6. Третьякова, А.А. Кукуруза как основное сырьё для производства PLA-пластика / Третьякова А.А., Ермакова В.А., Ермаков А.И. / 5 Международная научно-практическая конференция «Переработка и управление качеством сельскохозяйственной продукции», Минск, 25–26 марта 2021 г.: БГАТУ, 2021. – С.74–76.

7. Третьякова, А.А. Влияние температурных режимов 3д-печати на характеристики изделия / А.А. Третьякова, А.И. Ермаков // Мировая экономика и бизнес-администрирование малых и средних предприятий: материалы 17-го Международного научного семинара, проводимого в рамках 19-й международной научно-технической конференции «Наука – образованию, производству, экономике», 25–26 марта 2021 года, Минск, Республика Беларусь. – Минск: Право и экономика, 2021. – 213 с.

8. Zalohin, M. Yu. Experimental determination and comparative analysis of the PPH030GP, ABS and PLA polymer strength characteristics at different strain rates / Zalohin M. Yu., V. V. Skliarov, Ja. S. Dovzhenko, D. A. Brega / Наукаитехника. – Т. 18, № 3 (2019). – С. 233–239. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-3-233-239.

9. Cantrell J. Experimental characterization of the mechanical properties of 3D-printed ABS and polycarbonate parts / J. Cantrell /Advancement of Optical Methods in Experimental Mechanics, Proceedings of the 2016 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics, 3, 89–105.https://doi.org/10.1007/978-3-319-41600-7_11.

10. Galeta, T. Influence of structure on mechanical properties of 3D-printed objects / T. Galeta, P. Raos, J. Stojšić, I. Pakši / Procedia Engineering, 149 (2016), P 100–104. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.06.644.

11. Rankouhi, B. Failure analysis and mechanical characterization of 3D-printed ABS with respect to layer thickness and orientation / B. Rankouhi, S. Javadpour, F. Delfanian, T. Letcher / Journal of Failure Analysis and Prevention,16 (3), 2016, P. 467–481. https://doi.org/10.1007/s11668-016-0113-2.

12. Mohamed, O.A. Effect of process parameters on dynamic mechanical performance of FDM PC/ABS printed parts through design of experiment / O.A. Mohamed, S.H. Masood, J.L. Bhowmik, M. Nikzad, J. Azadmanjiri / Journalof Materials Engineering and Performance, 25 (7), 2016, P. 2922–2935. https://doi.org/10.1007/s11665-016-2157-6.

13. Ермаков, А.И. Применение 3D-печати в кондитерском производстве / А.И. Ермаков, С.В. Чайко / НАУКА –ОБРАЗОВАНИЮ, ПРОИЗВОДСТВУ, ЭКОНОМИКЕ: Материалы 15-й Международной научно-технической конференции (70-й научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, научных работников, докторантов и аспирантов БНТУ) в 4 томах, Минск, май 2017 г. / БНТУ. – Минск, 2017. – Том 4. – С. 503.

14. Ермаков, А.И. Разработка 3d-принтера для образовательных учреждений / А.И. Ермаков, В.В. Книга, Е.П. Мелещеня, А.А. Третьякова // Переработка и управление качеством сельскохозяйственной продукции: сборник статей III международной научно-практической конференции, Минск, 23–24 марта 2017 г. / БГАТУ; редкол.: В.Я. Груданов [и др.]. – Минск, 2017. – С. 426–428.

15. Ермаков, А.И. Применение 3D-печати в кондитерском производстве / А.И. Ермаков, С.В. Чайко /НАУКА –ОБРАЗОВАНИЮ, ПРОИЗВОДСТВУ, ЭКОНОМИКЕ: Материалы 15-й Международной научно-технической конференции (70-й научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, научных работников, докторантов и аспирантов БНТУ) в 4 томах, Минск, май 2017г. / БНТУ. – Минск, 2017. – Том 4 – С.506

16. Ермаков, А.И. Разработка конструкции 3d- принтера, печатающего пищевыми материалами / А.И. Ермаков, С.В. Чайко// Мировая экономика и бизнес-администрирование малых и средних предприятий: материалы 13-го междунар. науч. семинара, проводимого в рамках 15-ой межд. научно-технической конференции «Наука– образованию производству, экономике, Минск, 26–28 января 2017 г. / БНТУ; редкол.: Б.М. Хрусталёв [и др.]. – Минск, 2017. – С. 255–256.

17. ГОСТ 11262-80. Пластмассы. Метод испытания на растяжение (с Изменением N 1) // Электронный фонд [Электронный ресурс]. – 2005. – Режим доступа: http://docs.cntd.ru/document/gost-11262-80. – Дата доступа: 01.04.2021.

18. Ермакова В.А., Гасперович Е.В., Ермаков А.И., Литвяк В.В. Исследование прочностных характеристик изделий, полученных методом 3D-печати из PLA. НАУКА и ТЕХНИКА. 2022;21(2):107-113. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-2-107-113

УДК 514.74

ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКИХ ЛИНИЙ ПО ЗАДАННОМУ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ ЗАКОНУ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ

В.Н. Жуковец, *ФММП БНТУ, г. Минск*

Резюме - выполнено аналитическое решение задачи построения плоских линий по заданному закону кривизны в декартовых координатах. Полученные функции представлены в параметрической форме как результат решения системы дифференциальных уравнений. Разработанный метод может быть применен для решения задач дифференциальной геометрии, теоретической механики, в системах автоматизированного проектирования.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, кривизна плоских линий, дифференциальные уравнения, автоматизированное проектирование.

Введение. При решении прикладных задач механики, в ряде случаев следует уделять внимание геометрическим параметрам различных тел, среди которых необходимо учитывать радиус кривизны профиля вдоль осей двумерной декартовой системы координат. Следует отметить, что построение профиля криволинейной поверхности, согласно предварительно заданному радиусу кривизны, является нестандартной задачей.

Основная часть. Для плоской линии, заданной в декартовых координатах, радиус кривизны находится согласно выражению [1, 2]:

$$R=\frac{\left(1+\left(y'_x\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|y''_{xx}\right|}. \quad (1)$$

Необходимо отметить, что решение дифференциального уравнения (1) в этом виде затруднено. В справочниках [3, 4] решение уравнения (1) не приведено. Задачу можно решить, если использовать методику, описанную в публикации [5]. В данной работе приведены выражения:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\psi}=R\cdot\cos\psi;\\ \dfrac{dy}{d\psi}=-R\cdot\sin\psi.\end{cases} \quad (2)$$

Здесь ψ – угол поворота нормали к линии, отсчитываемый в радианах по часовой стрелке от оси ординат 0у, либо от параллельной ей вспомогательной оси.

Зададимся законом изменения радиуса кривизны:

$$R=a+b\cdot x+c\cdot y; \quad (3)$$

Сначала следует использовать первое уравнение системы (2):

$$\frac{dx}{d\psi}-b\cdot x\cdot\cos\psi=(a+c\cdot y)\cdot\cos\psi.$$

Далее для удобства будем записывать:

$$x'-b\cdot x\cdot\cos\psi=(a+c\cdot y)\cdot\cos\psi;$$

Получено дифференциальное уравнение первого порядка. Применим известную подстановку [1, 2]:

$$x=u\cdot v;\ x'=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

$$u'\cdot v+u\cdot(v'-v\cdot b\cdot\cos\psi)=a\cdot\cos\psi+c\cdot y\cdot\cos\psi.$$

$$v'-v\cdot b\cdot\cos\psi=0.$$

$$\int\frac{dv}{v}=b\cdot\int\cos\psi\cdot d\psi.$$

$$\ln|v|=b\cdot\sin\psi.$$

$$v=e^{b\cdot\sin\psi}. \quad (4)$$

$$\frac{du}{d\psi}\cdot e^{b\cdot\sin\psi}=a\cdot\cos\psi+c\cdot y\cdot\cos\psi.$$

$$\int du=-\frac{a}{b}\cdot\int e^{-b\cdot\sin\psi}\cdot d(-b\cdot\sin\psi)+c\cdot\int y\cdot\cos\psi\cdot e^{-b\cdot\sin\psi}\cdot d\psi.$$

$$u=-\frac{a}{b}\cdot e^{-b\cdot\sin\psi}+c\cdot\int y\cdot\cos\psi\cdot e^{-b\cdot\sin\psi}\cdot d\psi+A_x. \quad (5)$$

Здесь A_x – произвольная постоянная величина интегрирования.

Поскольку $x=u\cdot v$, тогда получим выражение:

$$x=A_x\cdot e^{b\cdot\sin\psi}-\frac{a}{b}+c\cdot e^{b\cdot\sin\psi}\cdot\int y\cdot\cos\psi\cdot e^{-b\cdot\sin\psi}\cdot d\psi. \quad (6)$$

Для нахождения решения воспользуемся выражениями (3, 6) и после подстановки получим:

$$R=a+b\cdot x+c\cdot y;$$

$$R=b\cdot e^{b\cdot\sin\psi}\cdot\left(A_x+c\cdot\int y\cdot\cos\psi\cdot e^{-b\cdot\sin\psi}\cdot d\psi\right)+c\cdot y. \quad (7)$$

С другой стороны, согласно системе уравнений (2):

$$\frac{dy}{d\psi}=-R\cdot\sin\psi;$$

$$\frac{dy}{d\psi}=-b\cdot\sin\psi\cdot e^{b\cdot\sin\psi}\cdot\left(A_x+c\cdot\int y\cdot\cos\psi\cdot e^{-b\cdot\sin\psi}\cdot d\psi\right)-c\cdot y\cdot\sin\psi;$$

$$\left(\frac{\frac{dy}{d\psi} \cdot e^{-b \cdot \sin\psi}}{b \cdot \sin\psi} \right)'_{\psi} + \left(\frac{c}{b} \cdot y \cdot e^{-b \cdot \sin\psi} \right)'_{\psi} = -c \cdot y \cdot \cos\psi \cdot e^{-b \cdot \sin\psi} . \qquad (8)$$

Для упрощения преобразований выразим производные из выражения (8):

$$\left(\frac{\frac{dy}{d\psi} \cdot e^{-b \cdot \sin\psi}}{b \cdot \sin\psi} \right)'_{\psi} = \frac{\left(\frac{dy}{d\psi} \cdot e^{-b \cdot \sin\psi} \right)'_{\psi} \cdot b \cdot \sin\psi - \frac{dy}{d\psi} \cdot e^{-b \cdot \sin\psi} \cdot b \cdot \cos\psi}{b^2 \cdot \sin^2\psi} =$$

$$= \frac{e^{-b \cdot \sin\psi} \cdot \left(\frac{d^2 y}{d\psi^2} - \frac{dy}{d\psi} \cdot (b \cdot \cos\psi + \operatorname{ctg}\psi) \right)}{b \cdot \sin\psi} ; \qquad (9)$$

$$\left(\frac{c}{b} \cdot y \cdot e^{-b \cdot \sin\psi} \right)'_{\psi} = \frac{c}{b} \cdot \frac{dy}{d\psi} \cdot e^{-b \cdot \sin\psi} - c \cdot y \cdot e^{-b \cdot \sin\psi} \cdot \cos\psi = e^{-b \cdot \sin\psi} \cdot \left(\frac{c}{b} \cdot \frac{dy}{d\psi} - c \cdot y \cdot \cos\psi \right) . \qquad (10)$$

Подставим результаты преобразований (9, 10) в формулу (8):

$$\frac{e^{-b \cdot \sin\psi} \cdot \left(\frac{d^2 y}{d\psi^2} - \frac{dy}{d\psi} \cdot (b \cdot \cos\psi + \operatorname{ctg}\psi) \right)}{b \cdot \sin\psi} + e^{-b \cdot \sin\psi} \cdot \left(\frac{c}{b} \cdot \frac{dy}{d\psi} - c \cdot y \cdot \cos\psi \right) = -c \cdot y \cdot \cos\psi \cdot e^{-b \cdot \sin\psi} ;$$

$$\frac{d^2 y}{d\psi^2} = \frac{dy}{d\psi} \cdot (\operatorname{ctg}\psi + b \cdot \cos\psi - c \cdot \sin\psi) . \qquad (11)$$

Далее используем второе уравнение системы (2):

$$\frac{dy}{d\psi} + c \cdot y \cdot \sin\psi = -(a + b \cdot x) \cdot \sin\psi .$$

Далее для удобства будем записывать:

$$y' + c \cdot y \cdot \sin\psi = -(a + b \cdot x) \cdot \sin\psi ;$$

Применим подстановку:

$$y = u \cdot v ; \; y' = u' \cdot v + u \cdot v' .$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' + u \cdot v \cdot c \cdot \sin\psi = -(a + b \cdot x) \cdot \sin\psi .$$

$$v' + v \cdot c \cdot \sin\psi = 0 .$$

$$\int \frac{dv}{v} = -c \cdot \int \sin\psi \cdot d\psi .$$

$$\ln|v| = c \cdot \cos\psi .$$

$$v = e^{c \cdot \cos\psi} . \qquad (12)$$

$$\frac{du}{d\psi} \cdot e^{c \cdot \cos\psi} = -a \cdot \sin\psi - b \cdot x \cdot \sin\psi .$$

$$\int du = -\frac{a}{c} \cdot \int e^{-c \cdot \cos\psi} \cdot d(-c \cdot \cos\psi) - b \cdot \int x \cdot \sin\psi \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} \cdot d\psi .$$

$$u = -\frac{a}{c} \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} - b \cdot \int x \cdot \sin\psi \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} \cdot d\psi + A_y . \qquad (13)$$

Здесь A_y – произвольная постоянная величина интегрирования.

Поскольку $y = u \cdot v$, тогда получим выражение:

$$y = A_y \cdot e^{c \cdot \cos\psi} - \frac{a}{c} - b \cdot e^{c \cdot \cos\psi} \cdot \int x \cdot \sin\psi \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} \cdot d\psi . \qquad (14)$$

Для нахождения решения воспользуемся выражениями (3, 14) и после подстановки получим:

$R = a + b \cdot x + c \cdot y$;

$$R = c \cdot e^{c \cdot \cos\psi} \cdot \left(A_y - b \cdot \int x \cdot \sin\psi \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} \cdot d\psi \right) + b \cdot x \,. \qquad (15)$$

С другой стороны, согласно системе уравнений (2):

$$\frac{dx}{d\psi} = R \cdot \cos\psi \,;$$

$$\frac{dx}{d\psi} = c \cdot \cos\psi \cdot e^{c \cdot \cos\psi} \cdot \left(A_y - b \cdot \int x \cdot \sin\psi \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} \cdot d\psi \right) + b \cdot x \cdot \cos\psi \,;$$

$$\left(\frac{\frac{dx}{d\psi} \cdot e^{-c \cdot \cos\psi}}{c \cdot \cos\psi} \right)_{\psi}^{/} - \left(\frac{b}{c} \cdot x \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} \right)_{\psi}^{/} = -b \cdot x \cdot \sin\psi \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} \,; \qquad (16)$$

Для упрощения преобразований выразим производные из выражения (16):

$$\left(\frac{\frac{dx}{d\psi} \cdot e^{-c \cdot \cos\psi}}{c \cdot \cos\psi} \right)_{\psi}^{/} = \frac{\left(\frac{dx}{d\psi} \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} \right)_{\psi}^{/} \cdot c \cdot \cos\psi + \frac{dx}{d\psi} \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} \cdot c \cdot \sin\psi}{c^2 \cdot \cos^2\psi} =$$

$$= \frac{e^{-c \cdot \cos\psi} \cdot \left(\frac{d^2x}{d\psi^2} + \frac{dx}{d\psi} \cdot \left(c \cdot \sin\psi + \operatorname{tg}\psi \right) \right)}{c \cdot \cos\psi} \,; \qquad (17)$$

$$\left(\frac{b}{c} \cdot x \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} \right)_{\psi}^{/} = \frac{b}{c} \cdot \frac{dx}{d\psi} \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} + b \cdot x \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} \cdot \sin\psi = e^{-c \cdot \cos\psi} \cdot \left(\frac{b}{c} \cdot \frac{dx}{d\psi} + b \cdot x \cdot \sin\psi \right). \qquad (18)$$

Подставим результаты преобразований (17, 18) в формулу (16):

$$\frac{e^{-c \cdot \cos\psi} \cdot \left(\frac{d^2x}{d\psi^2} + \frac{dx}{d\psi} \cdot \left(c \cdot \sin\psi + \operatorname{tg}\psi \right) \right)}{c \cdot \cos\psi} - e^{-c \cdot \cos\psi} \cdot \left(\frac{b}{c} \cdot \frac{dx}{d\psi} + b \cdot x \cdot \sin\psi \right) = -b \cdot x \cdot \sin\psi \cdot e^{-c \cdot \cos\psi} \,;$$

$$\frac{d^2x}{d\psi^2} = \frac{dx}{d\psi} \cdot \left(-\operatorname{tg}\psi + b \cdot \cos\psi - c \cdot \sin\psi \right). \qquad (19)$$

Получена система дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\psi^2} = \frac{dx}{d\psi} \cdot \left(-\operatorname{tg}\psi + b \cdot \cos\psi - c \cdot \sin\psi \right); \\ \frac{d^2y}{d\psi^2} = \frac{dy}{d\psi} \cdot (\operatorname{ctg}\psi + b \cdot \cos\psi - c \cdot \sin\psi). \end{cases} \qquad (20)$$

Далее для удобства будем записывать:

$$\begin{cases} \frac{dx'}{d\psi} = x' \cdot \left(-\operatorname{tg}\psi + b \cdot \cos\psi - c \cdot \sin\psi \right); \\ \frac{dy'}{d\psi} = y' \cdot (\operatorname{ctg}\psi + b \cdot \cos\psi - c \cdot \sin\psi). \end{cases}$$

Выполним разделение переменных и произведем интегрирование:

$$\begin{cases} \int \frac{dx'}{x'} = \int \left(-\operatorname{tg}\psi + b \cdot \cos\psi - c \cdot \sin\psi \right) \cdot d\psi; \\ \int \frac{dy'}{y'} = \int (\operatorname{ctg}\psi + b \cdot \cos\psi - c \cdot \sin\psi) \cdot d\psi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln|x'| = \ln|C_{X1} \cdot \cos\psi| + b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi; \\ \ln|y'| = \ln|C_{Y1} \cdot \sin\psi| + b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\psi} = C_{X1} \cdot \cos\psi \cdot e^{b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi}; \\ \dfrac{dy}{d\psi} = C_{Y1} \cdot \sin\psi \cdot e^{b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi}. \end{cases} \qquad (21)$$

Исходя из системы уравнений (2), получаем зависимость:

$$\frac{dx}{d\psi} = -\operatorname{ctg}\psi \cdot \frac{dy}{d\psi}. \qquad (22)$$

Подставим формулы из системы (21) в выражение (22):

$$C_{X1} \cdot \cos\psi \cdot e^{b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi} = -C_{Y1} \cdot \cos\psi \cdot e^{b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi}.$$

Таким образом, постоянные величины интегрирования связаны зависимостью: $C_{X1} = -C_{Y1}$.

Введем единое обозначение постоянных величин: $C_{X1} = C_1$; $C_{Y1} = -C_1$.

Окончательно, система из двух дифференциальных уравнений первого порядка примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\psi} = C_1 \cdot \cos\psi \cdot e^{b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi}; \\ \dfrac{dy}{d\psi} = -C_1 \cdot \sin\psi \cdot e^{b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi}. \end{cases} \qquad (23)$$

Сравнив системы уравнений (2) и (23), получаем выражение для радиуса кривизны:

$$R = C_1 \cdot e^{b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi}. \qquad (24)$$

Таким образом, исходя из заданного выражения (3), получаем:

$$a + b \cdot x + c \cdot y = C_1 \cdot e^{b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi}. \qquad (25)$$

Найдем решение системы (23). Первое уравнение:

$$\frac{dx}{d\psi} = C_1 \cdot \cos\psi \cdot e^{b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi}.$$

Выполним преобразования [1, 2]:

$$b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi = d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc}); \; d = \sqrt{b^2 + c^2}; \; \cos\psi_{bc} = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}; \; \sin\psi_{bc} = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}};$$

$$\cos\psi = \cos((\psi + \psi_{bc}) - \psi_{bc}) = \cos(\psi + \psi_{bc}) \cdot \cos\psi_{bc} + \sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot \sin\psi_{bc} =$$

$$= \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} \cdot \cos(\psi + \psi_{bc}) + \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} \cdot \sin(\psi + \psi_{bc}) = \frac{b}{d} \cdot \cos(\psi + \psi_{bc}) + \frac{c}{d} \cdot \sin(\psi + \psi_{bc});$$

$$\frac{dx}{d\psi} = C_1 \cdot \left(\frac{b}{d} \cdot \cos(\psi + \psi_{bc}) + \frac{c}{d} \cdot \sin(\psi + \psi_{bc}) \right) \cdot e^{d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})};$$

$$\int dx = \frac{C_1 \cdot b}{d} \cdot \int \cos(\psi + \psi_{bc}) \cdot e^{d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})} \cdot d\psi + \frac{C_1 \cdot c}{d} \cdot \int \sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot e^{d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})} \cdot d\psi =$$

$$= C_{2x} + \frac{C_1 \cdot b}{d^2} \cdot e^{d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})} + \frac{C_1 \cdot c}{d^2} \cdot \int d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot e^{d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})} \cdot d(\psi + \psi_{bc});$$

Второе уравнение:

$$\frac{dy}{d\psi} = -C_1 \cdot \sin\psi \cdot e^{b \cdot \sin\psi + c \cdot \cos\psi};$$

$$\sin\psi = \sin((\psi + \psi_{bc}) - \psi_{bc}) = \sin(\psi + \psi_{bc}) \cdot \cos\psi_{bc} - \cos(\psi + \psi_{bc}) \cdot \sin\psi_{bc} =$$

$$= \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} \cdot \sin(\psi + \psi_{bc}) - \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} \cdot \cos(\psi + \psi_{bc}) = -\frac{c}{d} \cdot \cos(\psi + \psi_{bc}) + \frac{b}{d} \cdot \sin(\psi + \psi_{bc});$$

$$\frac{dy}{d\psi} = C_1 \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \cos(\psi + \psi_{bc}) - \frac{b}{d} \cdot \sin(\psi + \psi_{bc}) \right) \cdot e^{d \cdot \sin(\psi + \psi_{bc})};$$

$$\int dy = \frac{C_1 \cdot c}{d} \cdot \int \cos(\psi+\psi_{bc}) \cdot e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} \cdot d\psi - \frac{C_1 \cdot b}{d} \cdot \int \sin(\psi+\psi_{bc}) \cdot e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} \cdot d\psi =$$

$$= C_{2y} + \frac{C_1 \cdot c}{d^2} \cdot e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} - \frac{C_1 \cdot b}{d^2} \cdot \int d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc}) \cdot e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} \cdot d(\psi+\psi_{bc});$$

Получаем:

$$x(\psi) = C_{2x} + \frac{C_1 \cdot b}{d^2} \cdot e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} + \frac{C_1 \cdot c}{d^2} \cdot \int d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc}) \cdot e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} \cdot d(\psi+\psi_{bc});$$

$$y(\psi) = C_{2y} + \frac{C_1 \cdot c}{d^2} \cdot e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} - \frac{C_1 \cdot b}{d^2} \cdot \int d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc}) \cdot e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} \cdot d(\psi+\psi_{bc});$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора:

$$e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} \approx 1 + \frac{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})}{1!} + \frac{d^2 \cdot \sin^2(\psi+\psi_{bc})}{2!} + \frac{d^3 \cdot \sin^3(\psi+\psi_{bc})}{3!}. \tag{26}$$

Тогда получаем выражение:

$$d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc}) \cdot e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} \approx d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc}) + \frac{d^2 \cdot \sin^2(\psi+\psi_{bc})}{1!} + \frac{d^3 \cdot \sin^3(\psi+\psi_{bc})}{2!} + \frac{d^4 \cdot \sin^4(\psi+\psi_{bc})}{3!}.$$

Примем обозначение для первообразной функции после нахождения неопределенного интеграла [6]:

$$Ies(\psi) = \int d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc}) \cdot e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} \cdot d(\psi+\psi_{bc}) \approx -d \cdot \cos(\psi+\psi_{bc}) + d^2 \cdot \left(\frac{\psi+\psi_{bc}}{2} - \frac{\sin(\psi+\psi_{bc}) \cdot \cos(\psi+\psi_{bc})}{2} \right) +$$

$$+ \frac{d^3}{2!} \cdot \left(\frac{\cos^3(\psi+\psi_{bc})}{3} - \cos(\psi+\psi_{bc}) \right) + \frac{d^4}{3!} \cdot \left(-\frac{3 \cdot \sin(\psi+\psi_{bc}) \cdot \cos(\psi+\psi_{bc})}{8} - \frac{\sin^3(\psi+\psi_{bc}) \cdot \cos(\psi+\psi_{bc})}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{3 \cdot (\psi+\psi_{bc})}{8} \right). \tag{27}$$

Определим постоянные величины интегрирования:

$$C_1 = (a + b \cdot x_0 + c \cdot y_0) \cdot e^{-d \cdot \sin(\psi_0+\psi_{bc})}; \tag{28}$$

$$C_{2x} = x_0 - (a + b \cdot x_0 + c \cdot y_0) \cdot \left(\frac{b}{d^2} + \frac{c}{d^2} \cdot Ies(\psi_0) \cdot e^{-d \cdot \sin(\psi_0+\psi_{bc})} \right); \tag{29}$$

$$C_{2y} = y_0 - (a + b \cdot x_0 + c \cdot y_0) \cdot \left(\frac{c}{d^2} - \frac{b}{d^2} \cdot Ies(\psi_0) \cdot e^{-d \cdot \sin(\psi_0+\psi_{bc})} \right). \tag{30}$$

Окончательно представим решение системы уравнений в виде:

$$x(\psi) = C_{2x} + \frac{C_1 \cdot b}{d^2} \cdot e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} + \frac{C_1 \cdot c}{d^2} \cdot Ies(\psi); \tag{31}$$

$$y(\psi) = C_{2y} + \frac{C_1 \cdot c}{d^2} \cdot e^{d \cdot \sin(\psi+\psi_{bc})} - \frac{C_1 \cdot b}{d^2} \cdot Ies(\psi). \tag{32}$$

Заключение. Описанная методика представляет собой перспективное направление в области дифференциальной геометрии, имеет большое прикладное значение при решении задач теоретической и прикладной механики, автоматизированного проектирования. Ближайшей целью исследований является проведение практических расчетов по данной методике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы: Справочник. Под ред. Богданова Ю.С. – Мн.: Выш. шк. 1995. – 380 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: 1973. – 832 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: «Наука», 1965. – 704 с.
4. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: «Факториал», 1997. – 512 с.
5. Жуковец В.Н. Профиль плоского кулачка в виде замкнутой кривой, описанной системой уравнений в параметрическом виде. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2006. № 1. С. 76–86.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 1. Элементарные функции. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 632 с.