УДК 629.113-585

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

студент гр. 10114119 Янч Е.А.
Научный руководитель – ст. преподаватель Марцинкевич В.С.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Рассмотрим колебательную систему, изображенную на рисунке 1.

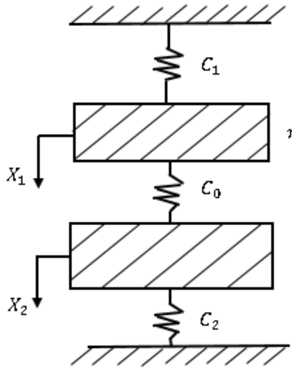

Рис. 1. Колебательная система

Она состоит из двух одинаковых масс $m_1 = m_2 = m$, соединённых жесткостями $c_1 = c_2 = c$ и c_0. Такая система зависит от трёх параметров: c, c_0 и m.

Предположим, что по техническим условиям эти параметры обязаны находиться в заранее заданных разделах:

$$\begin{cases} c^* \le c \le c^{**}, \\ c_0^* \le c_0 \le c_0^{**}, \\ m^* \le m \le m^{**} \end{cases} \tag{1}$$

Система может совершать свободные гармонические колебание с двумя частотами, которые называются собственными ω_1 и ω_2. Через ω_2 мы обозначимбольшую из них, так что всегда $0 \le \omega_1 \le \omega_2$.

В процессе конструирования колебательной системы приходится уделять внимание расположению собственных частот, чтобы избежать нежелательных резонансных явлений. Предположим, что конструкторы заинтересованы в том, чтобы уменьшить частоту ω_2. В этом случае можно ввести критерий:

$$W_1 = W_1(c, c_0, m) \tag{2}$$

и считать, что чем меньше W_1, тем лучше система (имеется в виду указанное ранее расположение частот).

Предположим, что одновременно с уменьшением частоты ω_2 конструкторам желательно уменьшить также массу системы, которая равна 2m.

Тогда можно внести второй критерий:

$$W_2 = m \tag{3}$$

и считать, что система тем лучше, чем меньше W_2.

Таким образом, нам необходимо решить двухкритериальную задачу (2), (3) с ограничениями на параметры (1).

Свободные колебания системы, изображённом на рисунке (1), описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 + c_0(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2x_2 + c_0(x_2 - x_1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где x_1 и x_2 – смещения масс m_1 и m_2. Решение этой системы будем искать в виде:

$$x_1 = A_1 \cos \omega t\,, x_2 = A_2 \cos \omega t \tag{5}$$

Подставив (5) в систему (4), получим однородную алгебраическую систему для определения A_1 и A_2:

$$\begin{cases} (m_1\omega^2 + c_1 + c_0)A_1 - c_0A_2 = 0 \\ (m_2\omega^2 + c_2 + c_0)A_1 - c_0A_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Для нахождения ω приравниваем нулю определитель этой системы:

$$m_1 m_2 \omega^4 + \big(m_1(c_2 + c_0) + m_2(c_1 + c_0)\big)\omega^2 + c_1 c_2 + c_0(c_1 + c_2) = 0 \quad (7)$$

Тогда положительный корни этого уравнения при $m_1 = m_2 = m$ и $c_1 = c_2 = c$ выражаются формулами:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{(c+2c_0)}{m}} \quad (8)$$

В нашем случае задача о выборе оптимальных параметров сформулируется следующим образом: требуется выбрать параметры c, c_0 и m в пределах (1) так, чтобы значение $W_1 = W_1(c, c_0, m) = \frac{(c+2c_0)}{m}$ было минимальным ($W_1 \rightarrow$min) и$W_2 = m$тоже, то есть:

$$W_1 = \frac{c+2c_0}{m} \rightarrow min, \quad (9)$$
$$W_2 = m \rightarrow min.$$

Для решения этой задачи введём в рассмотрение плоскость критериев, изображённую на рисунке 2.

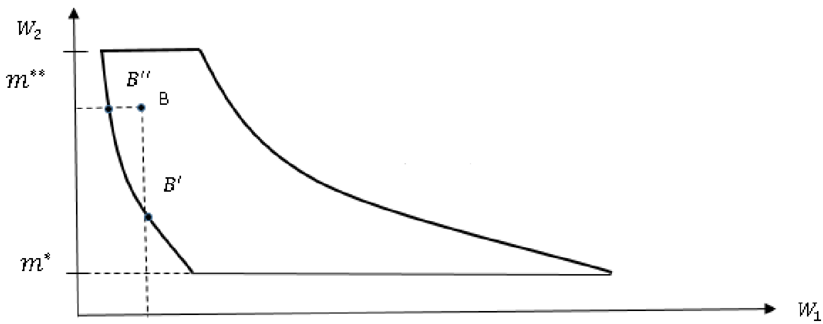

Рис. 2. Плоскости критериев

Каждому набору параметров (c, c_0, m) соответствует пара чисел W_1 и W_2 вычисляемых по формулам (9) и, стало быть точка (W_1; W_2)

на плоскости критериев. Эти же формулы позволяют найти множество точек (W_1; W_2) на плоскости критериев, которые получаются при изменении параметров (c, c_0, m) в пределах (1). Это множество изображено на рисунке 2.

Рассмотрим левую нижнюю границу этого множества, состоящую из отрезка гиперболы:

$$W_1 * W_2 = \mathrm{c}^* + 2\mathrm{c}_0^* \tag{10}$$

Покажем, что точки, расположенные вне гиперболы (10), не могут соответствовать наилучшему решению. Для этого выберем какую – нибудь точку В (рисунок 2). Проведя через эту точку вертикальную и горизонтальную прямые, получим на гиперболе точки В' и В". Так как абсциссы точек В' и В" совпадают (то есть значения W, в этих точках равны), а ордината В' меньше, чем ордината В (то есть значение W_2, соответствующее точке В', меньше), то система соответствующая точке В" (как, впрочем, и всем точкам криволинейного треугольника В'В В"), безусловно лучше, чем система, соответствующая точке.

Отсюда вывод: наилучшее решение следует искать среди систем, соответствующих точкам, расположенным на отрезке гиперболы (рисунок 2).

Литература

1. В.С. Марцинкевич «Оптимизация конструктивных параметров раздаточных коробок автомобилей» - В республиканском межведомственном сборнике научных трудов, Выпуск 5, Минск, «Вышэйшая школа», 1990.
2. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наук, 1981.