УДК 37+(517.977.52)

С.Я. ЖУКОВИЧ

ПРИНЦИП МИНИМУМА ГАМИЛЬТАНИАНА ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССОМ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Филиал Белорусского национального технического университета «Борисовский государственный политехнический колледж»

Предложена математическая модель обучения на основе теории управления в виде неоднородного линейного дифференциального уравнения. Из принципа минимума гамильтаниана для автономных систем получены аналитические формулы и графики для оптимального программного управления и оптимальной траектории.

Ключевые слова: *математическая модель процесса дистанционного обучения, теория оптимального управления.*

Введение

В настоящее время актуальна дистанционная форма обучения. Однако при такой форме обучения преподаватель находится удаленно и не имеет полной обратной связи с обучаемым, что может негативно отразиться на качестве образовательной услуги [1].

Поэтому требуется построить математическую модель процесса дистанционного обучения и решить задачу оптимального управления, максимизируя уровень знаний обучаемого при минимизации учебной нагрузки.

1. Математическая модель процесса дистанционного обучения на основе теории управления

Процесс обучения на дистанционном курсе можно описать с помощью неоднородного линейного дифференциального уравнения [2]

$$\frac{dZ}{dt} = -kZ + \sum_{i=0}^{5} k_i u_i(t), \qquad (1.1)$$

где $Z = Z(t)$ − текущий уровень (объем) усвоенного учебного материала (в академических часах),

k − коэффициент забывания, который показывает, какую часть от текущего уровня усвоенного учебного материала Z обучаемый забывает в среднем за сутки.

u_0 – программное управление, задаваемое в виде заранее запланированной нагрузки, осуществляемой преподавателем онлайн (в академических часах),

u_2 – программное управление в виде нагрузки для самостоятельного обучения,

u_4 – программное управление на дистанционном курсе в виде просмотра обучаемым видеолекций.

k_0 − коэффициент усвоения учебного материала при обучении с помощью преподавателя;

u_1 – управление процессом повторения посредством контрольных и самостоятельных работ после обучения преподавателем (u_1 является управлением с обратной связью),

k_1 − коэффициент усвоения для управления u_1;

k_2 − коэффициент усвоения для управления u_2;

u_3 – управление с обратной связью при повторении материала, изученного обучаемым самостоятельно,

k_3 − коэффициент усвоения для управления u_3;

k_4 − коэффициент усвоения для управления u_4;

u_5 – управление с обратной связью при повторении материала, изученного обучаемым в виде видеолекций,

k_5 − коэффициент усвоения для управления u_5.

Решение уравнения (1.1) представляется в виде

$$Z(t) = Z_0 e^{-\int_0^t k(v)dv} + e^{-\int_0^t k(v)dv} \int_0^t \sum_{i=0}^{5} k_i u_i(\tau) e^{\int_0^t k(v)dv} d\tau, \qquad (1.2)$$

где Z_0 − начальный уровень усвоенного учебного материала при $t = t_0$,

Для устойчивого обучения необходимо обеспечить переход знаний у обучаемых из кратковременной памяти в долговременную. Это обеспечивается путем применения управления с обратной связью с постепенным уменьшением коэффициента забывания k по закону

$$k(n) = ke^{-n}. \qquad (1.3)$$

Также при повторении увеличиваются по некоторому закону все коэффициенты усвоения, стремясь к единице при достаточно большом числе повторений.

2. Математический метод оптимального программного управления процессом дистанционного обучения

Решим задачу оптимального программного управления, осуществляемого только с помощью преподавателя онлайн $(u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0, u_5 = 0)$. Для решения задачи будем применять один из наиболее эффективных методов в теории оптимального управления – метод Лагранжа-Понтрягина для непрерывных управляемых процессов. [4].

Рассмотрим функционал качества управления обучением

$$J(u_0, Z, t) = \int_0^T (u_0(t) - Z(t))dt. \qquad (2.1)$$

где T − конечный момент времени (сдача экзамена или зачета).

Для оптимального управления процессом обучения функционал (2.1) должен принимать минимальное значение на интервале [0, T]. Таким образом, уровень усвоенного учебного материала максимизируется, а учебная нагрузка минимизуется.

Гамильтониан, соответствующий уравнению (1.1) и функционалу (2.1)

$$H = [-k\,Z + k_0 u_0]p + (u_0 - Z)\,p_0, \qquad (2.2)$$

где $p = p(t)$, $p_0 = p_0(t)$ – дополнительные переменные,

k – коэффициент забывания, являющийся константой из-за отсутствия режима повторения при программном управлении процессом обучения;

k_0 – коэффициент усвоения учебного материала при обучении с помощью преподавателя, являющийся константой из-за отсутствия режима повторения при программном управлении процессом обучения.

Обычно рассматривают два случая: $p_0(t) \equiv 0$ и $p_0(t) \neq 0$. Если требуется минимизировать определенный функционал качества управления, то часто полагают $p_0(t) = 1$ [5].

Уравнение (1.1) автономно, то есть не содержит в явном виде время t, поэтому гамильтониан (2.2) в соответствии с принципом минимума Понтрягина (который по сравнению с принципом максимума Понтрягина имеют более тесную связь с вариационным исчислением, принципом Гамильтона в механике и динамическим программированием Беллмана [5]) для оптимального управления тождественно равен нулю [4]:

$$H(p(t), u_0^*(t), Z^*(t)) \equiv 0,\ 0 \le t \le T \qquad (2.3)$$

Из (2.3) получаем выражение для непрерывного программного управления:

$$u_0^*(t) = \frac{Z^*(kp+1)}{k_0\,p+1}. \qquad (2.4)$$

Составим систему канонических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial Z} \end{cases}. \qquad (2.5)$$

Из второго уравнения (2.5) и (2.2) получаем дифференциальное уравнение для нахождения дополнительной переменной p

$$\frac{dp}{dt} = kp + 1. \qquad (2.6)$$

Общим решением уравнения (2.6) является функция

$$p(t) = p(0)\,e^{kt} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}e^{kt}. \qquad (2.7)$$

Постоянную интегрирования $p(0)$ находим из равенства нулю гамильтониана H в момент времени $t = 0$

$$p(0) = \frac{Z_0 - u_0(0)}{k_0 u_0(0) - kZ_0}, \qquad (2.8)$$

где $u_0(0)$ – значение функции управления в момент времени $t = 0$.

Таким образом, получается следующая математическая модель оптимальной траектории:

$$Z^*(u_0^*, t) = Z_0 e^{-kt} + e^{-kt}\int_0^t k_0 u_0^*(\tau) e^{kt}\,d\tau. \qquad (2.9)$$

где дополнительная переменная

$$p = \frac{Z_0 - u_0(0)}{k_0 u(0) - kZ_0}e^{kt} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}e^{kt}. \qquad (2.10)$$

Пусть имеются конкретные параметры процесса: $T = 128$, $Z_1 = 26$, $k = 0{,}03$, $k_0 = 0{,}9$. Тогда графики оптимального программного управления и оптимальной траектории для разных начальных условий представлены на рисунках 1, 2.

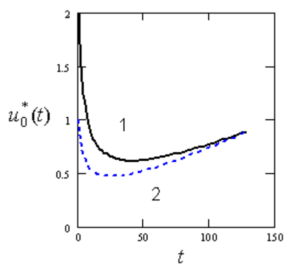

Рис. 1. Оптимальное программное управление. Кривая 1 – $Z_0 = 8$, $u_0(0) = 2$, кривая 2 – $Z_0 = 4$, $u_0(0) = 1$

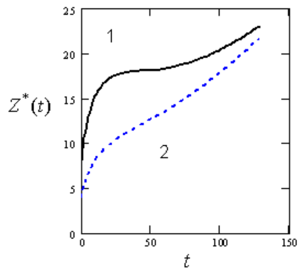

Рис. 2. Оптимальная траектория для программного управления. Кривая 1 – $Z_0 = 8$, $u_0(0) = 2$, кривая 2 – $Z_0 = 4$, $u_0(0) = 1$

При реальном учебном процессе программные управления u_0, u_2, u_4 заранее заданы и являются кусочно-непрерывными. При этом обучаемый усваивает к концу семестра только 4-7 академических часов из 34 часов, данных при программном управлении.

Таким образом, обучаемый может усвоить нужный объем учебного материала при программном управлении только в том случае, если он имеет очень высокие коэффициенты усвоения (близкие к единице) и очень низкий коэффициент забывания (близкий к нулю).

Во всех остальных случаях требуется подключать управление с обратной связью в виде повторения ранее изученного учебного материала.

Заключение

Процесс обучения на дистанционном курсе можно описать с помощью неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dZ}{dt} = -kZ + \sum_{i=0}^{5} k_i u_i(t).$$

Обучаемый может усвоить нужный объем учебного материала при программном управлении только в том случае, если он имеет очень высокие коэффициенты усвоения (близкие к единице) и очень низкий коэффициент забывания (близкий к нулю).

Во всех остальных случаях требуется подключать управление с обратной связью в виде повторения ранее изученного учебного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Листопад, Н.И., Воротницкий, Ю.И.** Электронные средства обучения: состояние, проблемы и перспективы / **Н.И. Листопад, Ю.И. Воротницкий** // Высшая школа – 2008. – №6 – С. 6–14.

2. **Жукович С.Я.** Математический метод повышения качества обучения в вузе / **С.Я. Жукович** // Вестник Белорусского государственного экономического университета – 2012. – №5. – С.36–42.

3. **Майер, Р.В.** Кибернетическая педагогика: Имитационное моделирование процесса обучения / **Р.В. Майер.** – Глазов, ГГПИ, 2013. – 138 с.

4. **Понтрягин, Л.С.** Математическая теория оптимальных процессов / **Л.С. Понтрягин** [и др.]. – Изд.2. М.: Наука 1969. – 384 с.

5. **Чаки, Ф.** Современная теория управления. Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы / **Ф. Чаки.** – М:Мир, – 1975. – 420 с.

REFERENCES

1. **Listopad, N.I., Vorotnickij, Ju.I.** Jelektronnye sredstva obuchenija: sostojanie, problemy i perspektivy / **N.I. Listopad, Ju.I. Vorotnickij** // Vysshaja shkola – 2008. – №6 – S. 6–14.

2. **Zhukovich S.Ya.** Mathematical method for improving the quality of education at a university / **S.Ya. Zhukovich** // Ves-tnik Belorusskogo gosudarstvennogo jekonomicheskogo universiteta – 2012. – №5. – S.36–42.

3. **Mayer, R.V.** Cyber Pedagogy: Simulation of the Learning Process / **R.V. Mayer.** – Glazov, GGPI, 2013. – 138 c.

4. **Pontrjagin, L.S.** Mathematical theory of optimal processes / **L.S. Pontrjagin** [i dr.]. – Izd.2. M.: Nauka 1969. – 384 s.

5. **Chaki, F.** Modern control theory. Non-linear, optimal and adaptive systems / **F. Chaki.** – M:Mir, – 1975. – 420 s.

S.Ya. Zhukovich

HAMILTANIAN MINIMUM PRINCIPLE FOR OPTIMUM CONTROL OF THE DISTANCE LEARNING PROCESS

Branch of the Belarusian National Technical University “Borisov State Polytechnic College”

A mathematical learning model based on control theory in the form of an inhomogeneous linear differential equation is proposed. Analytical formulas and graphs for optimal program control and optimal trajectory are obtained from the principle of the minimum of the Hamiltonian for autonomous systems.

Keywords: *mathematical model of the distance learning process, optimal control theory.*

Жукович Сергей Яковлевич, инженер-программист филиала БНТУ «Борисовский государственный политехнический колледж». Научные интересы связаны с математическим моделированием процесса обучения, разработкой методов оптимального управления процессом дистанционного обучения, разработкой автоматизированной системы дистанционного обучения.

Siarhei Ya. Zhukovich, software engineer of the Borisov State Polytechnic College branch of BNTU. Scientific interests are related to mathematical modeling of the learning process, the development of methods for optimal control of the distance learning process, the development of an automated distance learning system.

Email: s.zhuk@tut.by