Собственные колебания пластины. Соответствующая система дифференциальных уравнений движения следует из (3), если положить нагрузки в правых частях уравнений равными нулю. После некоторых преобразований она приводится к виду

$$u = b_1 w,_r + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \psi = b_2 w,_r + C_3 r + \frac{C_4}{r},$$
$$\mathrm{L}_3(w,_r) + M^4 \ddot{w} = 0, \tag{6}$$

где коэффициенты

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2},$$

$$M^4 = M_0 D, \quad D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Термозависимые коэффициенты a_i определяются соотношениями (4).

В связи с ограниченностью искомого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо в (6) положить $C_2 = C_4 = 0$.

Искомый прогиб принимается в виде

$$w(r,t) = v(r)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)), \tag{7}$$

где $v(r)$ – неизвестная координатная функция, ω – частота собственных колебаний рассматриваемой пластины, A и B – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

После подстановки выражения (7) в последнее уравнение системы (6) получим уравнение для определения координатной функции $v(r)$:

$$\mathrm{L}_3(v,_r) - \beta^4 v = 0, \tag{8}$$

или, с учетом оператора (4), в развернутом виде

$$v,_{rrrr} + \frac{2}{r}v,_{rrr} - \frac{1}{r^2}v,_{rr} + \frac{1}{r^3}v,_r - \beta^4 v = 0.$$

Здесь введено обозначение для собственного числа уравнения (8):

$$\beta^4 = M^4 \omega^2. \tag{9}$$

Решение уравнения (8) известно:

$$v(\beta r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r) + C_7 Y_0(\beta r) + C_8 K_0(\beta r). \tag{10}$$

где J_0, Y_0 – функции Бесселя нулевого порядка (нижний индекс) первого и второго рода соответственно; I_0, K_0 – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков; C_5, ..., C_8 – константы интегрирования.

Не останавливаясь на описании указанных функций Бесселя, отметим, что $Y_0(\beta r)$ и $K_0(\beta r)$ имеют особенность типа логарифма в начале координат, т. е. в центре пластины. Поэтому необходимо в (10) положить постоянные интегрирования $C_7 = C_8 = 0$. Заметим также, что для пластин с отверстием эти константы определяются из граничных условий на внутреннем контуре. В результате, решение системы (6) принимает вид

$$\begin{gathered} u = b_1 w,_r + C_1 r, \quad \psi = b_2 w,_r + C_3 r, \\ w(\beta r) = v(r)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)), \\ v(\beta r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r) w(r, t). \end{gathered} \tag{11}$$

Если контур пластины защемлен, то на нем должны выполняться условия (5). Подставив в два последних из них решение (11), получим однородную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования C_5, C_6:

$$\begin{gathered} C_5 J_0(\beta r_1) + C_6 I_0(\beta r_1) = 0, \\ -C_5 J_1(\beta r_1) + C_6 I_1(\beta r_1) = 0, \end{gathered}$$

где J_1, I_1 – функции Бесселя первого порядка.

Эта система однородная, поэтому имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее детерминанта. Следовательно,

$$I_1(\beta r_1) J_0(\beta r_1) + J_1(\beta r_1) I_0(\beta r_1) = 0\,. \tag{12}$$

Трансцендентное уравнение (12) служит для определения собственных чисел β_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) дифференциального уравнения (8). После вычисления β_n частоты собственных колебаний следуют из соотношения (9):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}. \tag{13}$$

Следует отметить, что частоты ω_n зависят от температуры через коэффициент M^4, введенный в (6).

В таблице 1 приведены собственные числа для трехслойной пластины единичного радиуса ($r_0 = 1$), материалы слоев которой Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т. Толщины слоев принимались следующие: $h_1 = h_2 = 0{,}02$, $h_3 = 0{,}1$.

Таблица 1 – Собственные числа при заделанном контуре пластины

Номер n	Собственное число λ_n	Номер n	Собственное число λ_n
0	3,196	8	28,279
1	6,306	9	31,420
2	9,439	10	34,561
3	12,577	11	37,702
4	15,716	12	40,844
5	18,857	13	43,985
6	21,997	14	47,126
7	25,138		

Таблица 2 содержит собственные числа пластины, материалы слоев которой кордиерит–фторопласт-4–Д16-Т, при толщинах $h_3 = 10h_2 = 20h_1 = 0{,}05$. Механические характеристики, использованных материалов, приведены в [2].

Таблица 2 – Собственные числа для пакета кордиерит–фторопласт–Д16Т

Номер n	Собственное число β_n	Номер n	Собственное число β_n
0	3,193	10	34,531
1	6,301	11	37,679
2	9,431	12	40,808
3	12,566	13	43,947
4	15,702	14	47,086
5	18,840	15	50,224
6	21,977	16	53,363
7	25,116	17	56,502
8	28,254	18	59,641
9	31,392	19	62,780

3. Численные результаты показывают зависимость собственных частот (13) от температуры круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру: *1* – ω_0; *2* – ω_1; *3* – ω_0; *4* – ω_1. Предполагалось, что вся пластина прогревается равномерно до рассматриваемой температуры. Коэффициенты a_i рассчитывались по формулам (4). Зависимость от температуры учитывалась формулой Белла (2).

На рисунке 2 приведены графики, иллюстрирующие зависимость собственных частот от температуры для пластины, выполненной из материалов Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т. Толщины слоев: $h_1 = h_2 = 0{,}02$, $h_3 = 0{,}1$. Рисунок 3 содержит аналогичные графики для пластины, со слоями кордиерит–фторопласт-4–Д16-Т, $h_3 = 10h_2 = 20h_1 = 0{,}05$.

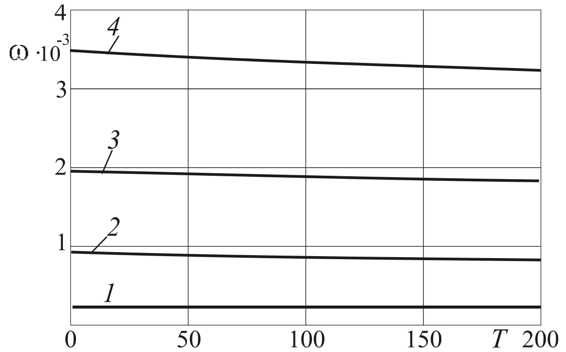

Рис. 2. Пластина Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т

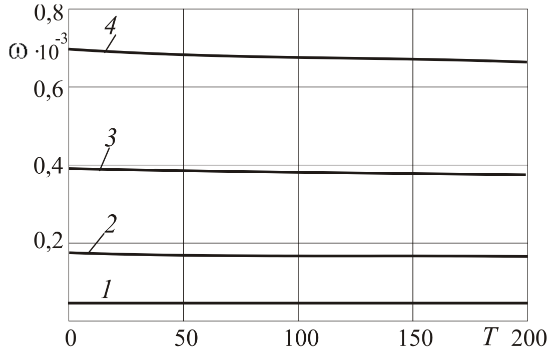

Рис. 3. Пластина кордиерит–фторопласт-4–Д16-Т

Выводы. При замене верхнего несущего слоя на кордиерит, пластина становится более жесткой и частоты собственных колебаний растут. При нагревании на 100° частоты уменьшаются на 3,6 %, при нагревании на 200° – на 7 % за счет изменения модулей упругости материалов слоев.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект Т20Р-047).

ЛИТЕРАТУРА

1. Головко, К. Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.
2. Журавков, М. А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.
3. Старовойтов, Э. И. Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск: Бел. навука, 2017. – 275 с.

4. Горшков, А. Г. Гармонические колебания трехслойной цилиндрической вязкоупругопластической оболочки / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая // Прикладная механика. – 2001. – № 9. – С. 100–107.

5. Mikhailova, E. Yu. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) / G. V. Fedotenkov, E. Yu. Mikhailova // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 2, P. 239–247.

6. Fedotenkov, G. V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovskiy // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 162, No. 2. – P. 246–253.

7. Tarlakovskiy, D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskiy, G. V. Fedotenkov// Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, No. 2. – P. 145–152.

8. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

9. Starovoitov, E. I. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, No 5. – P. 561–570.

10. Ivañez, I. The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. − 2015. − No. 133. − P. 1127–1136.

11. Paimushin, V. N. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate / V. N. Paimushin, R. K. Gazizullin // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol. 53, No. 3. – P. 407–436.

12. Москвитин, В. В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 267–273.

13. Старовойтов, Э. И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

14. Захарчук, Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – № 33. – С. 363–369.

15. Козел, А. Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – № 33. – С. 318–323.

16. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

17. Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989.– № 5. – С. 114–119.

18. Нестерович, А. В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–60.

Поступила: 31.01.2021