УДК 517.31

МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО БИНОМА

Студент гр. 11307121 Билейчик А.А.
Кандидат техн. наук, доцент Бокуть Л.В.
Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

Биномиальный дифференциал, или дифференциальный бином, – это дифференциал вида $x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$, где a, b – действительные числа, а m, n, p – рациональные. В свою очередь интегралы типа $\int x^m\,(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$ называются интегралами от дифференциального бинома.

Такой интеграл выражается в элементарных функциях только в тех случаях, когда какое-либо из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ является целым, тогда для вычисления используются соответствующие подстановки, описанные Чебышевым П.А.:

1) если p – целое число, то подстановка $x = t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то подстановка $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби p;

3) если $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число, то подстановка $a+bx^n=x^n t$, где s – знаменатель дроби p.

Во всех остальных случаях интегралы типа $\int x^m\,(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$ не выражаются через известные элементарные функции. Однако интеграл от дифференциального бинома также можно выразить через неполную бета-функцию (1) либо через гипергеометрическую функцию (2), как показано ниже:

$$I = \frac{1}{n}a^p\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{(m+1)}{n}}B_y\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right), \tag{1}$$

где $y=-\frac{b}{a}x^n$,

$$I = \frac{1}{m+1}a^p\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{(m+1)}{n}}y^{\frac{(m+1)}{n}}F_1\left(\frac{m+1}{n}, -p, \frac{(m+1)}{n}+1, y\right). \tag{2}$$

Бета-функция – это специальная функция от двух переменных вида:

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t. \tag{3}$$

В свою очередь неполная бета-функция является обобщением бета-функции, которое заменяет неопределенный интеграл определенным:

$$B_x(a,b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t. \tag{4}$$

При помощи бета-функции описывают многие свойства элементарных частиц, которые участвуют в сильном взаимодействии, а выявление физического смысла данной функции положило начало развитию теории струн.

Гипергеометрическая функция является решением линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, называемого гипергеометрическим уравнением. Она отличается особой практической значимостью, т. к. через нее выражаются многие другие специальные функции. Кроме того, сейчас известно большое количество формул преобразования для гипергеометрических функций, благодаря чему они являются незаменимым инструментом в математическом анализе.

В ходе работы были решены задачи на вычисление интеграла методом Чебышева для каждой подстановки.

Литература

1. Интегрирование дифференциального бинома / Lfirmal [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://lfirmal.com/integrirovanie-differentsialnogo-binoma/. – Ресурс доступа: 15.03.2022.

2. Приближенное вычисление определенного интеграла при помощи квадратурной формулы Чебышева [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.km.ru/referats/DF2B60BD1C614E5581B2D7F7E6D68031. – Ресурс доступа: 15.03.2022.

3. Бета-функция Эйлера. Академик [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/809693#.D0.9D.D0.B5.D0.BF.D0.BE.D0.BB.D0.BD.D0.B0.D1.8F_.D0.B1.D0.B5.D1.82.D0.B0-D1.84.D1.83.D0.BD.D0.BA.D1.86.D0.B8.D1.8F . – Ресурс доступа: 15.03.2022.