УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ МАТЕРИАЛОВ СЛОЕВ НА ИЗГИБ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

Козел А. Г.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

В современном строительстве, аэрокосмическом комплексе, судостроении и строительстве не могут обойтись без применения композиционных, в том числе трехслойных конструкций. Конструктивно они состоят из внешних прочных слоев малой толщины, между которыми помещается относительно толстый заполнитель, а их соединение друг с другом обеспечивается склеиванием. Трехслойные пакеты могут изготавливаться из разнообразных материалов (бетона, древесины, металла, пластмасс и т. д.), которые варьируются в зависимости от необходимых характеристик и условий эксплуатации заданного изделия.

В монографии [1] приведены различные математические модели деформирования трехслойных стержней, изложены методы решения соответствующих краевых задач. Интересные задачи, связанные с исследованием влияния сжимаемости заполнителя на перемещения в пластине в случае осессиметричного деформирования решены в [2, 3], неосесимметричное нагружение пластин исследовалось в [4]. Деформирование круговых сэндвич-пластин на упругом основании под действием динамических нагрузок рассмотрено в [5–7], прямоугольных сэндвич-пластин – в [8, 9].

Осесимметричное деформирование несимметричных по толщине упругих круговых трехслойных пластин на основании Пастернака исследовалось в работах [10, 11]. Анализ напряженного состояния упругой и упругопластической круглой сэндвич-пластины выполнен в работах [12, 13]. Здесь приведена постановка и решение краевой задачи изгиба упругой круговой сэндвич-пластины, связанной со сложным основанием модели Пастернака, численно исследованы перемещения и напряжения при различных материалах несущих слоев и заполнителя.

1. Постановка задачи. Рассматривается сэндвич-пластина на упругом основании (рис. 1). Для изотропных несущих слоев толщиной $h_1 = h_2$ приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом несжимаемом по толщине заполнителе ($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ. Заполнитель считается легким, т. е. не учитывается работа касательных напряжений $\sigma_{rz}^{(3)}$ в тангенциальном направлении. Постановка и решение задачи приводится в цилиндрической системе координат r, φ, z, связанной со срединной плоскостью заполнителя. Ввиду симметрии пластины радиальное перемещение координатной плоскости $u(r)$ отсутствует. Решение задачи сводится к нахождению двух неизвестных функций – относительного сдвига в заполнителе $\psi(r)$ и прогиба пластины $w(r)$. На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев.

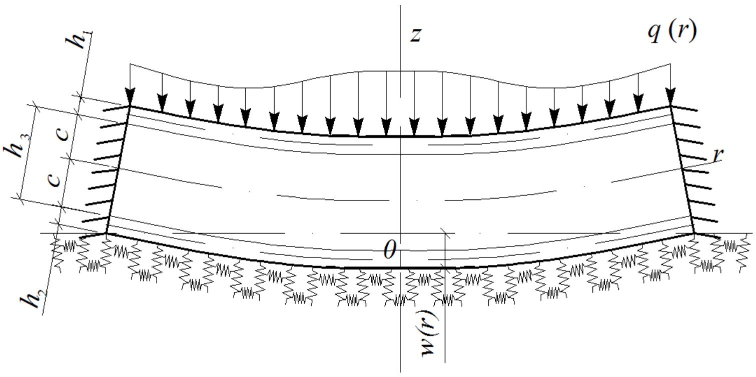

Рис. 1. Схема деформирования сэндвич-пластины в случае жесткой заделки контура

Осесимметричная нагрузка $q(r)$ распределена по верхнему слою пластины, реакция основания согласно модели Пастернака будет [14]:

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \tag{1}$$

где κ_0 – коэффициент сжатия; t_f – коэффициент сдвига материала основания; Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d w}{d r}.$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, с учетом выражения (1), получена с помощью вариационного принципа Лагранжа в [12]:

$$\begin{aligned} &M_r^{(3)},_r + \frac{1}{r}(M_r^{(3)} - M_\varphi^{(3)}) = 0, \\ &M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q, \end{aligned} \tag{2}$$

где обобщенные внутренние моменты M_α, $M_\alpha^{(3)}$ ($\alpha = r, \varphi$) будут

$$M_r = \left[2cK_1^+ h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\right]\psi,_r + \left[2cK_1^- h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-\right]\frac{\psi}{r} -$$

$$-\left[2K_1^+ h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\right]w,_{rr} - \left[2K_1^- h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-\right]\frac{w,_r}{r},$$

$$M_r^{(3)} = \int_{-c}^{c}\left[K_3^+(z\psi,_r - zw,_{rr}) + \frac{1}{r}K_3^-(z\psi - zw,_r)\right]z\, d z,$$

$$M_\varphi = \left[2cK_1^- h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-\right]\psi,_r + \left[2cK_1^+ h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\right]\frac{\psi}{r} -$$

$$-\left[2K_1^- h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-\right]w,_{rr} - \left[2K_1^+ h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^+\right]\frac{w,_r}{r},$$

$$M_\varphi^{(3)} = \int_{-c}^{c}\left[K_3^-(z\psi,_r - zw,_{rr}) + \frac{1}{r}K_3^+(z\psi - zw,_r)\right]z\, d z.$$

Силовые граничные условия на контуре сэндвич-пластины ($r = R$):

$$M_r^{(3)} = M_r^{(3)0}, \;\; M_r = M_r^0, \;\; M_r,_r + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0, \tag{3}$$

где M_r^0, $M_r^{(3)0}$, Q^0 – заданные внешние контурные усилия.

После подстановки обобщенных внутренних моментов M_α, $M_\alpha^{(3)}$ ($\alpha = r, \varphi$), выраженных через искомые функции в (2), с учетом реакции основания (1), получена в перемещениях следующая система уравнений равновесия, описывающая изгиб круговой упругой сэндвич-пластины на двухпараметрическом основании Пастернака:

$$\mathrm{L}_2(a_1\psi - a_2 w,_r) = 0,$$
$$\mathrm{L}_3(a_2\psi - a_3 w,_r) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q, \tag{4}$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 следующие

$$a_1 = c^2\left(2h_1K_1^+ + \tfrac{2}{3}cK_3^+\right),\quad a_2 = c\left[2h_1\left(c+\tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + \tfrac{2}{3}c^2K_3^+\right],\quad a_3 = 2h_1\left(c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ + \tfrac{2}{3}c^3K_3^+,$$

$$K_k^+ \equiv K_k + \tfrac{4}{3}G_k,\quad K_k^- \equiv K_k - \tfrac{2}{3}G_k,$$

$$\mathrm{L}_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2},\quad \mathrm{L}_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(r\mathrm{L}_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевая задача по определению перемещений замыкается присоединением к (4) силовых (3) или кинематических граничных условий ($r = R$):

– в случае жесткой заделки контура пластины
$$\psi = 0,\ \ w = 0,\ \ w,_r = 0; \tag{5}$$
– при шарнирном опирании контура
$$\psi = 0,\ \ w = 0,\ \ M_r = 0; \tag{6}$$
– при свободном контуре
$$\psi = 0,\ \ M_r = 0,\ \ M_{r,r} = 0. \tag{7}$$

2. Решение краевой задачи. Выполнив ряд преобразований, перепишем систему (4) в виде:

$$\psi = \frac{a_2}{a_1}w,_r + C_1 r + \frac{C_2}{r},$$
$$w,_{rrrr} + \frac{2}{r}w,_{rrr} - \frac{1}{r^2}w,_{rr} + \frac{1}{r^3}w,_r - t_f D(w,_{rr} + \frac{1}{r}w,_r) + \kappa_0 D w = qD, \tag{8}$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования, определяемые из граничных условий (5) – (7);

$$D = \frac{a_1}{a_3 a_1 - a_2^2}.$$

Процедура решения системы уравнений (8) подробно рассмотрена в [12]. В нашем случае оно имеет вид:

$$\psi = \frac{a_2}{a_1}w,_r + C_1 r + \frac{C_2}{r};$$
$$w = C_3 J_0(\sqrt{a}\kappa r) + C_4 H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa r) + C_5 J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa r) + C_6 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}\kappa r) + w_p, \tag{9}$$

где C_3, C_4, C_5, C_6 – константы интегрирования; $J_0(\sqrt{a}\kappa r)$, $J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa r)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, комплексных аргументов $\sqrt{a}\kappa r$ и $\sqrt{\bar{a}}\kappa r$; $H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa r)$, $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}\kappa r)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов; a, $\bar{a}$ – величины, выражаемые через параметры пластины и основания; $\kappa^4 = \kappa_0 D$; w_p – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Общее решение системы дифференциальных уравнений равновесия круговой сэндвич-пластины, связанной с основанием Пастернака, с учетом ограниченности прогиба в центре пластины $C_2 = C_4 = C_6 = 0$, будет следующим

$$\psi = \frac{a_2}{a_1}w,_r + C_1 r,$$
$$w = C_3 J_0(\sqrt{a}\kappa r) + C_5 J_0(\sqrt{\bar{a}}\kappa r) + w_p. \tag{10}$$

В случае жесткой заделки контура пластины константы интегрирования C_1, C_3, C_5 определяются из граничных условий (5). В результате получаем

$$C_1=0,\;\; C_5=\frac{w_{p},_{r}(R)J_0\left(\sqrt{\bar{a}}\,\kappa R\right)+\kappa\sqrt{\bar{a}}\,J_1\left(\sqrt{\bar{a}}\,\kappa R\right)w_p(R)}{\kappa\left[\sqrt{a}J_1\left(\sqrt{a}\,\kappa R\right)J_0\left(\sqrt{\bar{a}}\,\kappa R\right)-\sqrt{\bar{a}}\,J_1\left(\sqrt{\bar{a}}\,\kappa R\right)J_0\left(\sqrt{a}\,\kappa R\right)\right]},$$
$$C_7=\frac{w_{p},_{r}(R)J_0\left(\sqrt{a}\,\kappa R\right)+\kappa\sqrt{a}\,J_1\left(\sqrt{a}\,\kappa R\right)w_p(R)}{\kappa\left[\sqrt{\bar{a}}\,J_1\left(\sqrt{\bar{a}}\,\kappa R\right)J_0\left(\sqrt{a}\,\kappa R\right)-\sqrt{a}J_0\left(\sqrt{\bar{a}}\,\kappa R\right)J_1\left(\sqrt{a}\,\kappa R\right)\right]}. \qquad (11)$$

Таким образом, система (10) с константами интегрирования (11) дает рекуррентное решение задачи для рассматриваемой пластины при произвольной осесимметричной нагрузке.

3. Численный параметрический анализ. Численные результаты получены для защемленной по контуру трехслойной пластины единичного радиуса $R=1$ м, связанной с двухпараметрическим основанием Пастернака. Для основания приняты следующие параметры: κ_0 = 100 МПа/м, t_f = МПа·м. Величина интенсивности поверхностной равномерно распределенной нагрузки $q_0=1$МПа. Базовой является пластина, материалы несущих слоев которой набраны из дюралюминиевого сплава (Д16Т), заполнитель – фторопласт-4, толщины слоев $h_1=h_2=0{,}04$ м, $h_3=0{,}4$ м. Механические характеристики этих и других материалов, используемых далее, заимствованы из [15]: Д16-Т – $G=0{,}267\cdot10^5$ МПа, K = $0{,}8\cdot10^5$ МПа; нитридкремниевая конструкционная керамика (НКККМ) – G = $5{,}85\cdot10^5$ МПа, K = $12{,}7\cdot10^5$ МПа; кордиерит – $G=2{,}58\cdot10^5$ МПа, $K=5{,}58\cdot10^5$ МПа; титан – G = $0{,}41\cdot10^5$ МПа, K = $1{,}04\cdot10^5$ МПа; политетрафторэтилен (фторопласт-4) – G = 90 МПа, K = 345 МПа; пенополиуретан – G = 4,5 МПа, K = 11,765 МПа; пенопласт – G = 11,8 МПа, K = 55 МПа.

Влияние материала заполнителя на прогиб пластины и сдвиг в заполнителе оказалось несущественным, кривые практически совпадали. Значительный эффект выбор материала заполнителя оказывает на изменение тангенциальных $\sigma_{rz}^{(3)}$ – (*а*) и радиальных $\sigma_r^{(3)}$ – (*б*) напряжений в заполнителе на склейке с верхним слоем ($z=c$) (рис. 2): *1* – пенополиуретан, *2* – пенопласт, *3* – фторопласт-4. При замене фторопласта-4 на пенопласт тангенциальные напряжения уменьшаться на 87 %, при использовании пенополиуретана – на 95 %, что объясняется уменьшением упругих модулей этих материалов.

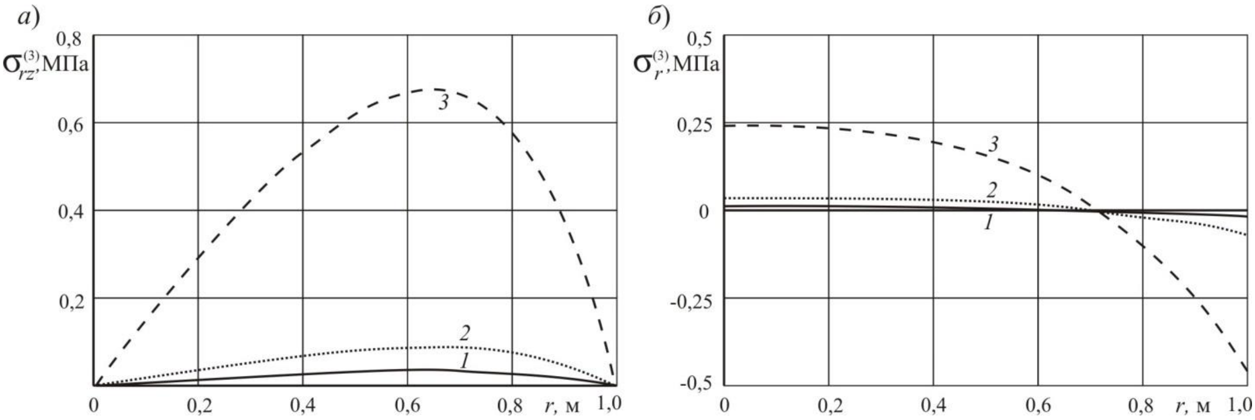

Рис. 2. Изменение тангенциальных $\sigma_{rz}^{(3)}$ и радиальных напряжений $\sigma_r^{(3)}$ вдоль радиуса пластины при различных материалах заполнителя

Зависимость прогиба пластины (*а*) и сдвига в заполнителе (*б*) от жесткости материала несущих слоев показана на рисунке 3: *1* – Д16Т–фторопласт-4–Д16Т, *2* – титан–фторопласт-4–титан, *3* – кордиерит–фторопласт-4–кордиерит, *4* – НКККМ–фторопласт-4–НКККМ. Если несущие слои выполнены из титана, то прогиб уменьшается на 13 %, если из кордиерита – на 72 %, из НККМ – на 86 %.

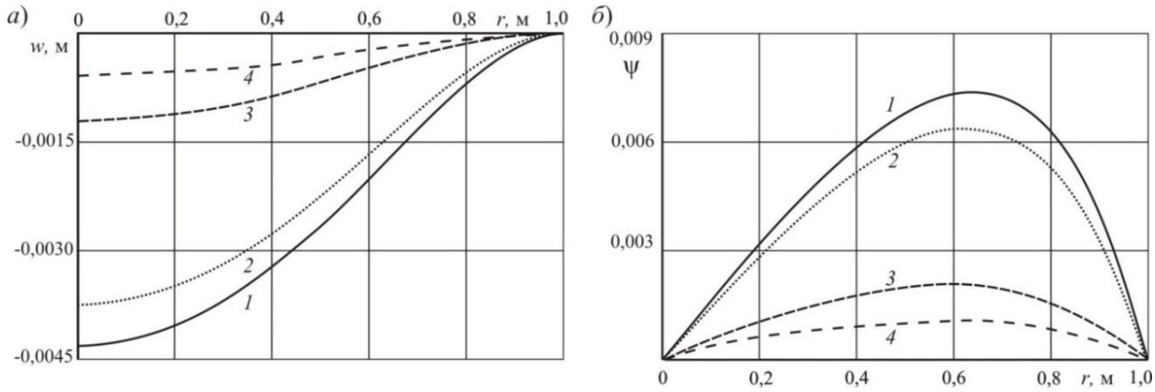

Рис. 3. Изменение прогиба w и сдвига в заполнителе ψ вдоль радиуса пластины

Также для подобных трехслойных пакетов проведено исследование изменения радиальных напряжений $\sigma_r(z)$ по толщине пластины на ее контуре (а) и в центре (б) (рис. 4), нумерация кривых прежняя.

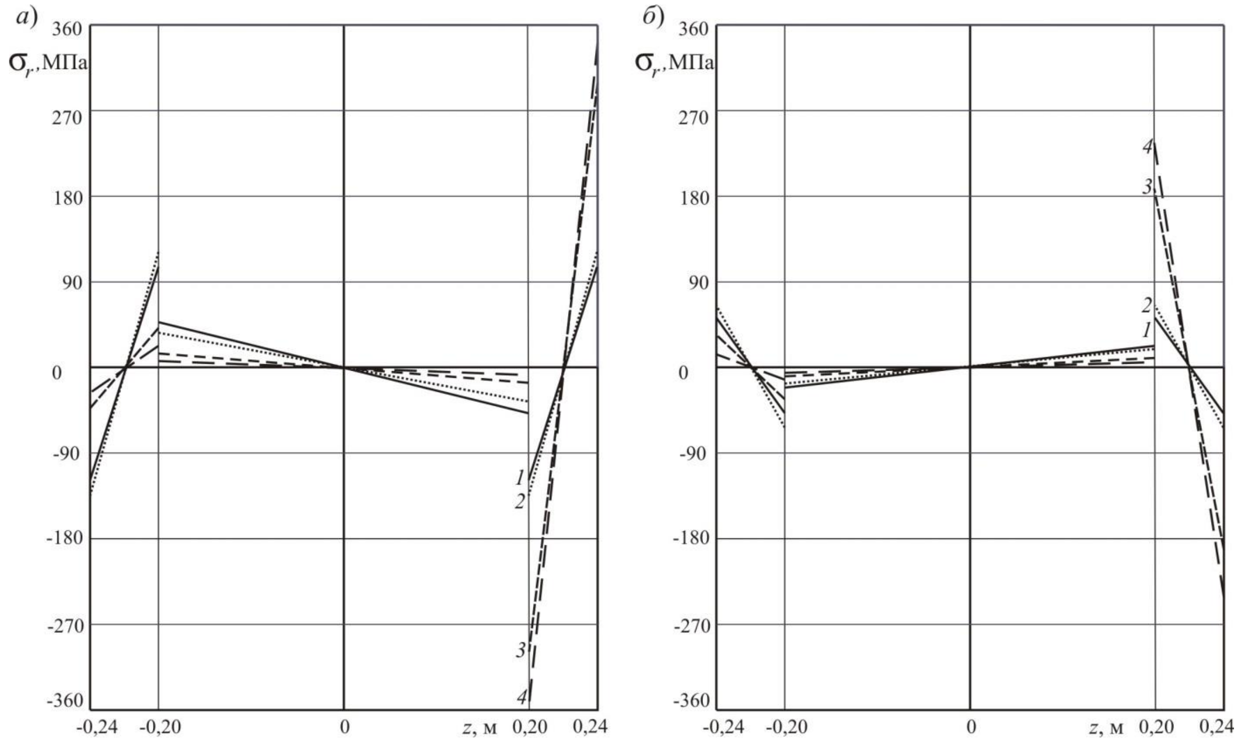

Рис. 4. Изменение радиальных напряжений σ_r по толщине пластины

Выводы. Для всех пакетов графики напряжений симметричны относительно срединной поверхности заполнителя в силу симметрии пластины по толщине. При этом напряжения в несущих слоях больше в титановом сплаве от 11 % (*а*) до 19 % (*б*), в заполнителе они уменьшаются от 8,5 % (*б*) до 18 % (*а*).

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (*проект № Т19РМ-089*).

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э. И. Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко // – Минск: Бел. навука, 2017. – С. 275.

2. Зеленая, А. С. Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2017. – № 6(105). – С. 89–95.

3. Захарчук, Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – Т. 33, № 4. – С. 53–57.

4. Нестерович, А. В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научн.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.

5. Starovoitov, E. I. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, No 5. – P. 561–570.

6. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

7. Леоненко, Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. − 2014. − № 1. − С. 59−63.

8. Sobhy, M. Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions / M. Sobhy // Composite Structures. – Vol. 99. – 2013. – P. 76–87.

9. Nonlinear vibration and dynamic buckling analyses of sandwich functionally graded porous plate with graphene platelet reinforcement resting on Winkler–Pasternak elastic foundation / Q. Li [et al.] // International Journal of Mechanical Sciences. – 2018. – Vol. 148. – P. 596–610.

10. Старовойтов, Э. И. Влияние жесткости основания Пастернака на деформирование круговой трехслойной пластины / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2019. – № 2. – С. 106–113.

11. Старовойтов, Э. И. Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 1. – С. 392–406.

12. Козел, А. Г. Влияние сдвиговой жесткости основания на напряженное состояние сэндвич-пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6(332). – С. 25–35.

13. Козел, А. Г. Нелинейный изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2020. – Вып. 35. – С. 106–113.

14. Пастернак, П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак // М.: Госстройиздат. – 1954. – С. 56.

15. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Москва: Физматлит, 2006. – С. 379.

Поступила: 02.02.2021