МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

Е. А. Крушевский
А. В. Капусто
А. А. Кузнецова

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Пособие
по курсу «Математика. 2-й семестр»
для студентов-заочников специальности 1-56 02 01 «Геодезия»

Минск
БНТУ
2020

УДК 51(076.5)(075.4)
ББК 22.1я7
К84

Крушевский, Е. А.

К84 Практикум по математике: пособие по курсу «Математика. 2-й семестр» для студентов-заочников специальности 1-56 02 01 «Геодезия» / Е. А. Крушевский, А. В. Капусто, А. А. Кузнецова. – Минск : БНТУ, 2020. – 33 с.

ISBN 978-985-583-455-8.

Издание содержит перечень программных вопросов по разделам курса математики для 2-го семестра. В данном пособии приводятся задачи для самоконтроля, решенные варианты, а также решения, полученные методами компьютерного моделирования.

Авторы выражают благодарность профессору Vladimir Mityushev, Pedagogical University of Cracow за помощь в получении тестовой лицензии на систему Wolfram Mathematica.

УДК 51(076.5)(075.4)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-583-455-8

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОГРАММА КУРСА на 2-й семестр
(Контрольные вопросы и навигатор по теории)

Раздел 1. Функции нескольких переменных

1. Функции двух и трех переменных как функции точки.
   [1], 6.1, с. 5, [3], 10.1, с. 208.
2. Геометрическое изображение функции двух переменных с помощью поверхностей и линий уровня.
   [1], 6.1, с. 5, [3], 10.1, с. 208.
3. Предел функции. Непрерывность в точке и в области.
   [1], 6.1, с. 5, [3], 10.1, с. 209.
4. Частные производные функции нескольких переменных; геометрический смысл частных производных функции двух переменных.
   [1], 6.1, с. 6, [3], 10.1, с. 210.
5. Полный дифференциал функции нескольких переменных.
   [1], 6.2, с. 14, [3], 10.2, с. 212.
6. Частные производные высших порядков.
   [1], 6.2, с. 14, [3], 10.3, с. 216.
7. Экстремум функции двух переменных. Необходимые условия экстремума.
   [1], 6.3, с. 26, [3], 10.4, с. 219.
8. Достаточные условия экстремума функции двух переменных.
   [1], 6.3, с. 27, [3], 10.4, с. 220.
9. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой ограниченной области.
   [1], 6.4, с. 34, [3], 10.4, с. 220.

10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
    [1], 6.3, с. 25, [3], 10.3, с. 216.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения

1. Дифференциальные уравнения (основные понятия).
   [1], 7.1, с. 40, [3], 11.1, с. 243.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (формулировка).
   [1], 7.1, с. 41, [3], 11.1, с. 243.
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
   [1], 7.1, с. 41, [3], 11.2, с. 247.
4. Дифференциальные уравнения с однородными функциями.
   [1], 7.2, с. 49, [3], 11.2, с. 247.
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли.
   [1], 7.3, с. 57, [3], 11.3, с. 252.
6. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.
   [1], 7.4, с. 65, [3], 11.3, с. 252.
7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
   [1], 7.5, с. 73, [3], 11.5, с. 259.
8. Линейные однородные уравнения n-го порядка; свойства его решений.
   [1], 7.6, с. 85, [3], 11.6, с. 264.

9. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.

   [1], 7.6, с. 86, [3], 11.6, с. 264.

10. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

    [1], 7.7, с. 92, [3], 11.6, с. 264.

11. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

    [1], 7.6, с. 86, [3], 11.6, с. 264.

12. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

    [1], 7.7, с. 92, [3], 11.6, с. 264.

Раздел 3. Ряды

1. Числовой ряд. Сумма и остаток ряда.

   [1], 10.1, с. 237, [2], 12.1, с. 7.

2. Необходимый признак сходимости ряда.

   [1], 10.1, с. 238, [2], 12.1, с. 8.

3. Сравнение рядов с положительными членами.

   [1], 10.1, с. 238, [2], 12.1, с. 8.

4. Достаточные признаки сходимости Даламбера и Коши.

   [1], 10.2, с. 245, [2], 12.1, с. 9.

5. Интегральный признак Коши.

   [1], 10.2, с. 245, [2], 12.1, с. 10.

6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

   [1], 10.3, с. 254, [2], 12.1, с. 11.

7. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
   [1], 10.3, с. 255, [2], 12.1, с. 12.
8. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости.
   [1], 10.5, с. 269, [2], 12.2, с. 18.
9. Свойства степенных рядов.
   [1], 10.5, с. 269, [2], 12.2, с. 19.
10. Ряды Тейлора и Маклорена.
   [1], 10.6, с. 277, [2], 12.3, с. 27.

Раздел 4. Кратные и криволинейные интегралы

1. Криволинейные интегралы первого рода; их свойства и вычисление.
   [1], 9.1, с. 188, [2], 14.1, с. 226.
2. Двойной интеграл; его основные свойства.
   [1], 8.1, с. 138, [2], 13.1, с. 150.
3. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
   [1], 8.1, с. 140, [2], 13.1, с. 150.
4. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
   [1], 8.2, с. 155, [2], 13.2, с. 159.
5. Тройной интеграл; его основные свойства.
   [1], 8.3, с. 167, [2], 13.4, с. 173.
6. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
   [1], 8.3, с. 168, [2], 13.4, с. 173.

7. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах.
   [1], 8.4, с. 176, [2], 13.4, с. 174.
8. Криволинейный интеграл второго рода.
   [1], 9.2, с. 196, [2], 13.1, с. 150.
9. Приложения кратных интегралов в геометрии.
   [2], 13.3, с. 163, [2], 13.3, с. 173.
10. Приложения кратных и криволинейных интегралов в механике.
   [2], 13.3, с. 163, [2], 13.3, с. 173, [2], 14.2, с. 237.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ
ПО ПРОГРАММЕ ЗА 2-Й СЕМЕСТР

Раздел 1. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменной

ЗАДАЧА 1

Задания 1—10. Найти dz и указанную производную второго порядка от функции:

1. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

2. $z = e^{x \sin 2y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3. $z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

5. $z = y \cdot e^{\frac{y}{x}}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

6. $z = \ln\left(xy^2 - e^{-y}\right)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

7. $z = e^{-(x+3y)} \cdot \sin(x + 3y)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

8. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

9. $z = e^{-\cos(2x+7y)}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

10. С решением

$$z = \sin^2(x - ay);\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Решение.

Полный дифференциал функции определяется формулой $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cdot\sin(x-ay)\cdot(\sin(x-ay))'_x =$$
$$= 2\cdot\sin(x-ay)\cdot\cos(x-ay)\cdot 1 = \sin(2(x-ay))$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\cdot\sin(x-ay)\cdot(\sin(x-ay))'_y =$$
$$= 2\cdot\sin(x-ay)\cdot\cos(x-ay)\cdot(x-ay)'_y = -a\cdot\sin(2(x-ay)).$$

Отсюда $dz = \sin(2(x-ay))\cdot(dx - a\cdot dy)$.

Найдем теперь смешанную производную 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = (\sin(2(x-ay)))'_y = -2a\cdot\cos(2(x-ay)).$$

Заметим, что смешанную производную можно было найти другим способом $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x$.

```
f[x_, y_] := (Sin[x - a y])^2
D[f[x, y], x] // Simplify
D[f[x, y], y] // Simplify
D[f[x, y], x, y] // Simplify

Sin[2 (x - a y)]

-a Sin[2 (x - a y)]

-2 a Cos[2 (x - a y)]
```

Решения из Wolfram Mathematica (далее – WM) весьма лаконичны.

З А Д А Ч А 2

Задания 11–20. Найти локальные экстремумы функции $z = z(x, y)$.

11. $z = x^2 + xy - 3x - y$. **12.** $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y+3$.

13. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$. **14.** $z = x^2 - 2xy + 3$.

15. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$. **16.** $z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x$.

17. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x$. **18.** $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$.

19. $z = xy - 3x - 2y$. **20.** $z = x^3 + y^3 - 3xy$ (с решением).

Решение.

Определим стационарные точки функции. Для этого требуется решить систему $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$ Так как $z'_x=3x^2-3y,\ z'_y=3y^2-3x$, то система будет иметь вид $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$ Решим данную систему: $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 - x = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2, \\ x(x^3 - 1) = 0, \end{cases}$, $x(x^3 - 1) = 0$: $x = 0$ или $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$. Система имеет два решения (0; 0) и (1; 1). Таким образом, функция имеет две стационарные точки $M_1(0; 0)$ и $M_2(1; 1)$.

Для проверки наличия и характера локального экстремума функции в точке требуется определить знак определителя $\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}$. Если $\Delta < 0$ – экстремума нет, если $\Delta > 0$, то в случае $z''_{xx} < 0$ в точке имеется максимум, $z''_{xx} > 0$ – минимум.

Вычислим частные производные второго порядка: $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{yy} = 6y$. Тогда $\Delta = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$

В точке $M_1(0;0)$: $\Delta\big|_{M_1} = 36 \cdot 0 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$ – экстремума нет.

В точке $M_2(1;1)$: $\Delta\big|_{M_2} = 36 \cdot 1 \cdot 1 - 9 = 27 > 0$ – есть экстремум.

Так как $z''_{xx}\big|_{M_2} = 6 \cdot 1 = 6 > 0$, то точка $M_2(1;1)$ является точкой минимума функции и $z_{\min} = z(1;1) = -1.$

```
f[x_, y_] := x^3 + y^3 - 3 x y
FindMaximum[f[x, y], {{x, 0}, {y, 1}}]
FindMinimum[f[x, y], {{x, 0}, {y, 1}}]
{1.608329397938282 × 10^313,
  {x → 20 888., y → 2.52421 × 10^104}}
{-1., {x → 1., y → 1.}}
```

Отметим, что в данном случае необходимо задать некоторую произвольную точку, как начало вычислительного процесса. Однако, к примеру, если случайно в качестве начальной выбрать «седловую» точку (здесь это точка $(0;0)$), то результат получен не будет. Очевидно, что огромные числа, полученные при поиске максимума, как раз говорят о том, что вычислительный процесс не сходится и локальный максимум у данной функции отсутствует.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения

ЗАДАЧА 3

Задания 21–30. Решить дифференциальное уравнение первого порядка.

21. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,y'=0$.

22. $xy'=\dfrac{y}{\ln x}$.

23. $\sin x\sin y\,dx+\cos x\cos y\,dy=0$.

24. $3e^{y}\cos x\,dy-\sin(9+e^{y})\,dx=0$.

25. $y'\sin x=y\cos x+2\cos x$.

26. $\sin x\ \mathrm{tg}\,y\,dx-\dfrac{dy}{\sin y}=0$.

27. $\left(x^2-1\right)y'-xy=0$.

28. $(1+y^2)dx=(x+1)ydy$.

29. $yy'=\dfrac{1-2y}{y}$.

30. $3^{x^2+y}dy-xdx=0$ (с решением).

Решение.

После элементарного преобразования видим, что это уравнение с разделяющимися переменными $3^{x^2}\cdot 3^y dy = xdx$. Преобразуем его к виду: $3^y dy = 3^{-x^2} xdx$ – уравнение с разделенными переменными. Интегрируем $\int 3^y dy = \int x 3^{-x^2} dx + C^*$, $\frac{3^y}{\ln 3} = -\frac{1}{2}\int 3^{-x^2} d(-x^2) + C^*$, $\frac{3^y}{\ln 3} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{-x^2}}{\ln 3} + C^*$, $3^y = -\frac{1}{2}\cdot 3^{-x^2} +$ $+\ln 3\cdot C^*$, переобозначая произвольную постоянную, получаем общее решение в неявном виде $3^y = C - \frac{1}{2}\cdot 3^{-x^2}$ или в явном виде $y = \log_3(C - 0{,}5\cdot 3^{-x^2})$.

```
DSolve[3^(x^2 + y[x]) * y'[x] - x == 0,
  y[x], x] // FullSimplify
```

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{\text{Log}\left[-\frac{3^{-x^2}}{2} + C[1]\,\text{Log}[3]\right]}{\text{Log}[3]}\right\}\right\}$$

ЗАДАЧА 4

Задания 31–40. Найти частное решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

31. $y' - 7y = 8e^{3x}$, $\quad y(0) = 0$.

32. $xy' - y - x^2 \sin x = 0$, $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

33. $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{-y}{x}}$, $\quad y(1) = 0$.

34. $y' - \frac{y}{x \ln x} + 2x \ln x = 0$, $\quad y(e) = \frac{e^2}{2}$.

35. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$, $\quad y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

36. $y' + 2xy = 4xe^{-x^2}$, $\quad y(0) = 2$.

37. $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0$, $\quad y(1) = 0$.

38. $\left(x^2 - 1\right)y' - xy = x^3 - x$, $\quad y\left(\sqrt{2}\right) = 1$.

39. $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx - xdy = 0$, $\quad y(1) = 0$.

40. $y' = x^2 - y$, $\quad y(0) = 0$ (с решением).

Решение.

Данное линейное дифференциальное уравнение имеет смысл решать при помощи подстановки Бернулли. Будем искать решение в виде $y = u(x)v(x)$, тогда $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. После подстановки $y = u(x)v(x)$ и выражения для производной в уравнение получим $u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + u(x)v(x) = x^2$, $u'(x)v(x) + u(x)(v'(x) + v(x)) = x^2$. Получим систему $\begin{cases} v'(x) + v(x) = 0, \\ u'(x) \cdot v(x) = x^2. \end{cases}$

Решим уравнение $v'(x) + v(x) = 0$. Получим, $v'(x) = -v(x)$, $\dfrac{dv}{v(x)} = -1$, $\displaystyle\int \frac{dx}{v(x)} = -\int 1 \cdot dx$, $\ln|v(x)| = -x + C$, откуда при $C = 0$: $\ln|v(x)| = -x$ и искомая функция будет иметь вид $v(x) = e^{-x}$.

Далее, после подстановки найденной функции $v(x)$ во второе уравнение системы, получим $u'(x) \cdot e^{-x} = x^2$. Проинтегрируем последнее уравнение: $u'(x) = x^2 e^x$, $\int du = \int x^2 e^x \, dx$,

$$u(x) = \int x^2 e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & v = e^x \\ du = 2xdx & dv = e^x dx \end{vmatrix} = x^2 e^x - 2\int x \cdot e^x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & v = e^x \\ du = dx & dv = e^x dx \end{vmatrix} = e^x \cdot x^2 - 2(e^x \cdot x - \int e^x dx) =$$

$$= e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

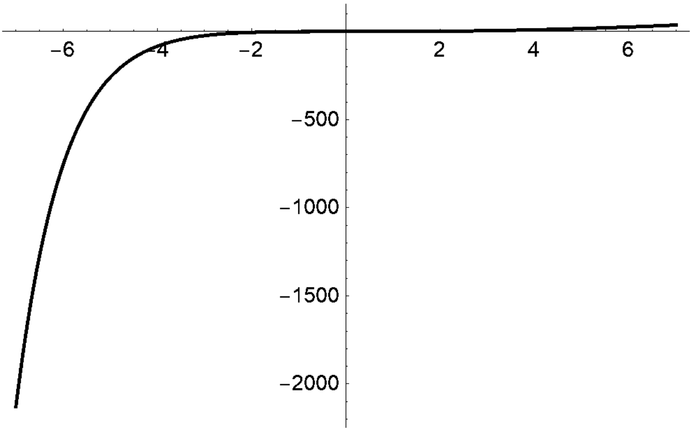
Тогда $y(x) = (e^x(x^2 - 2x + 2) + C) \cdot e^{-x} = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}$ – общее решение исходного уравнения. Получим частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

$0^2 - 2 \cdot 0 + 2 + C \cdot e^{-0} = 0$, $2 + C = 0$, $C = -2$. Таким образом, $y = x^2 - 2x + 2 - 2e^{-x}$.

```
DSolve[y'[x] + y[x] - x^2 == 0, y[x], x]
{{y[x] → 2 - 2 x + x^2 + e^-x C[1]}}

sol = DSolve[{y'[x] + y[x] - x^2 == 0, y[0] == 0},
   y[x], x]
{{y[x] → e^-x (-2 + 2 e^x - 2 e^x x + e^x x^2)}}

Plot[Evaluate[y[x] /. sol /. {C[1] → 1}],
  {x, -7, 7}, PlotRange → All]
```



Заметим, что в компьютерной системе WM построить график найденного решения очень легко. Чего не скажешь о построении такого графика «ручным» способом.

ЗАДАЧА 5

Задания 41–50. Найти общее решение дифференциальных уравнений 2-го порядка.

41. *а*) $xy'' = 4y'$;

б) $y'' + 4y' + 5y = \cos x$.

42. *а*) $xy'' = 5y'$;

б) $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.

43. *а*) $xy'' = 6y'$;

б) $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}\cos 2x$.

44. *а*) $xy'' = -6y'$;

б) $y'' + 2y' - 3y = 12xe^{x}$.

45. *а*) $xy'' = -7y'$;

б) $y'' + 3y' - 4y = 3\sin x$.

46. *а*) $yy'' = 5(y')^2$;

б) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

47. *а*) $yy'' = 6(y')^2$;

б) $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$.

48. *а*) $yy'' = 7(y')^2$;

б) $y'' - 4y' + 13y = 2x^2e^{3x}$.

49. *а*) $yy'' = -5(y')^2$;

б) $y'' - 14y' + 49y = 14\sin 7x$.

50. С решением

а) $y'' = \sin 2x$;

б) $y'' - 3y' + 2y = e^{x}(2x - 3)$.

Решение.

1. Последовательно проинтегрируем два раза исходное уравнение. Получим $y' = \int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1$, $y = \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1\right)dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$ – общее решение исходного уравнения.

2) Решим сначала однородное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$. Для этого составим характеристическое уравнение $k^2 - 3k +$ $+2 = 0$ и решим его. Корни $k_1 = 1,\ k_2 = 2.$ Таким образом, общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Общий вид этого частного решения $y^* = xe^x(Ax + B).$ Найдем производные $(y^*)'$ и $(y^*)''$ и подставим в исходное уравнение.

$(y^*)' = (x)'e^x(Ax+B) + x(e^x)'(Ax+B) + xe^x(Ax+B)' = e^x(Ax+B) +$
$+xe^x(Ax+B) + xe^x A = e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B),$

$(y^*)'' = (e^x)'(Ax^2 + 2Ax + Bx + B) + e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B)' = e^x(Ax^2 +$
$+2Ax + Bx + B) + e^x(2Ax + 2A + B) = e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B).$

Подставим полученные выражения в уравнение

$e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B) - 3e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B) + 2xe^x(Ax + B) =$
$= e^x(2x - 3).$ Преобразовав, получим

$e^x(-2Ax + 2A - B) = e^x(2x - 3).$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x, это приведет к системе линейных уравнений $\begin{cases} -2A = 2, \\ 2A - B = -3, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} A = -1, \\ B = 1. \end{cases}$ Таким образом, частное решение принимает вид $y^* = xe^x(-x + 1) = e^x(x - x^2).$

Следовательно, по теореме о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения общее решение исходного уравнения следует записать в виде $y = y_0 + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 + x)$.

```
DSolve[y''[x] - Sin[2 x] == 0, y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to C[1] + x\,C[2] - \frac{1}{4}\,Sin[2\,x]\right\}\right\}$$

```
DSolve[y''[x] - 3 y'[x] + 2 y[x] ==
   Exp[x] * (2 x - 3), y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to -e^x\left(-1 - x + x^2\right) + e^x\,C[1] + e^{2\,x}\,C[2]\right\}\right\}$$

Решения из WM полностью идентичны.

Раздел 3. Ряды

ЗАДАЧА 6

Задания 51–60. Исследовать на сходимость (абсолютную и условную сходимость в части *в*) следующие числовые ряды.

51. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+1}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n+n}$.

52. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{2^n}\right)^n$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-6)^n}{(n-1)!}$.

53. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{3^{n/2}}$.

54. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

55. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{2n+1}}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{n}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n^3}{3^n}$.

56. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+4)!}$.

57. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+3}{n^2-4n+13}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{7n+3}$.

58. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(3n+1)^3+5}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n}\right)^{n^2}$; *в*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ln^2 n}$.

59. *а*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln^2(n)}$; *б*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}$; *в*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\ln(n+1))^n}$.

60. С решением

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{4n+2}}; \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{n^2}; \qquad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2+5}$$

Решение.

1. Применим необходимый признак сходимости. Так как $\lim\frac{1}{\sqrt[n]{4n+2}}=1$ (такие пределы следует вычислять по правилу Лопиталя (см. задача 2, часть 1 Практикума для 1-го семестра). Поэтому данный ряд расходится.

2. Применим «радикальный» признак Коши. Для этого вычислим $\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\sqrt[n]{\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{n^2}}=\lim\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{n}$. Теперь следует вспомнить 2-й замечательный предел $\lim\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{n}=$ $\lim\left(1-\frac{1}{2+n}\right)^{n\cdot\frac{-(2+n)}{-(2+n)}}=e^{\lim\frac{n}{-(2+n)}}=\frac{1}{e}$. Вычисленная «варианта Коши» меньше 1, поэтому данный ряд сходится.

3. К данному знакопеременному ряду следует применить признак Лейбница. $\lim\frac{n}{4n^2+5}=0$. Кроме того, необходимо проверить выполнение условия $a_{n+1}<a_n$:

$$\frac{n+1}{4(n+1)^2+5}-\frac{n}{4n^2+5}=\frac{-9n^2-4n+1}{(4n^2+8n+9)(4n^2+5)}.$$

Последнее выражение, очевидно, отрицательно всегда. Таким образом, по признаку Лейбница данный знакопеременный ряд сходится. Что касается абсолютной сходимости, то ее в данном случае нет. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2+5}$ (с отброшенным знакочередующим сомножителем $(-1)^n$) эквивалентен гармоническому. Другими словами, он расходится, что означает условную сходимость исходного знакочередующегося ряда.

```
SumConvergence[1 / (4 n + 2) ^ (1 / n), n]

False

SumConvergence[((1 + n) / (2 + n))^n^2, n]

True

SumConvergence[(-1)^n * n / (4 n^2 + 5), n]

True

SumConvergence[Abs[(-1)^n n / (4 n^2 + 5)], n]

False
```

В числовых рядах WM использует понятия «истина» (т. е. сходится) и «ложь» (т. е. расходится).

З А Д А Ч А 7

Задания 61–70. Найти область сходимости следующих рядов:

61. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+2)^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(x+1)^n}{(3n+1)}$.

62. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(x-2)^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(3n-1)\cdot 2^n}$.

63. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(2x+5)^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot\sqrt[3]{n}\cdot(x+1)^n}{4^n}$.

64. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-n}{(2x-5)^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x-1)^n}{4^n\cdot\sqrt[3]{n}}$.

65. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(x-4)^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot(x+3)^n}{n+1}$.

66. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(x+4)^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\sqrt{n}}$.

67. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(x-3)^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot(x+2)^n}{\ln(n+1)}$.

68. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(x+3)^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n\cdot\ln(n+1)}$.

69. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(x+1)^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot(x-4)^n}{n+1}$.

70. *а*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(x-1)^n}$; *б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+1}$ (с решением).

Решение.

а) Применим радикальный признак Коши для нахождения области абсолютной сходимости этого функционального ряда. Для этого вычислим «варианту» Коши (здесь она зависит от *x*):

$$\ell(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2(x-1)^n}\right|} = \frac{1}{|x-1|}.$$

Отсюда область абсолютной сходимости (полученная из условия $\ell(x) < 1$) задается неравенством $\frac{1}{|x-1|} < 1$ или $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. Однако здесь необходимо дополнительное исследование в граничных точках $x = 0$ и $x = 2$. В этих точках ряд сходится, поэтому окончательно область абсолютной сходимости выглядит так: $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. Область поточечной сходимости совпадает с областью абсолютной сходимости.

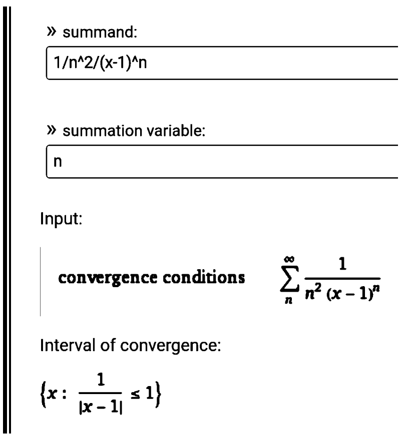
б) Вычислим радиус сходимости данного степенного ряда по формуле Даламбера.

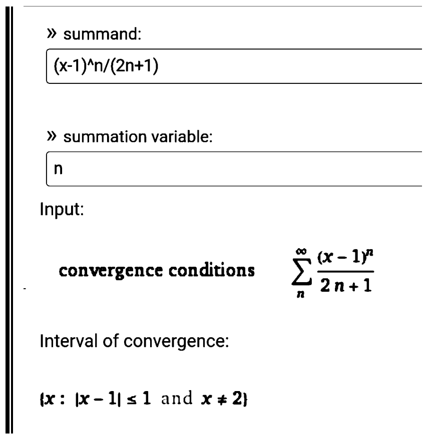
При этом считаем, что

$$a_n = \frac{1}{2n+1},\ a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3}.$$

Итак, $R = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2n+3}{2n+1} = 1$.

Таким образом, область абсолютной сходимости данного ряда описывается неравенством $|x-1|<1$. Осталось проверить сходимость (поточечную или абсолютную) на концах интервала. При $x=0$ получим сходящийся по признаку Лейбница знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. Поэтому точку $x=0$ следует добавить к области поточечной (но не абсолютной!) сходимости. При $x=2$ получим знакопостоянный ряд, эквивалентный гармоническому. Он расходится. Таким образом, область поточечной (слабой) сходимости $0\le x<2$, а область абсолютной сходимости $|x-1|<1$.





Скриншоты с экрана смартфона получены с сайта www.wolframalpha.com (далее – WA).

Раздел 4. Кратные и криволинейные интегралы

ЗАДАЧА 8

Задания 71–80. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по заданной кривой в указанных пределах:

71. $\int\limits_L (x+\sqrt{y})\,dl,\ L: y=x^2, O(0,0), A(1,1)$.

72. $\int\limits_L xy\,dl,\ L: x^2+y^2=1, A(0,1), B(1,0)$.

73. $\int\limits_L y^2 dl,\ L: y=e^x, A(0,1), B(1,e)$.

74. $\int\limits_L (x^2+y)\,dl,\ L: y=x+1, A(1,2), B(2,3)$.

75. $\int\limits_L y^2\sqrt{1+x^4}\,dl,\ L: xy=1, A(1,1), B(2,0{,}5)$.

76. $\int\limits_L \frac{y\,dl}{\sqrt{1+\cos^2 x}},\ L: y=\sin x, O(0,0), A(\pi/2,1)$.

77. $\int\limits_L x\,dl,\ L: y=x^2, A(1,1), B(2,4)$.

78. $\int\limits_L x^2y^2 dl,\ L$: отрезок AB, где $A(1,3), B(3,5)$.

79. $\int\limits_L \sqrt{1+x^2}\,dl,\ L: 2y-x^2=4, A(1,1), B(2,4)$.

80. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, L: отрезок OA, где $O(0,0), A(1,2)$ (с решением).

Решение.

Составим уравнение прямой OA: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-2}$, $-2(x-1)=$ $=-(y-2)$, $-2x+2=-y+2$, $y=2x$.

Таким образом, для указанной части прямой: $y=2x$, $0\le x\le 1$, и производная (которая нам нужна для вычисления дифференциала длины други) $y'=2$, $dl=\sqrt{1+2^2}dx=\sqrt{5}dx$.

$$\int\limits_L \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{5x^2+4}}=$$
$$=\int\limits_0^1 \frac{d\left(\sqrt{5}x\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{5}x\right)^2+2^2}}=\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2+4}\right|\Big|_0^1=$$
$$=\ln\left|\sqrt{5}+\sqrt{9}\right|-\ln\left|\sqrt{4}\right|=\ln\left|\sqrt{5}+3\right|-\ln 2=\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}=0{,}962424.$$

Логарифм вычислен в программе Excel.

WM здесь мы можем подключить только на стадии вычисления определенного интеграла.

Результат в виде обратного гиперболического синуса кажется весьма непривычным, однако совпадение численного результата не позволяет усомниться в правильности обоих ответов.

$$\int_0^1 \sqrt{5}\Big/\sqrt{5\,x\hat{}2+4}\,dx\ \text{// Simplify}$$

$$\text{ArcSinh}\left[\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$$

$$\text{NIntegrate}\left[\sqrt{5}\Big/\sqrt{5\,x\hat{}2+4},\ \{x,\ 0,\ 1\}\right]$$

$$0.962424$$

ЗАДАЧА 9

Задания 81–90. Вычислить повторный интеграл от функции $f(x,y) = x - 2y$:

81. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy.$

82. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

83. $\int\limits_{1/2}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{x^3}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

84. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1/x} f(x,y)dy.$

85. $\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

86. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{2} f(x,y)dy.$

87. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1/x^2}^{x^2} f(x,y)dy.$

88. $\int\limits_1^4 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x^3}} f(x,y)dy.$

89. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{e^x} f(x,y)dy.$

90. $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2-1}^{3} (x-2y)dx$ (с решением).

Решение.

$$\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2-1}^{3} (x-2y)dxdy = \int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{x^2}{2} - 2xy\right)\Bigg|_{y^2-1}^{3} = \int\limits_{-2}^{2}\left[\left(\frac{9}{2} - 6y\right) -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\left(y^2-1\right)^2}{2} - 2y\cdot\left(y^2-1\right)\right)\right]dy = \int\limits_{-2}^{2}\left(4 - 8y - \frac{y^4}{2} + y^2 + 2y^3\right)dy =$$

$$=\left(4y-4y^2-\frac{y^5}{10}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\left(8-16-\frac{32}{10}+\frac{8}{3}+8\right)-$$

$$-\left(-8-16+\frac{32}{10}-\frac{8}{3}+8\right)=\frac{224}{15}=14{,}9333.$$

Computational Inputs:

» function to integrate: x-2y

» variable 1: y

» lower limit 1: -2

» upper limit 1: 2

» variable 2: x

» lower limit 2: y^2-1

» upper limit 2: 3

Definite integral:

$$\int_{-2}^{2}\int_{y^2-1}^{3}(x-2\,y)\,dx\,dy=\frac{224}{15}\approx 14.9333$$

Отметим, WA в данном случае требует введения всех пределов интегрирования.

ЗАДАЧА 10

Задания 91–100. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь плоской области D, ограниченной заданными линиями

91. $y^2 = 4x, \quad x = \dfrac{8}{y^2+4}$.

92. $y = \dfrac{4}{x}, \quad y = 6 - x$.

93. $x = y^2 + 1, \quad x + y = 3$.

94. $4y = x^2 - 4, \quad 2y = 4 - x^2$.

95. $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x$.

96. $x^2 = 3y, \quad y^2 = 3x$.

97. $x = y^2, \quad x = \sqrt{2 - y^2}$.

98. $y^2 = 4 - x, \quad y = x + 2$.

99. $x = 4 - y^2, \; x - y + 2 = 0$.

100. С решением

$$y = x^2 + 1, \quad x - y + 3 = 0.$$

Решение.

Данная область является правильной относительно оси Oy. Найдем точки пересечения линий из решения системы: $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = x + 3. \end{cases}$ Решением системы уравнений являются точки $(-1;2)$ и $(2;5)$. При переходе от двойного интеграла к повторному воспользуемся абсциссами точек пересечения линий. Вычислим полученный повторный интеграл:

$$S=\iint\limits_{\bar{D}} dxdy=\int\limits_{-1}^{2}dx\int\limits_{x^2+1}^{x+3}dy=\int\limits_{-1}^{2}(x+3-x^2-1)\,dx=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=2+2-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+4-\frac{1}{3}=\frac{9}{2}.$$

```
Integrate[Boole[y > x^2 + 1] * Boole[y < x + 3],
  {x, -1, 2}, {y, 1, 5}]
9
-
2
```

Понятно, что для того, чтобы вычислить это площадь в WM через двойной интеграл по области, нужно немного разобраться в булевых операциях над множествами. Но оно стоит того!

ЛИТЕРАТУРА

1. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике: учеб. пособие / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – В 2 ч. Ч. 2 – Мн.: Выш. шк., 1993.– 302 с.

2. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. / А. П. Рябушко и др. – 5-е изд.– Минск : Выш. шк., 2009. – 368 с.

3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 2. / А. П. Рябушко и др. – Минск : Выш. шк., 1991. – 352 с.

4. Капусто, А. В. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных: учебно-методическое пособие. – Минск : БНТУ, 2016 – 223 с.

5. Герасимович, А. И. Математический анализ: справ. пособие. В 2 ч. Ч. 2.–Мн.: Выш. шк., 1989.– 272 с.

6. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под. ред. Б. П. Демидовича. М.: Наука. – 1981. – 464 с.

Учебное издание

КРУШЕВСКИЙ Евгений Александрович
КАПУСТО Анна Владимировна
КУЗНЕЦОВА Александра Алексеевна

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Пособие
по курсу «Математика. 2-й семестр»
для студентов-заочников специальности 1-56 02 01 «Геодезия»

Редактор *Е. О. Германович*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 29.05.2020. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 1,92. Уч.-изд. л. 1,50. Тираж 100. Заказ 735.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.