

ДИНАМИКА СЛОИСТЫХ БАЛОК СОДЕРЖАЩИХ ЭЛЕКТРОРЕОЛОГИЧЕСКИЙ КОМПОЗИЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

Ботогова М. Г., Михиевич А. П., Михасев Г. И.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Тонкие слоистые композитные балки, пластины и оболочки широко используются в различных областях современной техники. Образованные из слоистых композитных тонкостенных оболочкоподобных элементов конструкции сочетают в себе легкость с высокой прочностью, что объясняет широкое применение их в судостроении, авиа- и ракетостроении, машиностроении, в промышленном строительстве и других областях [1]. Применение новых полимерных материалов, таких как электрореологические композиты (ЭРК) с управляемыми упругими и вязко-пластичными свойствами на основе нано- и ультрадисперсных наполнителей, дало мощный толчок для активизации исследований и разработок по их применению в задачах демпфирования различных тонкостенных конструкций [2–7].

ЭРК относятся к классу так называемых «интеллектуальных материалов», которые демонстрируют практически мгновенную реакцию (несколько миллисекунд), меняя свои вязкоупругие свойства на приложенное электрическое поле. Оптимальное сочетание тонких относительно жестких слоев, выполненных из традиционных упругих изотропных материалов с вязкоупругими «мягкими» слоями ЭРК, является ключевой идеей при моделировании «умных» слоистых тонкостенных конструкций с управляемыми жесткостными и демпфирующими характеристиками.

Применение ЭРК в качестве наполнителей в слоистых конструкциях позволяет осуществлять мягкое гашение бегущих вибраций [8], а также управлять жесткостными характеристиками конструкции посредством изменения магнитного поля и увеличивать более чем на 50 % их несущую способность [9, 10]. Приложенное электрическое поле может очень сильно искажать формы собственных колебаний и, соответственно, влиять на спектр собственных частот конструкции.

Электрореологические композитные материалы. Композитные электрореологические материалы, чаще электрореологические жидкости (ЭРЖ), представляют собой суспензию диэлектрических частиц разной концентрации в вязкой среде [11, 12]. Данные материалы могут менять свои реологические свойства под действием электрического поля. Некоторые ЭРЖ с высокой концентрацией диэлектрических частиц под действием электрического поля показывают вязкоупругие свойства очень близкие к свойствам МРЭ. Подобные высоконцентрированные «умные» жидкости часто называются электрореологическими композитами (ЭРК).

Рассмотрим электрореологический композит ЭРК, полученный в ИТМО [12]. ЭРК – высоконцентрированная электрореологическая жидкость, состоящая из частиц гетита (45 %), трансформаторного масла (51 %) и глицерина моноолеата (4 %).

Пусть – комплексный модуль сдвига ЭРК,

$$G = G' + iG'', \quad (1)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, а $G' = \text{Re } G$ и $G'' = \text{Im } G$ – вещественная и мнимые части модуля G , называемые модулем накопления и модулем потерь, соответственно. Как видно, модули проявляют сильную зависимость от напряженности электрического поля ε .

Вязкоупругие свойства данного материала строго зависят от температуры. На рисунке 1 приведены основные характеристики композита от напряженности электрического поля ε при различных значениях температуры $T = 0, 40, 60, 100$ °С.

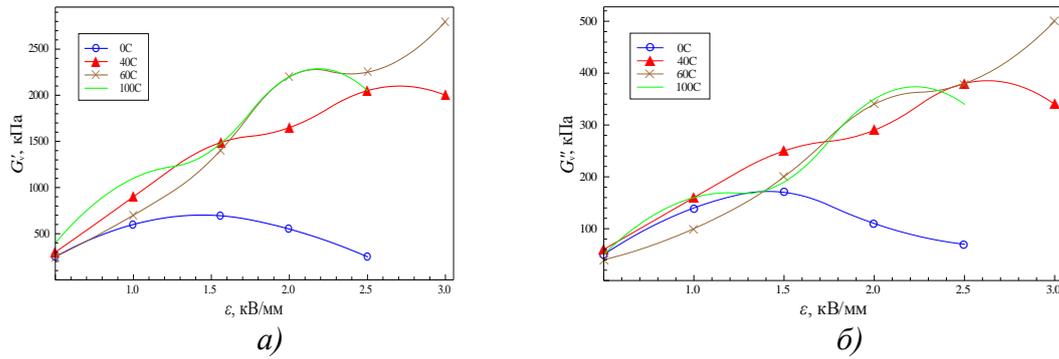


Рис. 1. Влияние напряженности электрического поля при различных температурах композита: а) на модуль сдвига электрореологического композита ЭРК; б) на модуль потерь электрореологического композита ЭРК

Свободные колебания слоистых балок, содержащих ЭРК. Рассмотрим многослойную балку, состоящую из N слоев. Для начала рассматриваем случай, когда все слои изготовлены из упругих материалов. Также, предполагается, что балка сжимается или растягивается осевой силой F^o и/или опирается на упругое основание с коэффициентом постели c_f . В общем случае F^o, ρ_1, c_f могут быть функциями координаты α_1 ($0 \leq \alpha_1 \leq L$). Здесь применяем теорию Григolloка-Куликова [13]. Принимая во внимание реакцию упругого основания и зависимость осевой силы от α_1 , уравнение, определяющее динамику многослойной балки, можно записать в виде:

$$EI\eta_3 \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \frac{\partial^4 \chi}{\partial \alpha_1^4} - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[F^o \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \right] \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1} + c_f \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \chi + \rho_1 \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где E – приведенный модуль Юнга; β, θ – параметры сдвига; c_f – коэффициент постели упругого основания Винклера.

В соответствии с принимаемой теорией исходная слоистая оболочка заменяется так называемой «эквивалентной» однослойной трансверсально изотропной оболочкой толщиной h с приведенными модулями Юнга E и сдвига G , а также коэффициентом Пуассона ν , которые вводятся следующим образом:

$$E = \frac{1-\nu^2}{h} \left(\sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu^2} \right), \quad \nu = \sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k \nu_k}{1-\nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \right)^{-1}, \quad (3)$$

$$\beta = \frac{12(1-\nu^2)q_{44}}{E h \eta_1}, \quad \theta = 1 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1 \eta_3}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
q_{44} &= \frac{\left[\sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{kk} \right) \right]^2}{\sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{kk} \right) G_k^{-1}} + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} G_k, \\
\lambda_k &= \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_0^2(z) dz, \quad \lambda_{kn} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_k(z) f_n(z) dz \quad (n=0, k), \\
\eta_1 &= \sum_{k=1}^N \frac{\pi_{1k} \gamma_k}{\xi_k} - 3c_{12}^2, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^N \frac{\pi_{2k} \gamma_k}{\xi_k} - 3c_{12} c_{13}, \quad \eta_3 = 4 \sum_{k=1}^N (\xi_k^2 + 3\zeta_{k-1} \zeta_k) \gamma_k - 3c_{13}^2, \\
h\xi_k &= h_k, \quad h\zeta_n = \delta_n \quad (n=0, k), \\
c_{12} &= \sum_{k=1}^N \xi_k^{-1} \pi_{3k} \gamma_k, \quad c_{13} = \sum_{k=1}^N (\zeta_{k-1} + \zeta_k) \gamma_k \delta_0 = -h_1 - \frac{1}{2} h_2, \\
\pi_{1k} &= \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g^2(z) dz, \quad \pi_{2k} = \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} z g(z) dz, \quad \pi_{3k} = \frac{12}{h^3} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} g(z) dz.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $G = q_{44} / h$ – приведенный модуль сдвига [14]; $f_n(z)$ – непрерывные на каждом слое функции, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned}
f_0(z) &= \frac{1}{h^2} (z - \delta_0)(\delta_N - z) \quad \text{если } z \in [\delta_0, \delta_N], \\
f_k(z) &= \frac{1}{h_k^2} (z - \delta_{k-1})(\delta_k - z) \quad \text{если } z \in [\delta_{k-1}, \delta_k], \\
f_k(z) &= 0 \quad \text{если } z \notin [\delta_{k-1}, \delta_k],
\end{aligned} \tag{6}$$

а δ_n – координаты внешних и интерфейсных поверхностей, отсчитываемые от исходной поверхности. Например, для трехслойной оболочки (сэндвича) имеем, $\delta_0 = -h_1 - \frac{1}{2} h_2$, $\delta_1 = -\frac{1}{2} h_2$, $\delta_2 = \frac{1}{2} h_2$, $\delta_3 = h_3 + \frac{1}{2} h_2$. Заметим, что функции $f_n(z)$ могут быть введены иначе, например через полиномы Лежандра.

Пусть края балки шарнирно оперты. Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$\chi = \chi'' = \chi^{IV} = 0 \quad \text{при } \alpha_1 = 0, L. \tag{7}$$

Если все параметры, включая F^o , ρ_0 , c_f являются постоянными, то решение уравнения (2) удовлетворяющее граничным условиям (7) имеет простую форму

$$\chi = \chi_0 \sin \frac{\pi n \alpha_1}{L} e^{i\omega t}, \tag{8}$$

где L – длина балки; n – число волн; ω – собственная частота.

Подстановка (8) в (2) приводит к простой формуле для собственной частоты:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\rho_l}} \sqrt{\frac{EI \eta_3 \pi^4 n^4 (1 + \theta Kn^2)}{L^4 (1 + Kn^2)} + \frac{F^o \pi^2 n^2}{L^2} + c_f}, \tag{9}$$

где $K = \frac{\pi^2 h^2}{\beta L^2}$ – параметр сдвига.

Если $F^o > 0$, то балка растягивается, а при $F^o < 0$ – сжимается. В последнем случае предполагается, что $|F^o| < F_{cr}^*$, где F_{cr}^* – критическая сила, приводящая к потере устойчивости:

$$F_{cr}^* = \max_n \left\{ \frac{\pi^2 n^2 EI \eta_3 (1 + \theta K n^2)}{L^2 (1 + K n^2)} + \frac{c_f L^2}{\pi^2 n^2} \right\}. \quad (10)$$

Увеличение растягивающего усилия F^o и/или жесткости пружины c_f приводит к росту собственных частот для любого числа n . Напротив, увеличение сжимающей силы F^o приводит к уменьшению собственных частот; при этом $\omega \rightarrow 0$, как $|N^o| \rightarrow N_{cr}^*$.

Пусть какой-либо из слоев балки изготовлен из вязкоупругого ЭРК. В этом случае параметры K, η_3, θ , фигурирующие в (5) становятся комплексными, а собственное значение (5) также становится комплексным. Пусть балка свободна от внешнего осевого усилия, а упругое основание отсутствует. Тогда (5) переписывается в виде:

$$\Omega = \Omega_n = \frac{1}{\sqrt{\rho_l}} \sqrt{\frac{EI \eta_3 \pi^4 n^4 (1 + \theta K n^2)}{L^4 (1 + K n^2)}}. \quad (11)$$

Здесь $\omega = \text{Re} \Omega$ – собственная частота колебаний, $\alpha = \text{Im} \Omega$ – декремент колебаний.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим сэндвич-балку, содержащую в качестве ядра ЭРК. Лицевые поверхности изготовлены из алюминия с модулем Юнга $E_1 = E_3 = 70,3$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu_1 = \nu_3 = 0,345$ и плотностью материала $\rho_1 = \rho_3 = 2,7 \times 10^{-6}$ кг/мм³. Модули накопления и потерь ЭРК представлены на рис. 1. Пусть $L = 0,3$ м, $b = 15$ мм и $h_1 = h_3 = 1$ мм. Результаты поставленной задачи для первой моды представлены на рис. 2.

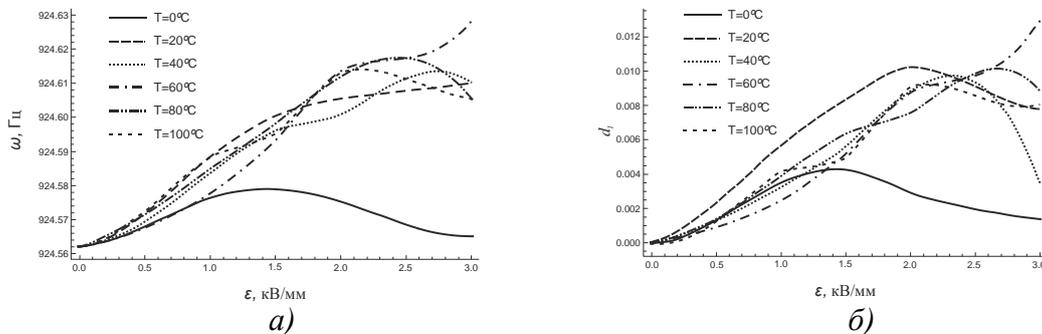


Рис. 2. Результаты для первой моды ($n = 1$) сэндвич-балки с ЭРК ядром толщиной $h_2 = 5$ мм в зависимости от напряженности электрического поля ε при различных температурах композита: а) первая собственная частота ω ; б) соответствующий логарифмический декремент

Как видно, в случае использования ЭРК в качестве чувствительного внутреннего слоя, зависимости частоты и логарифмического декремента от напряженности электрического поля становятся сложными и сильно зависят от температуры композита. Разогретый композит менее чувствителен к электрическому полю и, как следствие приложенное электрическое поле не приводит к сильному росту частот и соответствующих декрементов. Наилучший результат демонстрирует балка с композитом, разогретым до 60 °С. На всех частотах наилучшее демпфирование колебаний достигается при напряженности $\varepsilon = 3,0$ кВ/мм.

Вынужденные колебания слоистых балок, содержащих ЭРК. Рассмотрим сэндвич-балку под действием внешней периодической нагрузки

$$q_l = \rho_l A_0(x) e^{i\omega_e t}, \quad (12)$$

где ω_e – частота возбуждающей внешней силы; $A_0(x)$ – амплитуда внешней нагрузки, зависящая от координаты x ; t – время. Примем модель Григолюка-Куликова, в соответствии с которой движение балки описывается уравнением (2), в котором положим $F^o = c_f = 0$. В качестве граничных условий рассмотрим условие шарнирного опирания (8). Решение уравнения (2) с граничными условиями (8) ищем в виде

$$\chi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) q_n(t), \quad (13)$$

где $q_n(t)$ – так называемые обобщенные координаты. Подстановка ряда (13) в уравнение (2) приводит к серии дифференциальных уравнений

$$\ddot{q}_n + \Omega_n^2 q_n = \frac{2F_n}{L(1 + Kn^2)} e^{i\omega_e t}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где Ω_n – комплексная собственная частота балки, определяемая соотношением (11), а F_n – так называемая обобщенная сила, которая находится по формуле

$$F_n = \int_0^L A_0(x) \sin(\lambda_n x) dx. \quad (15)$$

Частное решение уравнения (14) при фиксированном n имеет вид:

$$q_n(t) = \frac{2F_n}{L(1 + Kn^2)(\Omega_n^2 - \omega_e^2)} e^{i\omega_e t}. \quad (16)$$

Тогда амплитуда вынужденных установившихся колебаний будет определяться формулой

$$\chi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_n}{L(1 + Kn^2)(\Omega_n^2 - \omega_e^2)} e^{i\omega_e t} \sin(\lambda_n x). \quad (17)$$

Пример 2. Рассмотрим сэндвич-балку с параметрами такими же как и в примере 1. Внутренний слой толщиной $h_2 = 12$ мм изготовлен из ЭРК. Пусть внешняя периодическая нагрузка подчиняется закону (12), амплитуда которой есть функция

$$A_0(x) = 4 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right). \quad (18)$$

На рис. 3 приведены амплитудно-частотные характеристики в диапазоне изменения частоты возбуждения $0,9 \leq \omega_e \leq 12,0$ кГц при температуре $T = 40$ °С. Пунктирная кривая 1 соответствует случаю, когда электрическое поле отсутствует, а сплошная кривая 2 – когда между лицевыми пластинками действует электрическое поле напряженности $\varepsilon = 2$ кВ/мм. При этом, на рис. 3, а показаны резонансные пики на первой частоте, а на рис. 3, б – участки кривых, включающие резонансы на 2–5 частотах. Значения амплитуд колебаний масштабированы с одинаковым масштабом для обоих случаев, когда $\varepsilon = 0$ кВ/мм и $\varepsilon = 2$ кВ/мм.

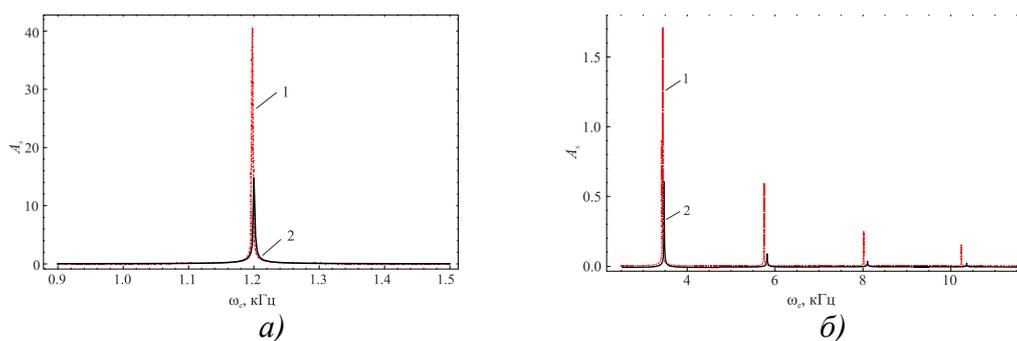


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика для сэндвич-балки, содержащей ЭРК ядро при температуре 40 °С для двух случаев: пунктирная линия 1 – напряженность электрического поля отсутствует; сплошная линия 2 – приложено электрическое поле напряженности $\varepsilon = 2$ кВ/мм, в разных диапазонах изменения частоты вынужденных колебаний; а) от 0,90 до 1,50 кГц; б) от 2,00 до 12,00 кГц

Выводы. Электрическое поле слабо влияет на значения первых собственных частот, и лишь для мод с номерами $n=3$ и выше наблюдается эффект смещения кривых вправо. Что касается сжатия амплитуды вынужденных колебаний, то данный эффект зависит от напряженности электрического поля, температуры композита и номера моды. Например, при $T = 40^\circ\text{C}$, $\varepsilon = 2$ кВ/мм наилучший эффект сжатия наблюдается на третьей моде ($n = 3$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Librescu, L. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey / L. Librescu, T. Hause // *Journal of Composite Structures*. – 2000. – Vol. 48. – P. 1–17.
2. Li, Y. A state-of-the-art review on magnetorheological elastomer devices / Y. Li [et al.] // *Smart Materials and Structures*. – 2014. – № 23(12). – P. 123001.
3. Shaw, J. S. Design and control of adaptive vibration absorber for multimode structures / J. S. Shaw, C. A. Wang // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2019. – № 30(7). – P. 1043–1052.
4. Mikhasev, G. I. Thin-Walled Laminated Structures: Buckling, Vibrations and Their Suppression / G. I. Mikhasev, H. Altenbach // Berlin: Springer, 2019. – P. 280.
5. Korobko, E. V. On Damping Vibrations of Three Layered Beam Containing Magnetorheological / E. V. Korobko [et al.] // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2012. – Vol. 23(9). – P. 1019–1023.
6. Korobko, E. V. Investigation of Elasticity of Magneto-sensitive Adaptive Materials for Laminated Composite Structures / E. Korobko [et al.] // *Mechanika*. – 2014. – Vol. 20, № 5. – P. 466–470.
7. Farshad, M. Magnetoactive elastomer composites / M. Farshad, A. Benine // *Journal of Polymer Testing*. – 2004. – Vol. 23. – P. 347–53.
8. Mikhasev, G. Soft Suppression of Traveling Localized Vibrations in Medium-Length Thin Sandwich-Like Cylindrical Shells Containing Magnetorheological Layers via Nonstationary Magnetic Field / G. Mikhasev, I. Mlechka, H. Altenbach // *Dynamical Systems: Theoretical and Experimental Analysis* (ed.: J. Awrejcewicz), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer International Publishing Switzerland. – 2016. – Vol. 182. – P. 241–260.
9. Mikhasev, G. I. On influence of boundary conditions and transverse shear on buckling of thin laminated cylindrical shells under external pressure / G. I. Mikhasev, I. R. Mlechka // *Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering*. – 2014. – Vol. 12, No. 2. – P. 95–106.

10. Mikhasev, G.I. Effect of edge shears and diaphragms on buckling of thin laminated medium-length cylindrical shells with low effective shear modulus under external pressure / G. I. Mikhasev, M. G. Botogova // *Acta Mechanica* – 2017. – Vol. 228 (6). – P. 2119–2140.
11. Hao, T. Mechanism of the electrorheological effect: evidence from the conductive, dielectric, and surface characteristics of water-free electrorheological fluids / T. Hao, A. Kawai, F. Ikazaki // *Langmuir*. – 1998. – Vol. 14, № 5. – P. 1256–1262.
12. Zhurauski, M. A. Mechanical Properties of Smart Fluids under Combined Electric and Magnetic Fields / M. A. Zhurauski [et al.] // *Mechanika*. – 2008. – Vol. 6, № 74. – P. 21–24.
13. Григолюк, Э. И., Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов // Москва: Машиностроение, 1988. – С. 288.
14. Mikhasev, G. I. Equivalent Single Layer Model for Thin Laminated Cylindrical Shells / G. I. Mikhasev, H. Altenbach // *Thin-walled Laminated Structures. Advanced Structured Materials*, Springer. – 2019. – Vol. 106 – P. 29–84.

Поступила: 18.02.2021