

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-229-235>

УДК 519

Применение соотношений теории течения для решения задач установившегося роста трещины

Канд. физ.-мат. наук, доц. М. А. Гундина¹⁾, О. В. Юхновская¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Для представления локальных полей перемещений в задаче об установившемся росте трещины, которую содержит пластина из несжимаемого материала, используется формула интенсивности деформации в виде многочлена второй степени. Рассматривается случай плоской деформации для упругопластического материала. Решение получено методом асимптотических разложений. Численный анализ проводился для первого члена разложения. Целью исследований являлся процесс получения аналитических решений прикладных задач теории пластичности: нахождение компонентов тензоров напряжений и деформаций. В статье представлен вариант метода асимптотических разложений и его применения для задачи о распределении напряженно-деформированного состояния в упругопластическом образце с трещиной. Метод асимптотических разложений имеет некоторые преимущества по сравнению с численным подходом при изучении напряженно-деформированного состояния в окрестности трещины. Он позволяет установить точные количественные соотношения между радиальным компонентом, углом и компонентами тензора напряжений и деформаций. Еще одно достоинство такого метода заключается в возможности составления механических характеристик объекта на стадии его проектирования. Разработана система дифференциальных уравнений, содержащая V_0 и ее производные до третьего порядка. Приведен пример распределения напряжений в окрестности вершины трещины в стальном образце, полученного в компьютерной системе численным методом. Построена диаграмма деформирования для стали 40. Результаты исследования могут использоваться при построении полей напряжений и деформаций в окрестности трещины, а также для прогнозирования дальнейшего направления развития трещины.

Ключевые слова: рост трещины, упругопластический материал, метод асимптотических разложений, интенсивность деформации, вектор перемещений, напряженно-деформированное состояние

Для цитирования: Гундина, М. А. Применение соотношений теории течения для решения задач установившегося роста трещины / М. А. Гундина, О. В. Юхновская // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 229–235. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-229-235>

Application of Flow Theory Relations for Solving Problems of Steady-State Crack Growth

М. А. Hundzina¹⁾, О. В. Yuhnovskaya¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. To represent local displacement fields in the problem of the steady-state growth of a crack, which contains a plate of incompressible material, the strain intensity formula is used in the form of a polynomial of the second degree. The case of plane deformation for an elastoplastic material is considered. The solution is obtained by the method of asymptotic expansions. Numerical analysis is carried out for the first term of the expansion. The aim of the work is the process of obtaining analytical solutions to applied problems of the theory of plasticity: finding the components of stress and strain tensors. The paper considers a variant of the method of asymptotic expansions and its application for the problem of the distribution of the stress-strain state in an elastoplastic specimen with a crack. The method of asymptotic expansions has some advantages over the numerical approach in studying the stress-strain state in the vicinity of a crack. It allows to establish exact quantita-

Адрес для переписки

Гундина Мария Анатольевна
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-67-84
hundzina@bntu.by

Address for correspondence

Hundzina Maryia A.
Belarusian National Technical University
22, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-67-84
hundzina@bntu.by

tive relationships between the radial component, the angle, and the components of the stress and strain tensor. Another advantage of this method is the possibility of compiling the mechanical characteristics of an object at the design stage. A system of differential equations has been developed that contains V_0 and its derivatives up to the third order. An example of stress distribution in the vicinity of a crack tip in a steel sample, obtained in a computer system by a numerical method, is given. The deformation diagram has been constructed for the material steel 40. The research results can be used to construct stress and strain fields in the vicinity of a crack, as well as to predict the further direction of crack development.

Keywords: crack growth, elastoplastic material, asymptotic expansion method, strain rate, displacement vector, stress-strain state

For citation: Hundzina M. A., Yuhnovskaya O. V. (2022) Application of Flow Theory Relations for Solving Problems of Steady-State Crack Growth. *Science and Technique*. 21 (3), 229–235. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-229-235> (in Russian)

Введение

Процесс получения аналитических решений прикладных задач теории пластичности, а именно – нахождение компонентов тензоров напряжений и деформаций, описывающих напряженно-деформированное состояние (НДС) упругопластических тел и конструкций, сопряжен с некоторыми математическими и вычислительными трудностями. Для этого есть несколько причин. В первую очередь это связано с нелинейностью дифференциальных уравнений, описывающих состояние материала, и наличием сингулярности возникающих полей напряжений и деформаций в окрестности дефекта. Широкое распространение при решении такого рода задач получили численные способы, такие как метод конечных элементов и метод граничных элементов (рис. 1).

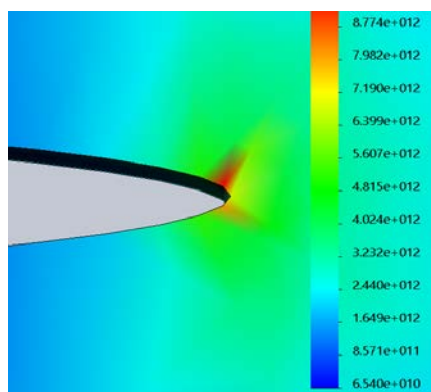


Рис. 1. Распределение напряжений в окрестности вершины трещины в стальном образце, полученное в компьютерной системе численным методом

Fig. 1. Stress distribution in the vicinity of a crack tip in a steel sample, obtained in a computer system by a numerical method

Часто приходится рассматривать задачи, для которых вопрос устойчивости решения остается открытым. Кроме того, даже при небольшом изменении исходных данных в случае численного подхода решать задачу нужно заново, что не позволяет проводить комплексный каче-

ственный анализ возникающих эффектов в материале. А это – явный недостаток в сравнении с аналитическими подходами.

Рассматриваемый в статье вариант метода асимптотических разложений может быть применен для задачи о распределении напряженно-деформированного состояния в упругопластическом образце с трещиной. Построение аналитических зависимостей компонентов напряжений и деформаций от полярного угла и расстояния от вершины трещины, разработка математического аппарата для диагностики прочностных характеристик элементов конструкций, анализ поведения материала при растягивающей нагрузке и учете упругопластических эффектов – все это является важным и актуальным с точки зрения прогнозирования ресурса деталей машин и механизмов, а также развития прикладной математики и соответствующих численных и аналитических методов.

Нелинейные подходы в задачах механики разрушения для детального анализа закономерностей изменения упругопластических полей деформаций и напряжений в окрестности фиксированной и развивающейся трещины описаны в работах отечественных и зарубежных ученых. Подробный анализ НДС материала приводится в публикациях В. И. Астафьева [1], В. Д. Клюшниковой [2], В. З. Партона [3], Ю. М. Плескачевского [4], Э. И. Старовойтова [5], Л. В. Степановой [6], Г. П. Черепанова [7], А. В. Чигарева [8], где показано, что процесс развития деформаций в упрочняющихся материалах сложный и сопровождается физическими явлениями, которые требуют учета большого количества факторов. К ним относятся наличие нелинейной диаграммы деформирования материала, влияние границ зон активного нагружения и разгрузки вблизи трещины, эффект упрочнения материала.

В [1] определяется напряженное состояние вблизи вершины наклонной трещины в нелинейной механике разрушения. Определяющие

соотношения задаются в виде степенной зависимости. Для этого используется уравнение совместности в напряжениях, в которое вводится функция напряжений Эри, и формулируется двухточечная краевая задача. Получившаяся задача решается численно для случаев плоского напряженного состояния и плоской деформации. В [9] Ю. Н. Радаев рассматривает математическую модель распределения напряжений в пластической зоне у вершины трещины нормального отрыва (трещины типа I) в идеально-пластическом теле в условиях плоского напряженного состояния. В качестве критерия текучести принималось условие текучести Мизеса. В процессе исследования были получены точные формулы для вычисления напряжений в пределах локализованной у вершины трещины пластической зоны. В [10] приводятся первые пять коэффициентов асимптотического поля у вершины трещины для изотропных и анизотропных горных пород с использованием различных геометрических параметров и параметров анизотропии.

Рассматриваемый метод асимптотических разложений имеет некоторые преимущества по сравнению с численным подходом при изучении НДС в окрестности трещины. Он позволяет установить точные количественные соотношения между радиальным компонентом, углом и компонентами тензора напряжений и деформаций. Еще одно достоинство такого метода заключается в возможности составления механических характеристик объекта на стадии его проектирования. Метод асимптотических разложений позволяет получить представление решения задачи в общем виде, охватывающем различные случаи и удобным для выполнения анализа.

Решение задачи представляется в виде ряда, содержащего параметр, причем каждый следующий член разложения вносит меньший вклад по сравнению с предыдущим членом. Асимптотические разложения находятся так, что коэффициенты этих рядов разложений конструируются из решений нескольких предельных краевых задач (для первого приближения, второго и т. д.). Во многих случаях для того, чтобы охарактеризовать поля в окрестности вершины трещины, достаточно главного члена асимптотического разложения. С целью исключения громоздких выражений в статье рассматриваются только первые члены асимптотических разложений.

Г. П. Черепанов для случая плоского напряженного состояния [11] дал точное решение

задачи о двухосном растяжении плоскости с круговым отверстием методом асимптотических разложений, определил класс точных решений плоской упругопластической задачи. Д. Д. Ивлев [12] показал, что найденные им четыре приближения методом малого параметра для задач Л. А. Галина и Г. П. Черепанова полностью совпадают с соответствующими разложениями точных решений по тому же малому параметру. Схема Д. Д. Ивлева позволяет определить и последующие приближения. Однако оказалось, что для описания точного решения Л. А. Галина достаточно двух, а Г. П. Черепанова – четырех приближений. Н. Н. Остросаблин [13] получил решение для перемещений в задаче Л. А. Галина.

Цель исследований авторов – изучение построения аналитических зависимостей компонентов напряжений и деформаций от полярного угла и расстояния от вершины трещины, разработка математического аппарата для диагностики прочностных характеристик элементов конструкций, а также анализ поведения материала при растягивающей нагрузке и учете упругопластических эффектов. В статье представлены метод асимптотических разложений и распределение напряжений в окрестности вершины трещины в стальном образце, полученное в компьютерной системе численным методом.

Основная часть

Формулировка задачи: компоненты вектора перемещений представляются в виде функций от двух переменных $u_3 = 0$, $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$. Такое деформированное состояние, в котором $\varepsilon_{3i} = 0$, называется состоянием плоской деформации. Среднее напряжение для случая плоской деформации имеет вид

$$\sigma = \frac{\sigma_{rr}(r, \varphi) + \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi)}{2}. \quad (1)$$

Девииатор тензора напряжений определяется как

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} & 2\sigma_{r\varphi} & 0 \\ 2\sigma_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Запишем необходимые уравнения равновесия в полярной системе координат:

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\sigma}_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (\dot{\sigma}_{rr} - \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{\sigma}_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\dot{\sigma}_{r\varphi}}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

где r – радиус, соотнесенный к длине трещины; σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ – физические проекции компонентов тензора напряжений.

Нагрузки на берегах трещины равны нулю, поскольку они свободны от усилий. Отсюда следуют граничные условия задачи, учитывая условия симметрии:

$$\sigma_{r\varphi} \Big|_{\varphi=\pm\pi} = 0; \quad (5)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} \Big|_{\varphi=\pm\pi} = 0. \quad (6)$$

Численно-аналитическое решение

Компоненты вектора приращений [14]:

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{n \geq 0} U_n(\varphi) r^{\lambda_n}; \quad (7)$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = \sum_{n \geq 0} V_n(\varphi) r^{\lambda_n}. \quad (8)$$

Соотношения Коши в полярной системе координат имеют вид:

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n U_n r^{\lambda_n-1}; \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = u_{\varphi,\varphi} / r + u_r / r = \sum_{n=0}^{\infty} (V'_n + U_n) r^{\lambda_n-1}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} (u_{\varphi,r} + u_{r,\varphi} / r - u_\varphi / r) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n V_n + U'_n - V_n) r^{\lambda_n-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

где ε_{rr} , $\varepsilon_{r\varphi}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – физические проекции компонентов тензора деформаций; u_r , u_φ – компоненты вектора перемещений.

Компоненты вектора перемещений представляются в виде функций от двух переменных. Ограничимся случаем установившегося роста, когда под скоростью будем понимать

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} - v \left(\cos \varphi \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right), \quad (12)$$

где v – скорость роста трещины.

Тогда скорости компонентов тензора деформаций примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} &= \\ &= -v \sum_{n=0}^{\infty} (\cos \varphi \lambda_n (\lambda_n - 1) U_n - \sin \varphi \lambda_n U'_n) r^{\lambda_n-2}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= -v \sum_{n=0}^{\infty} (\cos \varphi (V'_n + U_n) (\lambda_n - 1) - \\ &\quad - \sin \varphi (V_n + U'_n)) r^{\lambda_n-2}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= -v \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\cos \varphi (\lambda_n V_n + U'_n - V_n) (\lambda_n - 1) - \\ &\quad - \sin \varphi (\lambda_n V'_n + U''_n - V'_n)) r^{\lambda_n-2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Наличие нелинейного участка диаграммы σ – ε для упругопластических материалов выявлено давно и подтверждено в ряде известных экспериментов, которые описаны в [15]. Для упругопластических материалов линейная зависимость деформаций от напряжений не соответствует экспериментам. При аппроксимации диаграммы σ – ε квадратичной параболой имеет место равенство

$$\varepsilon = B_2 \sigma^2, \quad (16)$$

где B_2 – числовой параметр, который характеризует нелинейность диаграммы деформирования, его значение находится из эксперимента на растяжение соответствующего материала.

Тогда связь между напряжениями и деформациями для упругопластического материала выражается формулами [16]:

$$\sigma = A_1 \varepsilon - A_2 \varepsilon^2; \quad (17)$$

$$\varepsilon = \sigma / A_1 - B_2 \sigma^2, \quad (18)$$

где A_1 , A_2 – некоторые параметры нелинейности.

Известно, что в статической задаче о растяжении прямоугольной пластины, содержащей центральную прямолинейную трещину, связь приращений девиаторов напряжений и деформаций может быть представлена в следующем виде:

$$\delta s_{ij} = \delta e_{ij} - \delta \Phi(\Gamma) e_{ij}, \quad i, j = r, \varphi, \quad (19)$$

где δs_{ij} , δe_{ij} – приращения девиаторов напряжений и деформаций.

Функция интенсивности деформаций может находиться по формуле

$$\Phi(\Gamma) = B_2 \Gamma^2, \quad (20)$$

где $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}$; G – модуль сдвига материала.

В соотношении (11) значение коэффициента B_2 подставляется, соотнесенное на удвоен-

ный квадрат модуля сдвига для соответствующего материала [17]. Получим коэффициент B_2 для стали 40 по экспериментальным значениям напряжений и деформаций [18]. Если аппроксимирующая функция представляет собой квадратичную зависимость, то B_2 находится из уравнения

$$\sigma_{\text{экспер}} = B_2 \varepsilon_{\text{экспер}}^2 + b \varepsilon_{\text{экспер}} + c, \quad (21)$$

где $\sigma_{\text{экспер}}$, $\varepsilon_{\text{экспер}}$ – значения эквивалентного напряжения и пластической деформации, полученные из опыта на растяжение.

Для стали 40 диаграмма деформирования представлена на рис. 2.

Значение коэффициента B_2 находится по методу наименьших квадратов из уравнений (13)–(15):

$$\begin{aligned} B_2 \sum_1^n \varepsilon_i^4 + b \sum_1^n \varepsilon_i^3 + c \sum_1^n \varepsilon_i^2 &= \sum_1^n \varepsilon_i^2 \sigma_i; \\ B_2 \sum_1^n \varepsilon_i^3 + b \sum_1^n \varepsilon_i^2 + c \sum_1^n \varepsilon_i &= \sum_1^n \varepsilon_i \sigma_i; \\ B_2 \sum_1^n \varepsilon_i^2 + b \sum_1^n \varepsilon_i + cn &= \sum_1^n \sigma_i, \end{aligned} \quad (22)$$

где ε_i , σ_i – текущее значение напряжения и деформации, полученное из эксперимента на растяжение; n – количество измерений.

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (\lambda_k (U_k \lambda_{n-k} U_{n-k} - U_k V'_{n-k} - U_k U_{n-k}) + V'_k V'_{n-k} + U_k V'_{n-k} + \\ &+ V'_k U_{n-k} + U_k U_{n-k} + \frac{3}{4} (\lambda_k (V_k \lambda_{n-k} V_{n-k} + V_k U'_{n-k} - V_k V_{n-k}) + U'_k \lambda_{n-k} V_{n-k} + U'_k U'_{n-k} - \\ &- U'_k V_{n-k} - V_k \lambda_{n-k} V_{n-k} - V_k U'_{n-k} + V_k V_{n-k}) r^{\lambda_k + \lambda_{n-k} - 2}; \\ \dot{E} &= \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (\lambda_k + \lambda_{n-k} - 2) (\lambda_k U_k \lambda_{n-k} U_{n-k} - \lambda_k U_k V'_{n-k} - \lambda_k U_k U_{n-k} + V'_k V'_{n-k} + U_k V'_{n-k} + \\ &+ V'_k U_{n-k} + U_k U_{n-k} + \frac{3}{4} (\lambda_k V_k \lambda_{n-k} V_{n-k} + \lambda_k V_k U'_{n-k} - \lambda_k V_k V_{n-k} + U'_k \lambda_{n-k} V_{n-k} + U'_k U'_{n-k} - \\ &- U'_k V_{n-k} - V_k \lambda_{n-k} V_{n-k} - V_k U'_{n-k} + V_k V_{n-k}) r^{\lambda_k + \lambda_{n-k} - 3} - \sin \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (\lambda_k U'_k \lambda_{n-k} U_{n-k} + \lambda_k U_k \lambda_{n-k} U'_{n-k} - \\ &- \lambda_k U'_k V'_{n-k} - \lambda_k U_k V''_{n-k} - \lambda_k U'_k U_{n-k} - \lambda_k U_k U'_{n-k} + V'_k V'_{n-k} + V'_k V''_{n-k} + U'_k V'_{n-k} + U_k V''_{n-k} + V'_k U_{n-k} + \\ &+ V'_k U'_{n-k} + U'_k U_{n-k} + U_k U'_{n-k} + \frac{3}{4} (\lambda_k V'_k \lambda_{n-k} V_{n-k} + \lambda_k V_k \lambda_{n-k} V'_{n-k} + \lambda_k V'_k U'_{n-k} + \lambda_k V_k U''_{n-k} - \lambda_k V'_k V_{n-k} - \\ &- \lambda_k V_k V'_{n-k} + U''_k \lambda_{n-k} V_{n-k} + U'_k \lambda_{n-k} V'_{n-k} + U''_k U'_{n-k} + U'_k U''_{n-k} - U''_k V_{n-k} - U'_k V'_{n-k} - V'_k \lambda_{n-k} V_{n-k} - \\ &- V_k \lambda_{n-k} V'_{n-k} - V'_k U'_{n-k} - V_k U''_{n-k} + V'_k U'_{n-k} + V'_k V'_{n-k}) r^{\lambda_k + \lambda_{n-k} - 3}. \end{aligned} \quad (26)$$

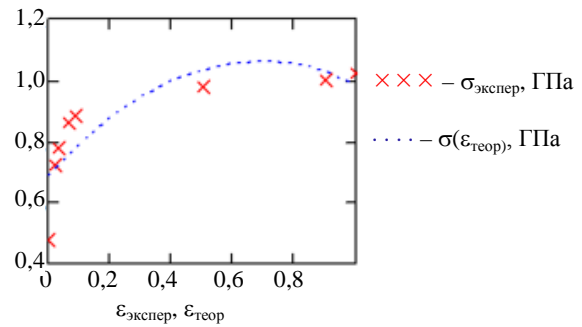


Рис. 2. Диаграмма деформирования стали 40
Fig. 2. Deformation diagram of steel 40

Рассмотрим общий вид для зависимости между компонентами девиаторов деформаций и напряжений при $i, j = r, \varphi$ [19]:

$$\dot{s}_{rr} = 2G_0 \dot{\varepsilon}_{rr} - p(E) \dot{E} \varepsilon_{rr}; \quad (23)$$

$$\dot{s}_{\varphi\varphi} = 2G_0 \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - p(E) \dot{E} \varepsilon_{\varphi\varphi}; \quad (24)$$

$$\dot{s}_{r\varphi} = 2G_0 \dot{\varepsilon}_{r\varphi} - p(E) \dot{E} \varepsilon_{r\varphi}, \quad (25)$$

где \dot{s}_{ij} , $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – приращение компонентов девиаторов напряжений и деформаций; $E = \varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + 3\varepsilon_{r\varphi}^2$ – функция интенсивности деформаций; $p(E) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n E^n$.

Тогда функция интенсивности деформаций и ее скорость примут вид:

Рассмотрим представление среднего напряжения также в виде асимптотического разложения:

$$\sigma = \sum_{n \geq 0} W_n(\varphi) r^{\lambda_n - 1}; \quad (28)$$

$$\dot{\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos \varphi (\lambda_n - 1) W_n - \sin \varphi W_n') r^{\lambda_n - 2}; \quad (29)$$

$$\dot{\sigma}_{rr} = \dot{s}_{rr} + \dot{\sigma}; \quad (30)$$

$$\dot{\sigma}_{\varphi\varphi} = \dot{s}_{\varphi\varphi} + \dot{\sigma}; \quad (31)$$

$$\dot{\sigma}_{r\varphi} = \dot{s}_{r\varphi}. \quad (32)$$

Анализ численных результатов

Для решения полученной системы нужна последовательность действий. Заметим, что

$$U_0 = \frac{-1}{(\lambda_0 + 1)V_0}. \quad (33)$$

Итоговая система дифференциальных уравнений будет содержать V_0 и ее производные до третьего порядка (рис. 3). Затем находятся компоненты тензора напряжений, выраженные через W_0 из системы.

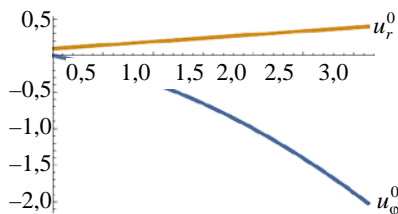


Рис. 3. Распределение компонентов вектора перемещений
Fig. 3. Distribution of displacement vector components

ВЫВОДЫ

1. В исследованиях Г. П. Никишкова [20] для показателя упрочнения $n = 3$ значения компонентов вектора перемещений $u_r(0) = -0,05797$, $u_r(\pi) = 0,26955$ в рамках теории течения для стали $u_r(0) = 0$, $u_r(\pi) = 0$ с относительной погрешностью 0,1 %. Различия в значениях обусловлены тем, что для стали в рамках деформационной теории более адекватно соответствует показатель $n = 5$, а при его увеличении абсолютные значения компонентов вектора перемещений возрастают.

2. Результаты исследований могут быть использованы при построении полей напряжений и деформаций в окрестности трещины, а также для прогнозирования дальнейшего направления развития трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астафьев, В. И. Распределение напряжений вблизи вершины наклонной трещины в нелинейной механике разрушения / В. И. Астафьев, А. Н. Крутов // Вестник СамГУ. 1999. № 4. С. 56–69.
2. Ключников, В. Д. Математическая теория пластичности / В. Д. Ключников. М.: МГУ, 1978. 208 с.
3. Партон, В. З. Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 192 с.
4. Плескачевский, Ю. М. Корректное применение моделей континуума, квазиконтинуума, сетей в наномеханике / Ю. М. Плескачевский, Ю. А. Чигарева // Доклады НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 1. С. 118–122.
5. Starovoitov, E. I. Foundations of the Theory of Elasticity, Plasticity and Viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F. V. Nagiyev. Toronto, New Jersey: Apple Academic Press, 2012. 346 p. <https://doi.org/10.1201/b13109>.
6. Степанова, Л. В. Асимптотические методы нелинейной механики разрушения: результаты, современное состояние и перспективы / Л. В. Степанова, Е. М. Адылина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2013. № 2. С. 156–168.
7. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. М.: Наука, 1974. 640 с.
8. Чигарев, А. В. Исследование неосесимметричного напряженного состояния при квазистатическом термосиловом нагружении в условиях облучения высокоэнергетическими частицами / А. В. Чигарев, П. И. Ширвель // Наука и техника. 2013. № 4. С. 83–89.
9. Радаев, Ю. Н. Точный анализ распределения напряжений у вершины трещины нормального отрыва напряженного состояния / Ю. Н. Радаев // Вестник СамГУ. 2017. № 4. С. 336–365.
10. Nejati, M. Crack Tip Asymptotic Field and K-Dominant Region for Anisotropic Semicircular Bend Specimen / M. Nejati, S. Ghoul, M. R. Ayatollahi // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2020. Vol. 109. P. 102640. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102640>.
11. Черепанов, Г. П. Об одном методе решения упругопластической задачи / Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, № 3. С. 644–655. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90151-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90151-5).
12. Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. М.: Наука, 1978. 208 с.
13. Остросаблин, Н. Н. Определение смещений в задаче Л. А. Галина / Н. Н. Остросаблин // Динамика сплошных сред. 1973. № 14. С. 67–70.
14. Гундина, М. А. Метод асимптотических разложений в задачах распространения трещин. Нахождение коэф-

- фициента нелинейности / М. А. Гундина // *Вестник Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова*. Сер. В. Прыродазнаўчая навука (матэматыка, фізіка, біялогія). 2019. Т. 53, № 1. С. 63–70.
15. Старовойтов, Э. И. Сопроотивление материалов / Э. И. Старовойтов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 384 с.
 16. Александровский, С. В. Нелинейные деформации бетона при сложных режимах нагружения / С. В. Александровский, Н. А. Колесников // *Бетон и железобетон*. 1976. № 4. С. 27–32.
 17. Ибрагимов, В. А. Напряженно-деформированное состояние вблизи конца растущей трещины в упруго-пластической среде / В. А. Ибрагимов // *Прикладная математика и механика*. 1976. Т. 40, № 2. С. 311–319. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(76\)90068-x](https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90068-x).
 18. Шмелев, А. В. Идентификация параметров полилинейных моделей металлов, применяемых при численном моделировании процессов пластического деформирования и разрушения конструкций / А. В. Шмелев, А. Г. Кононов, А. В. Омелюсик // *Наука и образование*. 2017. № 1. С. 1–17.
 19. Trifan, D. A New Theory of Plastic Flow / D. Trifan // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1949. Vol. 7, No 2. P. 201–211. <https://doi.org/10.1090/qam/30426>.
 20. Nikishkov, G. P. An Algorithm and a Computer Program for the Three-Term Asymptotic Expansion of Elastic-Plastic Crack Tip Stress and Displacement Fields / G. P. Nikishkov // *Engineering Fracture Mechanics*. 1995. Vol. 50, No 1. P. 65–83. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)00139-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)00139-9).
- Поступила 22.09.2021
Подписана в печать 30.11.2021
Опубликована онлайн 31.05.2022
- #### REFERENCES
1. Astafiev V. I., Krutov A. N. (1999) Stress Distribution Near the Tip of an Inclined Crack in Nonlinear Fracture Mechanics. *Vestnik SamGU = Vestnik of Samara State University*, (4), 56–69 (in Russian).
 2. Klyushnikov V. D. (1978) *Mathematical Theory of Plasticity*. Moscow, Moscow State University. 208 (in Russian).
 3. Parton V. Z., Morozov E. M. (2008) *Mechanics of Elastoplastic Fracture*. Moscow, Publishing House “LKI”. 192 (in Russian).
 4. Pleskachevsky Yu. M., Chigareva Yu. A. (2013) Correct Application of Models of Continuum, Quasi-Continuum, Networks in Nano-Mechanics. *Doklady Natsional'noi Akademii Nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 57 (1), 118–122 (in Russian).
 5. Starovoitov E. I., Nagiyev F. B. (2012) *Foundations of the Theory of Elasticity, Plasticity and Viscoelasticity*. Toronto, New Jersey, Apple Academic Press. 346. <https://doi.org/10.1201/b13109>.
 6. Stepanova L. V., Adylina E. M. (2013) Asymptotic Methods of Nonlinear Fracture Mechanics: Results, Contemporary State and Perspectives. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki = Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, (2), 156–168 (in Russian).
 7. Cherepanov G. P. (1974) *Mechanics of Brittle Fracture*. Moscow, Nauka Publ. 640 (in Russian).
 8. Chigarev A. V., Shirvel P. I. (2013) Investigation of a Non-Axisymmetric Stress State for Quasi-Static Thermal Power Loading under Conditions of Highest-Energy Particle Irradiation. *Nauka i Tekhnika = Science & Technique*, (4), 83–89 (in Russian).
 9. Radaev Yu. N. (2017) Accurate Analysis of Stress Distribution at the Crack Tip of Normal Separation of the Stress State. *Vestnik SamGU = Vestnik of Samara State University*, (4), 336–365 (in Russian).
 10. Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M. R. (2020) Crack Tip Asymptotic Field and K-Dominant Region for Anisotropic Semicircular Bend Specimen. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 109, 102640. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102640>.
 11. Cherepanov G. P. (1963) On a Method of Solving the Elasto-Plastic Problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 27 (3), 644–655. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90151-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90151-5).
 12. Ivlev D. D., Ershov L. V. (1978) *Perturbation Method in the Theory of Elastoplastic Body*. Moscow, Nauka Publ. 208 (in Russian).
 13. Ostrosablin N. N. (1973) Determination of Displacements in Galin's Problem. *Dinamika Sploshnykh Sred [Continuum Dynamics]*, (14), 67–70 (in Russian).
 14. Gundina M. A. (2019) Method of Asymptotic Expansions in Problems of Crack Propagation. Finding the Coefficient of Nonlinearity. *Vestnik Magileŭskaga Dzyrzhajŭnaga Ūniversiteta imya A. A. Kulyashova. Ser. B. Pryrodaznaŭchyya Navuki (Matematyka, Fizika, Biyalogiya) = Mogilev State A. Kuleshov Bulletin. Series B. Natural Sciences*, 53 (1), 63–70 (in Russian).
 15. Starovoitov E. I. (2008) *Strength of Materials*. Moscow, FIZMATLIT Publ. 384 (in Russian).
 16. Aleksandrovsky S. V., Kolesnikov N. A. (1976) Nonlinear Deformations of Concrete under Complex Loading Conditions. *Beton i Zhelezobeton [Concrete and Reinforced Concrete]*, (4), 27–32 (in Russian).
 17. Ibragimov V. A. (1976) State of Stress and Strain Near the End of a Growing Crack in an Elastic-Plastic Medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 40 (2), 311–319. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(76\)90068-x](https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90068-x).
 18. Shmelev A. V., Kononov A. G., Omelusik A. V. (2017) Identification of Parameters of Multilinear Models of Metals Used in Numerical Modeling of Plastic Deformation and Destruction of Structures. *Nauka i Obrazovanie = Science & Education*, (1), 1–17 (in Russian).
 19. Trifan D. (1949) A New Theory of Plastic Flow. *Quarterly of Applied Mathematics*, 7 (2), 201–211. <https://doi.org/10.1090/qam/30426>.
 20. Nikishkov G. P. (1995) An Algorithm and a Computer Program for the Three-Term Asymptotic Expansion of Elastic-Plastic Crack Tip Stress and Displacement Fields. *Engineering Fracture Mechanics*, 50 (1), 65–83. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)00139-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)00139-9).
- Received: 22.09.2021
Accepted: 30.11.2021
Published online: 31.05.2022