

НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

Нестерович А. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. В настоящее время в различных областях машиностроения и строительства, судостроения широко используются многослойные элементы конструкций. Поэтому, для прочностных расчетов актуальным становится создание соответствующих механико-математических моделей. Постановки соответствующих краевых задач и методы расчета приведены в монографиях [1, 2]. Результаты, связанные с осесимметричными колебаниями круговых элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [3, 4]. Аналитические решения получены методом разложения в ряд по собственным функциям. Постановки и методики решения краевых задач об изотермическом квазистатическом деформировании, в том числе циклическом, упругопластических слоистых оболочек, стержней и пластин приведены в [5–8]. Термосиловое нагружение трехслойных пластин и оболочек исследовалось в работах [9–11]. Кинематика моделей основана на гипотезе ломаной линии. Аналитические результаты по неосесимметричному деформированию упругих круговых трехслойных пластин в своей плоскости приведены в статьях [12–16].

Здесь приведена постановка краевой задачи о термосиловом деформировании упругопластической трехслойной пластины в своей плоскости при неосесимметричном нагружении.

1. Постановка задачи. Рассматривается физически нелинейная трехслойная круговая пластина с несжимаемым наполнителем. Постановка задачи и ее решение проводится в полярной системе координат r, φ, z , которая связывается со срединной плоскостью наполнителя. К срединной плоскости наполнителя приложена непрерывно распределенная неосесимметричная нагрузка, проекции которой на соответствующие оси координат: $p_r(r, \varphi), p_\varphi(r, \varphi)$. Предполагается, что в процессе деформирования материалов несущих слоев могут проявлять упругопластические свойства, наполнитель – нелинейно упругий. Учтено воздействие температурного поля. Под действием нагрузки в пластине возникают радиальные $u_r(r, \varphi)$ и тангенциальные $u_\varphi(r, \varphi)$ перемещения.

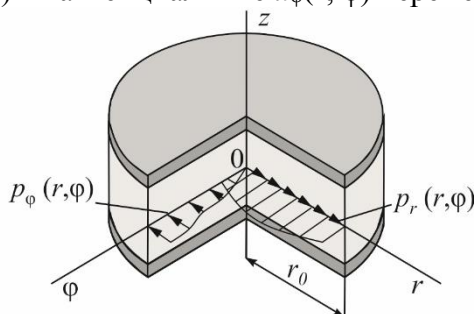


Рис. 1. Расчетная схема деформирования пластины

Физические уравнения состояния соответствуют теории малых упругопластических деформаций Ильюшина с учетом температурного воздействия [1]:

$$\begin{aligned}
 s_{\alpha\beta}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \left(1 - \omega_k(\varepsilon_{ii}^{(k)}, T_k) \right) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}, \\
 \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} &= 3K_k(T_k) \left(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} - \alpha_0^{(k)} T_k \right) \quad (\alpha, \beta = r, \varphi; k = 1, 2, 3),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $s_{\alpha}^{(k)}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций, k – номер слоя; $s_{\alpha\beta}^{(k)}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – термозависимые сдвиговой и объемный модули упругости материалов; $\alpha_0^{(k)}$ – коэффициент линейного температурного расширения; T_k – приращение температуры в k -м слое; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$ – функции пластичности и физической нелинейности материалов несущих слоев, которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ необходимо положить равными нулю; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -ом слое ($k=1, 2$); $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материалов несущих слоев.

В рассматриваемом случае будет справедлива система уравнений равновесия во внутренних усилиях [16], т. к. при их выводе не были использованы физические уравнения связи напряжений с деформациями:

$$\begin{cases} T_{rr,r} + \frac{1}{r}(T_{r\varphi,\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) = -p_r, \\ T_{r\varphi,r} + \frac{1}{r}(T_{\varphi\varphi,\varphi} + 2T_{r\varphi}) = -p_{\varphi}, \end{cases} \quad (2)$$

где $T_{\alpha\beta}$ – обобщенные внутренние усилия ($\alpha, \beta = r, \varphi$); запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Выразив обобщенные усилия в (2) через деформации с помощью уравнений (1), а затем деформации через перемещения, получим систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений. Ее точное решение получить не представляется возможным, поэтому необходимо применять численные или приближенные методы.

Алгоритм решения основан на методе упругих решений Ильюшина, который позволяет на каждом шаге приближения сводить рассматриваемую задачу для физически нелинейной пластины к соответствующей краевой задаче для упругой пластины.

Для реализации метода выделим линейную (индекс «e»), нелинейную (индекс «n») и температурную (индекс «t») составляющие в компонентах тензора напряжений (1):

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)} - \sigma_t^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)}. \quad (3)$$

Составляющие напряжений в (3) выражаются через деформации следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} &= 2G_k(T_k)\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k(T_k)\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)}, \\ \sigma_{r\varphi e}^{(k)} &= s_{r\varphi}^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{r\varphi}^{(k)}, \quad \sigma_{r\varphi\omega}^{(k)} = s_{r\varphi}^{(k)} = 2G_k(T_k)\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)\varepsilon_{r\varphi}^{(k)}, \\ \sigma_t^{(k)} &= 3K_k(T_k)\alpha_0^{(k)}T_k, \quad (\alpha, \beta = r, \varphi; k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4)$$

Внутренние силы в пластине, используя соотношения (4), также представим в виде разности линейной, нелинейной и температурной частей:

$$T_{\alpha\beta}^{(k)} = \int_{h_k} \sigma_{\alpha\alpha e}^{(k)} dz - \int_{h_k} \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)} dz - \int_{h_k} \sigma_t^{(k)} dz = T_{\alpha\beta e}^{(k)} - T_{\alpha\beta\omega}^{(k)} - T_t^{(k)}\delta_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = r, \varphi), \quad (5)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символы Кронекера.

Составляющие внутренних усилий в (5) определяются следующим образом

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &\equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta\omega}^{(k)} - \delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^3 T_t^{(k)} = T_{\alpha\beta e} - T_{\alpha\beta\omega} - \delta_{\alpha\beta} T_t = \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta e}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta\omega}^{(k)} dz - 3\delta_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} K_k(T_k)\alpha_0^{(k)}T_k dz. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив усилия (6) в уравнения равновесия (2), получим систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях физически нелинейной круговой трехслойной пластины:

$$\begin{cases} T_{rre,r} + \frac{1}{r}(T_{r\varphi e,\varphi} + T_{rre} - T_{\varphi\varphi e}) = -p_r + p_{r\omega}; \\ T_{r\varphi e,r} + \frac{1}{r}(T_{\varphi\varphi e,\varphi} + 2T_{r\varphi e}) = -p_\varphi + p_{\varphi\omega}. \end{cases} \quad (7)$$

В левой части уравнений (7), которая содержит линейные составляющие обобщенных внутренних усилий, нижний индекс «e» в дальнейшем писать не будем для удобства. Нелинейные добавки вынесены вправо (индекс «ω»), температурные добавки отсутствуют:

$$\begin{aligned} p_{r\omega} &= T_{rr\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\varphi\omega,\varphi} + T_{rr\omega} - T_{\varphi\varphi\omega}), \\ p_{\varphi\omega} &= T_{r\varphi\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{\varphi\varphi\omega,\varphi} + 2T_{r\varphi\omega}). \end{aligned} \quad (8)$$

На контуре пластины $r = r_0$ должны выполняться силовые условия:

$$T_{rr} = T_{rr}^0 + T_{rr\omega} + T_t, \quad T_{r\varphi} = T_{r\varphi}^0 + T_{r\varphi\omega}.$$

где $T_{rr}^0, T_{r\varphi}^0$ – заданные внешние контурные усилия.

2. Уравнения равновесия в перемещениях. Система дифференциальных уравнений в перемещения для круговой физически нелинейной трехслойной пластины при неосесимметричном нагружении в своей плоскости следует из (7), после подстановки в нее линейных внутренних усилий, выраженных через перемещения [16]:

$$\begin{aligned} L_2(u_r) + \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r,\varphi\varphi} + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi,\varphi x} - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi,\varphi} &= \frac{r_0^2}{a_1} (-p_r + p_{r\omega}), \\ L_2(u_\varphi) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r,x\varphi} + \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r,\varphi} &= \frac{r_0^2}{a_3} (-p_\varphi + p_{\varphi\omega}), \end{aligned} \quad (9)$$

где a_i – коэффициенты, определяющиеся через геометрические и упругие характеристики материалов слоев

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left(K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) dz, \quad a_2 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \left(K_k(T_k) - \frac{2}{3} G_k(T_k) \right) dz, \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k(T_k) dz;$$

L_2 – дифференциальный оператор

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{x} (xg)_{,x} \right)_{,x} \equiv g_{,xx} + \frac{g_{,x}}{x} - \frac{g}{x^2};$$

x – безразмерная радиальная координата, определяемая отношением радиуса в i -той точке к радиусу пластины

$$x = r/r_0.$$

Краевая задача для круговой физически нелинейной трехслойной пластины при неосесимметричном нагружении замыкается добавлением к уравнениям (9) силовых (7) или кинематических граничных условий на контуре ($x = 1$) – радиальные и тангенциальные перемещения равны нулю и условий ограниченности решения в центре пластины ($x = 0$).

Заметим, температура в явном виде в уравнения (9) не входит, она учитывается своим влиянием на величину модулей упругости материалов слоев и содержится в граничном условии.

В силу физических уравнений состояния (1) система дифференциальных уравнений (9) является нелинейной. В связи с этим получить ее аналитическое решение в конечном виде не представляется возможным. Для решения системы (9) необходимо применить приближенные или численные методы.

В нашем случае, применим метод последовательных приближений, опирающийся на метод упругих решений Ильюшина. Он позволяет на каждом шаге итерации сводит решение нелинейной системы дифференциальных уравнений к решению соответствующей линейной системы с дополнительными «внешними» нагрузками.

Система (7) согласно методу упругих решений переписывается в итерационном виде

$$L_2(u_r^{(n)}) + \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r,\varphi\varphi}^{(n)} + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi,\varphi x}^{(n)} - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi,\varphi}^{(n)} = \frac{r_0^2}{a_1} (-p_r + p_{r\varphi\omega}^{(n-1)}),$$

$$L_2(u_\varphi^{(n)}) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r,\varphi\varphi}^{(n)} + \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi,\varphi\varphi}^{(n)} + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r,\varphi}^{(n)} = \frac{r_0^2}{a_3} (-p_\varphi + p_{\varphi\omega}^{(n-1)}),$$

где n – номер приближения; $p_{r\varphi\omega}^{(n-1)}$, $p_{\varphi\omega}^{(n-1)}$ – дополнительные «внешние» нагрузки, которые на первом шаге итерации принимаются равными нулю, в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения с помощью (8)

$$p_{r\varphi\omega}^{(n-1)} = T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} r + \frac{1}{r} (T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} r_\varphi + T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\varphi\omega}^{(n-1)}),$$

$$p_{\varphi\omega}^{(n-1)} = T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} r_\varphi + \frac{1}{r} (T_{\varphi\varphi\omega}^{(n-1)} r_\varphi + 2T_{r\varphi\omega}^{(n-1)}).$$

Здесь

$$T_{\alpha\alpha\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\alpha\omega}^{(k)(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\alpha\omega}^{(k)(n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k(T_k) \omega_k(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T_k) \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)(n-1)} dz,$$

$$T_{r\varphi\omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{r\varphi\omega}^{(k)(n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{r\varphi\omega}^{(k)(n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k(T_k) \omega_k(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T_k) \varepsilon_{r\varphi}^{(k)(n-1)} dz.$$

Таким образом, на каждом шаге приближения имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными «внешними» нагрузками.

Выводы. Предложенная постановка краевой задачи позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойной физически нелинейной круговой пластины под действием неосесимметричных нагрузок, действующих в ее плоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т19РМ-089).

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавков, М. А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011. – С. 540.
2. Старовойтов, Э. И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск: Бел. Навука, 2017. – С. 275.
3. Горшков, А. Г. Гармонические колебания трехслойной цилиндрической вязкоупругопластической оболочки / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая // Прикладная механика. – 2001. – № 9. – С. 100–107.
4. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

5. Москвитин, В. В. Деформация и переменные нагрузки двухслойных металлополимерных пластин / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // *Механика композитных материалов*. – 1985. – № 3. – С. 267–273.
6. Старовойтов, Э. И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2001. – № 4. – С. 37–40.
7. Козел, А. Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, заземленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2018. – Вып. 33. – С. 318–323.
8. Старовойтов, Э. И. Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2018. – № 4. – С. 88–97.
9. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2016. – № 1. – С. 91–97.
10. Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1989. – № 5. – С. 114–119.
11. Нестерович, А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.
12. Нестерович, А. В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А. В. Нестерович // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 2(27). – С. 54–61.
13. Нестерович, А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.
14. Нестерович, А. В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.
15. Нестерович, А. В. Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2020. – № 1(42). – С. 85–90.
16. Нестерович, А. В. Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2020. – Вып. 35. – С. 266–272.

Поступила: 02.02.2021