https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-236-241

УДК 517.5:519.6

Об одной вариационной задаче, приводящей к бигармоническому уравнению, и о приближенном решении основной краевой задачи для этого уравнения

Докт. физ.-мат. наук, проф. И. Н. Мелешко[1], канд. физ.-мат. наук, доц. П. Г. Ласый[1]

[1]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Многие важные вопросы теории упругости приводят к вариационной задаче, связанной с бигармоническим уравнением, и к соответствующим краевым задачам для такого уравнения. В статье рассматривается основная краевая задача для бигармонического уравнения в единичном круге. К этой задаче приводит, например, исследование прогибов пластины в случае кинематических граничных условий, когда перемещения и их производные зависят от круговой координаты. Точное решение рассматриваемой краевой задачи известно. Искомая бигармоническая функция может быть представлена в единичном круге в явном виде посредством интеграла Пуассона. Приближенное решение данной задачи находится иногда с помощью разностных схем. Для этого на круг набрасывается сетка с ячейками малого диаметра и в каждом узле сетки все частные производные задачи заменяются их конечно-разностными отношениями. В результате возникает система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных приближенных значений бигармонической функции, из которой они однозначно находятся. Недостатком такого метода является то, что указанная выше система не всегда просто решается. Кроме того, мы получаем решение не в любой точке круга, а только в узлах сетки. Для реальных вычислений и численного анализа решений прикладных задач авторами на основе известного точного решения краевой задачи сконструировано его единое аналитическое приближенное представление с помощью логарифмов. Приближенная формула имеет простой вид и легко реализуется численно. Равномерные оценки погрешности позволяют проводить вычисления с заданной точностью. Все коэффициенты квадратурной формулы для интеграла Пуассона неотрицательны, что значительно упрощает исследование приближенного решения. Проведен анализ квадратурной суммы на устойчивость. Рассмотрен пример решения краевой задачи.

Ключевые слова: вариационная задача, краевая задача, интеграл Пуассона, квадратурная формула, аппроксимация решения

Для цитирования: Мелешко, И. Н. Об одной вариационной задаче, приводящей к бигармоническому уравнению, и о приближенном решении основной краевой задачи для этого уравнения / И. Н. Мелешко, П. Г. Ласый // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 236–241. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-236-241

About One Variational Problem, Leading to a Biharmonic Equation, and about the Approximate Solution of the Main Boundary Value Problem for this Equation

I. N. Meleshko[1], P. G. Lasy[1]

[1]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. Many important questions in the theory of elasticity lead to a variational problem associated with a biharmonic equation and to the corresponding boundary value problems for such an equation. The paper considers the main boundary value problem for the biharmonic equation in the unit circle. This problem leads, for example, to the study of plate deflections in the case of kinematic boundary conditions, when the displacements and their derivatives depend on the circular coordinate. The exact solution of the considered boundary value problem is known. The desired biharmonic function can be represented explicitly in the unit circle by means of the Poisson integral. An approximate solution of this problem is sometimes found

Адрес для переписки
Мелешко Иван Николаевич
Белорусский национальный технический университет
ул. Б. Хмельницкого, 9,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by

Address for correspondence
Meleshko Ivan N.
Belarusian National Technical University
9, B. Khmelnithskogo str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by

using difference schemes. To do this, a grid with cells of small diameter is thrown onto the circle, and at each grid node all partial derivatives of the problem are replaced by their finite-difference relations. As a result, a system of linear algebraic equations arises for unknown approximate values of the biharmonic function, from which they are uniquely found. The disadvantage of this method is that the above system is not always easy to solve. In addition, we get the solution not at any point of the circle, but only at the nodes of the grid. For real calculations and numerical analysis of solutions to applied problems, the authors have constructed its unified analytical approximate representation on the basis of the known exact solution of the boundary value problem while using logarithms. The approximate formula has a simple form and can be easily implemented numerically. Uniform error estimates make it possible to perform calculations with a given accuracy. All coefficients of the quadrature formula for the Poisson integral are non-negative, which greatly simplifies the study of the approximate solution. An analysis of the quadrature sum for stability is carried out. An example of solving a boundary value problem is considered.

Keywords: variational problem, boundary value problem, Poisson integral, quadrature formula, solution approximation

For citation: Meleshko I. N., Lasy P. G. (2022) About One Variational Problem, Leading to a Biharmonic Equation, and about the Approximate Solution of the Main Boundary Value Problem for this Equation. *Science and Technique*. 21 (3), 236–241. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-236-241 (in Russian)

Введение

Известно [1], что необходимым условием минимума функционала

$$\iint_D \left((\Delta u)^2 - 2(1-\alpha)\left(\partial_{x^2} u \partial_{y^2} u - (\partial_{xy} u)^2 - 2fu\right)\right) \times$$
$$\times dxdy - 2\int_L p(l) u dl + 2\int_L q(l)\partial_n u dl, \tag{1}$$

где $f(x, y)$, $p(l)$, $q(l)$ – заданная функция; α – числовой параметр, на некотором допустимом множестве функций $u = u(x, y)$, является уравнение

$$\Delta^2 u - f = 0,$$

где $\Delta^2 = \partial_{x^4} + 2\partial_{x^2 y^2} + \partial_{y^4}$.

Линейное однородное уравнение в частных производных четвертого порядка

$$\Delta^2 u = 0,$$

рассматриваемое в области D, называется бигармоническим в этой области. К краевым задачам для такого уравнения приводят многие вопросы теории упругости [2–6].

Основная часть

Исследуем основную краевую задачу для бигармонического уравнения в полярных координатах в единичном круге:

$$\Delta^2 u = 0,\ r < 1; \tag{2}$$

$$u(1, \varphi) = f_0(\varphi);\ \partial_r u(1, \varphi) = f_1(\varphi);\ \varphi \in [-\pi, \pi], \tag{3}$$

где $f_0(\varphi)$, $f_1(\varphi)$ – заданные непрерывные функции.

Краевая задача (2), (3) имеет единственное решение (например, [2]). Искомая бигармоническая функция $u = u(r, \varphi)$ может быть представлена в единичном круге с помощью интеграла Пуассона

$$u(r, \varphi) = Q(f_0, r, \varphi) +$$
$$+ 0{,}5\left(1 - r^2\right)\left(r\partial_r Q(f_0, r, \varphi) - Q(f_1, r, \varphi)\right), \tag{4}$$

где

$$Q(f_1, r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau; \tag{5}$$

$$Q(f_0, r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\tau) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau. \tag{6}$$

Несложно проверить, что функции $Q(f_1, r, \varphi)$ и $Q(f_0, r, \varphi)$ являются гармоническими в единичном круге. Далее займемся построением приближенного решения.

1. Аппроксимация интеграла Пуассона (5)

Возьмем на промежутке $[-\pi, \pi]$ сетку с узлами в точках

$$\varphi_k = kh,\ k = \overline{-n, n},\ \ h = \frac{2\pi}{2n+1} \tag{7}$$

и аппроксимируем плотность интеграла Пуассона (5) на этом промежутке по формуле

$$f_1(\varphi) \approx \tilde{f}_1(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} \eta_k(\varphi) f_1(\varphi_k), \tag{8}$$

где $\eta_k(\varphi) = \begin{cases} 1,\ \varphi \in [\varphi_{k-0,5}, \varphi_{k+0,5}], \\ 0,\ \varphi \notin [\varphi_{k-0,5}, \varphi_{k+0,5}]; \end{cases}$ $\varphi_{k-0,5} = \varphi_k - 0{,}5h$; $\varphi_{k+0,5} = \varphi_k + 0{,}5h$.

В итоге для интеграла Пуассона (5) получаем квадратурную формулу

$$Q(f_1, r, \varphi) \approx Q(\tilde{f}_1, r, \varphi) = \sum_{k=-n}^{n} R_k(r, \varphi) f_1(\varphi_k) \tag{9}$$

с коэффициентами

$$R_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_{k-0,5}}^{\varphi_{k+0,5}} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau. \tag{10}$$

Теорема 1. *Все коэффициенты* $R_k(r,\varphi)$ *квадратурной формулы* (9) *положительны для любых* $r<1$ *и* $\varphi[-\pi,\pi]$, *вычисляются через логарифмы по формулам*

$$R_k(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\left(h+2\operatorname{Im}\ln\left(1-ze^{-i\varphi}\right)\Big|_{\varphi_{k-0,5}}^{\varphi_{k+0,5}}\right),\quad k=\overline{-n,\,n}, \tag{11}$$

где $z=re^{i\varphi}$ *и*

$$\sum_{k=-n}^{n}R_k(r,\varphi)=1,\ r<1,\ -\pi\le\varphi\le\pi. \tag{12}$$

Доказательство. Так как ядро интеграла Пуассона $\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}$ положительно при $r<1$, то из (10) следует, что $R_k(r,\varphi)>0,\ r<1,\ -\pi\le\varphi\le\pi.$

Непосредственно проверяется, что для ядра интеграла Пуассона справедлива формула

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}=2\operatorname{Re}\frac{1}{1-z/t}-1,$$
$$t=e^{i\tau},\ z=re^{i\varphi},$$

откуда, использовав ряд геометрической прогрессии, находим

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}=1+2\operatorname{Re}\sum_{m=1}^{\infty}z^me^{-im\tau}.$$

Подставив это представление ядра Пуассона в правую часть формулы (10), получаем

$$R_k(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\varphi_{k-0,5}}^{\varphi_{k+0,5}}d\tau+2\operatorname{Re}\sum_{m=1}^{\infty}z^m\int_{\varphi_{k-0,5}}^{\varphi_{k+0,5}}e^{-im\tau}d\tau\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(h+2\operatorname{Im}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^me^{-im\varphi}}{m}\Bigg|_{\varphi_{k-0,5}}^{\varphi_{k+0,5}}\right).$$

Тогда, использовав разложение логарифмической функции в степенной ряд, приходим к формуле (11). Далее очевидно, что

$$\sum_{k=-n}^{n}R_k(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}d\tau. \tag{13}$$

Известно, что $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}d\tau=1$ при $r<1,\ -\pi\le\varphi\le\pi$. Отсюда, согласно (13), и следует (12).

Примечание. Предположим, что значения функции $f_1(\varphi)$ в узлах квадратурной формулы (9) вычислены приближенно, т. е. $f_1(\varphi_k)\approx$ $\approx f_1^*(\varphi_k)$, $k=\overline{-n,\,n}$ и, значит, погрешности их вычисления – $\varepsilon_k=f_1(\varphi_k)-f_1^*(\varphi_k),\ k=\overline{-n,\,n}.$ Пусть $|\varepsilon_k|\le\varepsilon,\ k=\overline{-n,\,n}.$ Тогда, благодаря (12), для погрешности вычисления квадратурной суммы в (9) получаем неравенство

$$\left|\sum_{k=-n}^{n}R_k(r,\varphi)f_1(\varphi_k)-\sum_{k=-n}^{n}R_k(r,\varphi)f_1^*(\varphi_k)\right|\le$$
$$\le\varepsilon\sum_{k=-n}^{n}R_k(r,\varphi)=\varepsilon.$$

Таким образом, верхняя граница погрешности вычисления квадратурной суммы в (9) равна ε, что свидетельствует о численной устойчивости (9). Найдем теперь оценку погрешности аппроксимации интеграла Пуассона по приближенной формуле (9).

Теорема 2. *Пусть плотность* $f_1(\varphi)$ *интеграла Пуассона непрерывна на промежутке* $[-\pi,\pi]$. *Тогда равномерно по* $r<1$ *и* $-\pi\le\varphi\le\pi$ *выполняется неравенство*

$$\left|Q(f_1,r,\varphi)-Q(\tilde f_1,r,\varphi)\right|\le\omega(f_1,h), \tag{14}$$

где $\omega(f_1,h)$ *– модуль непрерывности функции* $f_1(\varphi)$. *Если же* $f_1(\varphi)$ *– непрерывно дифференцируемая функция на указанном промежутке, то также равномерно имеет место неравенство*

$$\left|Q(f_1,r,\varphi)-Q(\tilde f_1,r,\varphi)\right|\le0{,}5M_{f_1}h, \tag{15}$$
$$M_{f_1}=\max_{\varphi\in[-\pi,\,\pi]}\left|f_1'(\varphi)\right|.$$

Доказательство. Из (5), (7)–(10) следует, что

$$\left|Q(f_1,r,\varphi)-Q(\tilde f_1,r,\varphi)\right|\le\max_{\varphi\in[-\pi,\,\pi]}\left|f_1(\varphi)-\tilde f_1(\varphi)\right|\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}d\tau.$$

Стало быть, ввиду (12) и (13)

$$\left|Q(f_1,r,\varphi)-Q(\tilde f_1,r,\varphi)\right|\le\max_{\varphi\in[-\pi,\,\pi]}\left|f_1(\varphi)-\tilde f_1(\varphi)\right|. \tag{16}$$

Если функция $f_1(\varphi)$ непрерывна на промежутке $[-\pi,\pi]$, то

$$\left|f_1(\varphi)-\tilde f_1(\varphi)\right|\le\omega(f_1,h),\quad\varphi\in[-\pi,\pi]. \tag{17}$$

Если же $f_1(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на указанном промежутке, то, применив к этой функции на каждом из отрезков $[\varphi_{k-0,5},\ \varphi_{k+0,5}]$, $k=\overline{-n,\ n}$ теорему Лагранжа, получим

$$\left|f_1(\varphi)-\tilde f_1(\varphi)\right|\le 0{,}5M_{f_1}h,\quad \varphi\in[-\pi,\ \pi]. \quad (18)$$

Из (16)–(18) и следуют неравенства (14), (15).

2. Аппроксимация интеграла Пуассона (6)

По аналогии можем записать квадратурную формулу для интеграла (6) с узлами (7) и коэффициентами (12)

$$Q(f_0,r,\varphi)\approx Q(\tilde f_0,r,\varphi)=\sum_{k=-n}^{n}R_k(r,\varphi)\,f_0(\varphi_k). \quad (19)$$

Функция $\tilde f_0(\varphi)$ в (19) определяется формулой (8), в которой $f_1(\varphi)$ следует заменить функцией $f_0(\varphi)$. Квадратурная формула (19) численно устойчива, а для оценки ее погрешности можно пользоваться неравенствами (14), (15) теоремы 2 для плотности $f_0(\varphi)$

$$\left|Q(f_0,r,\varphi)-Q(\tilde f_0,r,\varphi)\right|\le\omega(f_0,h),$$

где $\omega(f_0,h)$ – модуль непрерывности функции $f_0(\varphi)$ или

$$\left|Q(f_0,r,\varphi)-Q(\tilde f_0,r,\varphi)\right|\le 0{,}5M_{f_0}h,$$

$$M_{f_0}=\max_{\varphi\in[-\pi,\ \pi]}\left|f_0'(\varphi)\right|. \quad (20)$$

3. Аппроксимация производной по радиусу интеграла (6)

Гармоническая в единичном круге функция $Q(f_1,r,\varphi)$ представима также рядом

$$Q(f_0,r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_0(\tau)d\tau+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}r^m\int_{-\pi}^{\pi}f_0(\tau)\cos m(\tau-\varphi)d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} r\partial_rQ(f_0,r,\varphi)&=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}mr^m\int_{-\pi}^{\pi}f_0(\tau)\cos m(\tau-\varphi)d\tau=\\ &=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}r^m\int_{-\pi}^{\pi}f_0(\tau)d\sin m(\tau-\varphi)=\\ &=\frac{1}{\pi}\big(f_0(\pi)-f_0(-\pi)\big)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}r^m\sin m\varphi-\\ &-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}r^m\int_{-\pi}^{\pi}f_0'(\tau)\sin m(\tau-\varphi)d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Принимая во внимание, что:

$$\begin{aligned} &1)\ \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}r^m\sin m\varphi=-\mathrm{Im}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m z^m\right)=\\ &=-\mathrm{Im}\frac{1}{1+z}=\frac{r\sin\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2};\\ &2)\ \sum_{m=1}^{\infty}r^m\sin m(\tau-\varphi)=\mathrm{Im}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{t^m}=\\ &=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-z/t}-1\right)=\frac{r\sin(\tau-\varphi)}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2},\\ &z=re^{i\varphi},\ t=e^{i\tau}, \end{aligned} \quad (22)$$

можем переписать (21) в виде

$$\begin{aligned} r\partial_rQ(f_0,r,\varphi)&=\frac{1}{\pi}\big(f_0(\pi)-f_0(-\pi)\big)\times\\ &\times\frac{r\sin\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_0'(\tau)\times\\ &\times\frac{r\sin(\tau-\varphi)}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Квадратурная формула для интеграла в формуле (23) строится тем же способом, что и в интеграле Пуассона. В результате получаем следующую приближенную формулу:

$$\begin{aligned} r\partial_rQ(f_0,r,\varphi)&\approx\frac{1}{\pi}\big(f_0(\pi)-f_0(-\pi)\big)\times\\ &\times\frac{r\sin\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde f_0'(\tau)\times\\ &\times\frac{r\sin(\tau-\varphi)}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}d\tau=\frac{1}{\pi}\big(f_0(\pi)-f_0(-\pi)\big)\times\\ &\times\frac{r\sin\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}+\sum_{k=-n}^{n}S_k(r,\varphi)\,f_0'(\varphi_k), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\tilde f_0'(\varphi)$ – определяется формулой (8), в которой f_1 следует заменить функцией f_0'; $S_k(r,\varphi)=$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_{\varphi_{k-0,5}}^{\varphi_{k+0,5}}\frac{r\sin(\tau-\varphi)}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}d\tau;\ k=\overline{-n,\ n}.$$

Из (22) следует, что

$$S_k(r,\varphi)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left(\sum_{m=1}^{\infty}z^m\int_{\varphi_{k-0,5}}^{\varphi_{k+0,5}}e^{-im\tau}d\tau\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^me^{-im\varphi}}{m}\Bigg|_{\varphi_{k+0,5}}^{\varphi_{k-0,5}}.$$

Суммируя ряды в правой части, окончательно получаем:

$$S_k\left(r,\,\varphi\right)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\ln\left(1-z\,\mathrm{e}^{-i\varphi}\right)\Big|_{\varphi_{k+0,5}}^{\varphi_{k-0,5}},\quad k=\overline{-n,\,n}. \quad (25)$$

4. Аппроксимация решения краевой задачи (2), (3)

Подставляя в формулу (4) приближенные выражения для интегралов из (9), (19) и (24) с коэффициентами (11), (25), получим приближенное решение краевой задачи (2), (3):

$$u(r,\varphi)\approx\tilde{u}(r,\varphi)=\sum_{k=-n}^{n}R_k\left(r,\,\varphi\right)f_0\left(\varphi_k\right)+0,5\left(r^2-1\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{k=-n}^{n}R_k\left(r,\,\varphi\right)f_1\left(\varphi_k\right)-\frac{1}{\pi}\left(f_0\left(\pi\right)-f_0\left(-\pi\right)\right)\times\right. \quad (26)$$
$$\left.\times\frac{r\sin\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}-\sum_{k=-n}^{n}S_k\left(r,\,\varphi\right)f_0'\left(\varphi_k\right)\right).$$

Оценим погрешность приближенного решения.

Теорема 3. *Если функция* $f_1(\varphi)$ *непрерывна на промежутке* $[-\pi,\,\pi]$, *а* $f_0(\varphi)$ *непрерывно дифференцируема на этом промежутке, то для всех* $r<1$ *и* $-\pi\le\varphi\le\pi$

$$\left|u\left(r,\,\varphi\right)-\tilde{u}\left(r,\,\varphi\right)\right|\le0,5\left(1-r^2\right)\times$$
$$\times\omega\left(f_1,\,h\right)+\omega\left(f_0,\,h\right)+r\omega\left(f_0',\,h\right), \quad (27)$$

где $\omega\left(f_1,\,h\right),\,\omega\left(f_0,\,h\right),\,\omega\left(f_0',\,h\right)$ *– модули непрерывности соответствующих функций.*

Если же $f_1(\varphi)$ *и* $f_0'(\varphi)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[-\pi,\,\pi]$, *то*

$$\left|u\left(r,\,\varphi\right)-\tilde{u}\left(r,\,\varphi\right)\right|\le$$
$$\le0,5\left(0,5\left(1-r^2\right)M_{f_1}+M_{f_0}+rM_{f_0'}\right)h, \quad (28)$$

$$M_{f_1}=\max_{\varphi\in[-\pi,\,\pi]}\left|f_1'(\varphi)\right|;\ M_{f_0}=\max_{\varphi\in[-\pi,\,\pi]}\left|f_0'(\varphi)\right|;$$
$$M_{f_0'}=\max_{\varphi\in[-\pi,\,\pi]}\left|f_0''(\varphi)\right|.$$

Доказательство. Сравнивая формулы (4) и (26), получаем неравенство

$$\left|u\left(r,\,\varphi\right)-\tilde{u}\left(r,\,\varphi\right)\right|\le0,5\left(1-r^2\right)\times$$
$$\times\left|Q\left(f_1,\,r,\,\varphi\right)-Q\left(\tilde{f},\,r,\,\varphi\right)\right|+$$
$$+\left|Q\left(f_0,\,r,\,\varphi\right)-Q\left(\tilde{f}_0,\,r,\,\varphi\right)\right|+ \quad (29)$$
$$+0,5\left(1-r^2\right)\left|r\partial_rQ\left(f_0,\,r,\,\varphi\right)-\sum_{k=-n}^{n}S_k\left(r,\,\varphi\right)f_0'\left(\varphi_k\right)\right|=$$
$$=\varepsilon_1\left(r,\,\varphi\right)+\varepsilon_2\left(r,\,\varphi\right)+\varepsilon_3\left(r,\,\varphi\right).$$

Из неравенств (14), (15) и (20) следует, что:

– если функции $f_1(\varphi)$ и $f_0(\varphi)$ непрерывны на промежутке $[-\pi,\,\pi]$

$$\varepsilon_1\left(r,\,\varphi\right)\le0,5\left(1-r^2\right)\omega\left(f_1,\,h\right);$$
$$\varepsilon_2\left(r,\,\varphi\right)\le\omega\left(f_0,\,h\right); \quad (30)$$

– если $f_1(\varphi)$ и $f_0(\varphi)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[-\pi,\,\pi]$

$$\varepsilon_1\left(r,\,\varphi\right)\le0,25\left(1-r^2\right)M_{f_1}h;$$
$$\varepsilon_2\left(r,\,\varphi\right)\le0,5M_{f_0}h. \quad (31)$$

Слагаемое $\varepsilon_3(r,\,\varphi)$ запишем в виде интеграла и оценим его

$$\varepsilon_3\left(r,\,\varphi\right)\le0,5\left(1-r^2\right)\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_0'\left(\tau\right)-\tilde{f}_0'\left(\tau\right)\right|\times\right.$$
$$\times\left|\frac{r\sin\left(\tau-\varphi\right)}{1-2r\cos\left(\tau-\varphi\right)+r^2}\right|d\tau\le\frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_0'\left(\tau\right)-\tilde{f}_0'\left(\tau\right)\right|\times$$
$$\times\frac{1-r^2}{1-2r\cos\left(\tau-\varphi\right)+r^2}d\tau\le r\max_{\varphi\in[-\pi,\,\pi]}\left|f_0'\left(\tau\right)-\tilde{f}_0'\left(\tau\right)\right|\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\left(\tau-\varphi\right)+r^2}d\tau=$$
$$=r\max_{\varphi\in[-\pi,\,\pi]}\left|f_0'\left(\tau\right)-\tilde{f}_0'\left(\tau\right)\right|.$$

Отсюда следует, что:

– если функция $f_0'(\varphi)$ непрерывна на промежутке $[-\pi,\,\pi]$

$$\varepsilon_3\left(r,\,\varphi\right)\le r\omega\left(f_0',\,h\right); \quad (32)$$

– если $f_0'(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[-\pi,\,\pi]$

$$\varepsilon_3\left(r,\,\varphi\right)\le0,5rM_{f_0'}h. \quad (33)$$

Использовав в (29) соответствующие оценки (30)–(33), получим неравенства (27), (28). Оценка погрешности (28) позволяет находить приближенное решение краевой задачи (2), (3) с заданной точностью.

Примечание. Известно, что действительная часть интеграла Шварца с плотностью $\rho(\tau)$ представляет собой интеграл Пуассона с той же плотностью

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho(\tau)\frac{t+z}{t-z}d\tau = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho(\tau)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}d\tau, \quad (34)$$

где $t = e^{i\tau}$; $z = r\,e^{i\varphi}$; $|z|<1$; $-\pi\le\varphi\le\pi$.

Точные методы вычисления интегралов Шварца и Гильберта, изложенные в [7, 8], в некоторых случаях позволяют получать точное решение краевой задачи (2), (3), не содержащее интегралов.

Пример. *Пусть граничное условие (3) имеет вид* $u(1,\varphi)=\cos 2022\varphi$, $\partial_r u(1,\varphi)=|\varphi|$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$. *Интеграл Шварца с такими плотностями находится точно [7, 8]*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2022\tau\frac{t+z}{t-z}d\tau = z^{2022},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\tau|\frac{t+z}{t-z}d\tau = \frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\left(L^2(z)-L^2(-z)\right),$$

где $L^2(z)$ – дилогарифм Эйлера [9, 10], определяемый в круге $|z| < 1$ следующим рядом:

$$L^2(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}.$$

Тогда, воспользовавшись формулой (4) и учитывая равенство (34), получим точное решение краевой задачи

$$u(r,\varphi)=0{,}5\left(r^2-1\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\left(L^2(z)-L^2(-z)\right)- \\ -2022r^{2022}\cos 2022\varphi\right)+r^{2022}\cos 2022\varphi.$$

ВЫВОДЫ

1. Построено эффективное приближенное представление решения основной краевой задачи для бигармонического уравнения в единичном круге. Аппроксимирующая формула эффективна в том смысле, что она имеет достаточно простую аналитическую структуру, устойчива и легко реализуется численно, а равномерные оценки погрешности позволяют проводить вычисления с заранее заданной точностью. Рассмотрен пример краевой задачи при таких граничных условиях на окружности, которые дают возможность найти точное решение с помощью дилогарифмов Эйлера.

2. Аппроксимация решения основной краевой задачи для бигармонического уравнения в единичном круге может быть использована при решении соответствующих вариационных задач, приводящих к бигармоническому уравнению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. М.–Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
2. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1977. 736 с.
3. Михлин, С. Г. Интегральные уравнения / С. Г. Михлин. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 304 с.
4. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1968. 512 с.
5. Векуа, Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи / Н. П. Векуа. М.: Наука, 1970. 380 с.
6. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973. 736 с.
7. Пыхтеев, Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши / Г. Н. Пыхтеев. Новосибирск: Наука, 1980. 121 с.
8. Пыхтеев, Г. Н. Приближенные методы вычисления интегралов типа Коши специального вида / Г. Н. Пыхтеев. Новосибирск: Наука, 1982. 127 с.
9. Пыхтеев, Г. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления / Г. Н. Пыхтеев, И. Н. Мелешко. Минск: Изд-во БГУ, 1976. 68 с.
10. Мелешко, И. Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения / И. Н. Мелешко. Минск: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. 197 с.

Поступила 21.02.2022
Подписана в печать 26.04.2022
Опубликована онлайн 31.05.2022

REFERENCES

1. Kantarovich L. V., Krylov V. I. (1962) *Approximate Methods of Higher Analysis*. Moscow–Leningrad, Fizmatgiz Publ. 708 (in Russian).
2. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. (1977) *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ. 736 (in Russian).
3. Mikhlin S. G. (1947) *Integral Equations*. Moscow–Leningrad, Gostekhizdat Publ. 304 (in Russian).
4. Muskhelishvili N. I. (1968) *Singular Integral Equations*. Moscow, Nauka Publ. 512 (in Russian).
5. Vekua N. P. (1970) *Systems of Singular Integral Equations and Some Boundary Problems*. Moscow, Nauka Publ. 380 (in Russian).
6. Lavrentiev M. A., Shabat B. V. (1973) *Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka Publ. 736 (in Russian).
7. Pykhteev G. N. (1980) *Exact Methods for Calculating Cauchy-Type Integrals*. Novosibirsk, Nauka Publ. 121 (in Russian).
8. Pykhteev G. N. (1982) *Approximate Methods for Computing Cauchy-Type Integrals of Special Form*. Novosibirsk, Nauka Publ. 127 (in Russian).
9. Pykhteev G. N., Meleshko I. N. (1976) Polylogarithms, their Properties and Calculation Methods. Minsk, Publishing House of Belarusian State University. 68 (in Russian).
10. Meleshko I. N. (1999) *Special Formulas for Cauchy-Type Integrals and their Applications*. Minsk, VUZ-UNITI Publ. 197 (in Russian).

Received: 21.02.2022
Accepted: 26.04.2022
Published online: 31.05.2022