

<https://doi.org/10.21122/1029-7448-2022-65-3-224-239>

УДК 621.313

## **Разработка аналитической модели для определения магнитного потока рассеяния через зубцы статора синхронной электрической машины с дробной зубцовой обмоткой**

**А. Б. Менжинский<sup>1)</sup>, С. В. Пантелеев<sup>1)</sup>, А. Н. Малашин<sup>1)</sup>**

<sup>1)</sup>Военная академия Республики Беларусь (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022  
Belarusian National Technical University, 2022

**Реферат.** В статье представлена двумерная конечно-элементная модель магнитного поля магнитной системы синхронной электрической машины с дробными зубцовыми обмотками. Выявлены особенности распределения магнитных потоков (основного, краевого эффекта, рассеяния) в магнитной системе и построены эквивалентные схемы магнитной цепи исследуемой электрической машины при различных положениях зубца статора относительно полюсов ротора. Обоснована необходимость учета краевого эффекта и зависимости величины потока рассеяния через зубцы статора от координаты положения ротора, что нашло отражение в разработанной аналитической модели для определения потока рассеяния через зубцы статора синхронной электрической машины с дробной зубцовой обмоткой. Проведена проверка адекватности аналитических выражений посредством численного метода (метода конечных элементов). Полученная погрешность расчетов обусловлена принятыми допущениями при построении эквивалентной схемы магнитной цепи исследуемой электрической машины. Незначительное расхождение результатов аналитического расчета и численного эксперимента показывает, что предложенная модель дает возможность решить задачу количественного определения величины магнитного потока рассеяния через зубцы статора с высокой точностью. Кроме того, она позволяет установить влияние геометрических параметров магнитной цепи на характер изменения периодической функции потока рассеяния через зубец статора при наименьших временных затратах, что имеет очевидную практическую значимость. Представленная аналитическая модель может применяться в процессе оптимизации синхронной электрической машины с дробными зубцовыми обмотками.

**Ключевые слова:** синхронная электрическая машина, магнитный поток рассеяния, теория магнитных цепей, метод конечных элементов

**Для цитирования:** Менжинский, А. Б. Разработка аналитической модели для определения магнитного потока рассеяния через зубцы статора синхронной электрической машины с дробной зубцовой обмоткой / А. Б. Менжинский, С. В. Пантелеев, А. Н. Малашин // *Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ*. 2022. Т. 65, № 3. С. 224–239. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2022-65-3-224-239>

---

### **Адрес для переписки**

Пантелеев Станислав Владимирович  
Военная академия Республики Беларусь  
просп. Независимости, 220,  
220057, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 17 287-42-96  
[Panteleev-s-v@mail.ru](mailto:Panteleev-s-v@mail.ru)

### **Address for correspondence**

Panteleev Stanislav V.  
Military Academy of the Republic of Belarus  
220, Nezavisimosty Ave.,  
220057, Minsk, Republic of Belarus  
Tel.: +375 17 287-42-96  
[Panteleev-s-v@mail.ru](mailto:Panteleev-s-v@mail.ru)

---

## Development of an Analytical Model for Determining the Magnetic Flux of Scattering through the Gears of the Stator of a Synchronous Electric Machine with a Fractional Gear Winding

A. B. Menzhinski<sup>1)</sup>, S. V. Pantelev<sup>1)</sup>, A. N. Malashin<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Military Academy of the Republic of Belarus (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** The article presents a two-dimensional finite element model of the magnetic field of a magnetic system of a synchronous electric machine with fractional gear windings. The specific features of the distribution of magnetic fluxes (main effect, edge effect, scattering) in the magnetic system have been revealed and equivalent circuits of the magnetic circuit of the electric machine under study have been constructed at different positions of the stator gear relative to the rotor poles. The necessity of taking into account the edge effect and the dependence of the scattering flux through the gears of the stator on the coordinate of the rotor position has been justified, which is reflected in the analytical model that has been developed for determining the scattering flux through the gears of the stator of a synchronous electric machine with a fractional gear winding. The adequacy of analytical expressions was verified by means of a numerical method (finite element method). The resulting calculation error is due to the assumptions made when constructing an equivalent circuit of the magnetic circuit of the electric machine under study. A slight discrepancy between the results of the analytical calculation and the numerical experiment shows that the proposed model makes it possible to solve the problem of quantifying the magnitude of the magnetic flux scattering through the gears of the stator with high accuracy. In addition, this ensures an accurate determination of the influence of the geometric parameters of the magnetic circuit on the nature of the change in the periodic function of the scattering flow through the stator gear in the shortest time, which is of an obvious practical significance. The presented analytical model can be used in the process of optimizing a synchronous electric machine with fractional gear windings.

**Keywords:** synchronous electric machine, magnetic scattering flux, theory of magnetic circuits, finite element method

**For citation:** Menzhinski A. B., Pantelev S. V., Malashin A. N. (2022) Development of an Analytical Model for Determining the Magnetic Flux of Scattering through the Gears of the Stator of a Synchronous Electric Machine with a Fractional Gear Winding. *Energetika. Proc. CIS Higher Educ. Inst. and Power Eng. Assoc.* 65 (3), 224–239. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2022-65-3-224-239> (in Russian)

### Введение

В системах электроснабжения автономных объектов широко применяются синхронные электрические машины с постоянными магнитами (ПМ), что объясняется их надежностью, простотой конструкции, высокими коэффициентами полезного действия и мощности по сравнению с другими классами электрических машин [1, 2]. В этом классе выделяют группу синхронных электрических машин с дробными зубцовыми обмотками (СЭМ с ДЗО), которые имеют сниженную удельную массу за счет уменьшения длины лобовых частей обмотки, осевых размеров электрической машины, ширины ярма магнитопровода статора и ярма ротора [3].

Однако двусторонняя зубчатость (наличие открытых и полузакрытых пазов) магнитной системы СЭМ с ДЗО и многополюсная структура ротора обуславливают повышенный магнитный поток рассеяния через зубцы статора, который может составлять 50 % и более от общего потока рассеяния. Это вызывает дополнительные потери, непосредственно влияющие на величину основного магнитного потока через рабочую обмотку и соответственно на ЭДС исследуемой электрической машины [4]. Поэтому учет величины магнитного потока рассеяния через зубцы статора весьма важен при математическом моделировании и электромагнитном расчете СЭМ с ДЗО [5–7]. Кроме того, наличие адекватной информации о величине общего магнитного потока рассеяния необходимо для решения задач синтеза систем управления СЭМ с ДЗО [8].

Существующие научные труды в области изучения и оценки потерь СЭМ с ДЗО в основном сосредоточены на исследовании потоков рассеяния как функции от величины воздушного зазора [9] и геометрических параметров электромагнитной системы СЭМ с ДЗО [9–11] или зависимости потоков рассеяния от конструкции ротора [12]. Однако при аналитическом моделировании потока рассеяния через зубцы статора не учитываются краевой эффект и зависимость величины такого потока от координаты положения ротора.

Таким образом, необходимо разработать аналитическую модель для определения магнитного потока рассеяния через зубцы статора СЭМ с ДЗО, учитывающую краевой эффект и зависимость величины потока рассеяния через зубцы статора от координаты положения ротора.

### Разработка аналитической модели

Особенностью СЭМ с ДЗО является то, что одному полюсному делению ротора соответствует не целое, а дробное число зубцовых (пазовых) делений статора. При этом в таких электрических машинах схема обмотки над полюсом или парой полюсов не может быть дублирована для построения всей обмотки. Правила определения схемы и параметров обмотки, а также числа ПМ для СЭМ с ДЗО приведены в [3].

На рис. 1 показан внешний вид СЭМ с ДЗО со следующими параметрами: число пар полюсов ротора  $p = 7$ , число зубцов магнитопровода (МПр) статора  $z_1 = 12$ , число зубцов на полюс и фазу  $q = 2/7$ . Схемы линейной развертки электромагнитной системы и трехфазной обмотки исследуемой СЭМ с ДЗО представлены на рис. 2 ( $A, B, C$  – начало фазных обмоток;  $X, Y, Z$  – концы фазных обмоток).

Для аналитического представления потоков рассеяния СЭМ с ДЗО применяется эквивалентная схема замещения магнитной цепи электрической машины, построенная с учетом наиболее вероятных путей распространения магнитных потоков в магнитной системе [13–15].

Рис. 1. Внешний вид синхронной электрической машины с дробными зубцовыми обмотками

Fig. 1. Exterior appearance of the synchronous electric machine with fractional gear winding

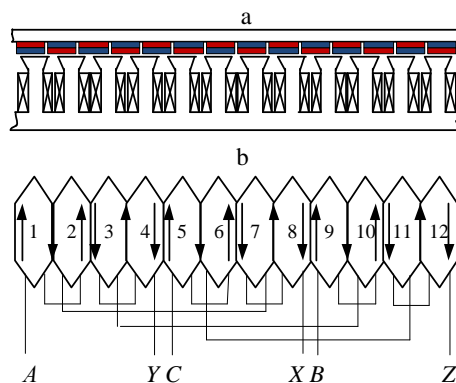


Рис. 2. Схемы линейной развертки электромагнитной системы (а) и обмотки (б) синхронной электрической машины с дробными зубцовыми обмотками

Fig. 2. Diagrams of the linear sweep of the electromagnetic system (a) and the winding (b) of the synchronous electric machine with fractional gear winding

**Моделирование магнитного поля СЭМ с ДЗО.** Для выявления основных магнитных потоков в магнитной системе и построения эквивалентной схемы магнитной цепи электрической машины необходимо создать и исследовать двумерную конечно-элементную модель (ДКЭМ) магнитного поля (МП) магнитной системы СЭМ с ДЗО.

Основные этапы создания ДКЭМ МП [16–19]: ввод геометрических объектов; задание свойств сред, источников поля (задание тока в обмотках, для ПМ – коэрцитивной силы) и граничных условий (на внутренних и внешних границах областей задаются граничные условия Неймана и Дирихле); построение сетки конечных элементов во всех блоках, входящих в расчетную область.

На рис. 3 представлены ДКЭМ МП тех областей магнитной системы СЭМ с ДЗО (области 1–4), которые имеют магнитные потоки различного характера и потому особенно интересны в исследовании картины распределения МП. Обозначенные области магнитной системы определяют четыре типовых случая относительного положения зубца статора и полюса ротора:

- строго рассогласованное состояние (область 1);
- частично рассогласованное состояние (область 2);
- частично согласованное состояние (область 3);
- строго согласованное состояние (область 4).

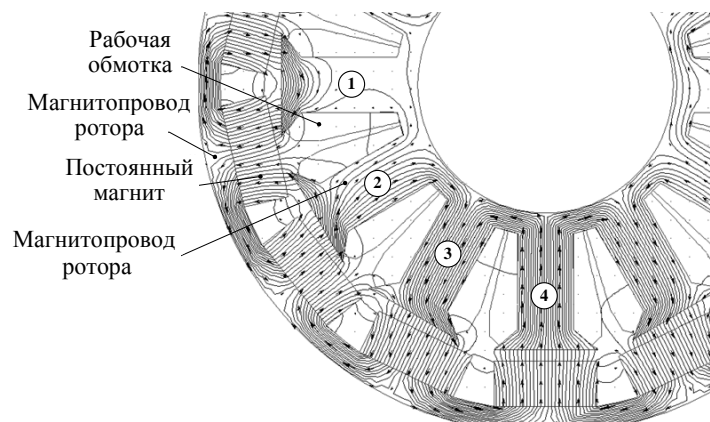


Рис. 3. Двумерная конечно-элементная модель магнитного поля магнитной системы обмотки синхронной электрической машины с дробными зубцовыми обмотками

Fig. 3. Two-dimensional finite element model of the magnetic field of the magnetic system of the synchronous electric machine with fractional gear winding

Как показал анализ ДКЭМ МП, в магнитной системе СЭМ с ДЗО существуют различные магнитные потоки:

- основной магнитный поток  $\Phi_{\delta 0}$ , содержащий магнитный поток, сосредоточенный в воздушном зазоре между полюсами  $\Phi_{\delta}$ , и краевой поток (поток краевого эффекта)  $\Phi_e$ . Сцепляется с витками рабочей обмотки (формирует потокосцепление) и имеет важное значение в процессе преобразования энергии;

- поток краевого эффекта  $\Phi_e$ , проходящий через воздушные промежутки по краям полюсов (зубцов МПР) и замыкающийся по МПР. Также сцепляется с витками рабочей обмотки (формирует потокосцепление);

- поток рассеяния  $\Phi_{\sigma}$ , который не сцепляется с витками рабочей обмотки генератора. Для СЭМ с ДЗО существует несколько потоков рассеяния: через зубец  $\Phi_{\sigma}^z$ , пазового рассеяния  $\Phi_{\sigma}^{sl}$ , через воздушный зазор  $\Phi_{\sigma}^{\delta}$ , на конце ПМ  $\Phi_{\sigma}^{PM}$ . Из них только поток рассеяния через зубец  $\Phi_{\sigma}^z$  зависит от координаты положения ротора. Функция его изменения носит периодический характер. При этом число периодов изменения такой функции вдоль воздушного зазора исследуемой электрической машины определяется как наибольший общий делитель числа зубцов статора и числа полюсов ротора  $(z_1, 2p)$ .

**Эквивалентная схема магнитной цепи СЭМ с ДЗО.** При построении эквивалентной схемы магнитной цепи СЭМ с ДЗО принят ряд традиционных допущений [1, 6, 7, 13]: потери в МПР от вихревых токов и магнитное сопротивление МПР не учитываются; ПМ стабилизирован, положение рабочей точки ПМ  $A_0$  (рис. 4) в процессе работы не меняется; МПР не насыщен.

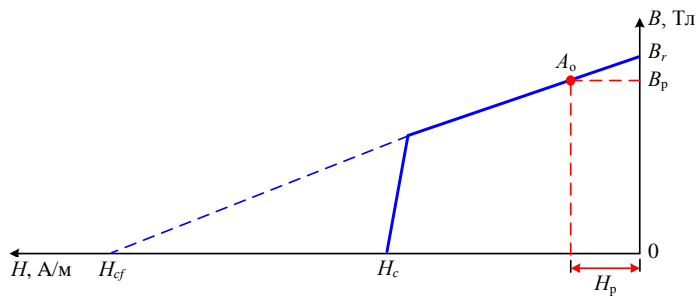


Рис. 4. Кривая размагничивания постоянного магнита

Fig. 4. Demagnetization curve of permanent magnet

На рис. 4:  $B_r$  – остаточная индукция ПМ;  $A_o$  – рабочая точка ПМ;  $B_p$  – магнитная индукция рабочей точки ПМ;  $H_p$  – напряженность МП рабочей точки ПМ;  $H_c$  – коэрцитивная сила по индукции;  $H_{cf}$  – фиктивная коэрцитивная сила.

С учетом выявленных основных магнитных потоков (рис. 3), а также принятых допущений магнитной системе СЭМ с ДЗО (рис. 2) может быть поставлена в соответствие эквивалентная схема магнитной цепи (рис. 5).

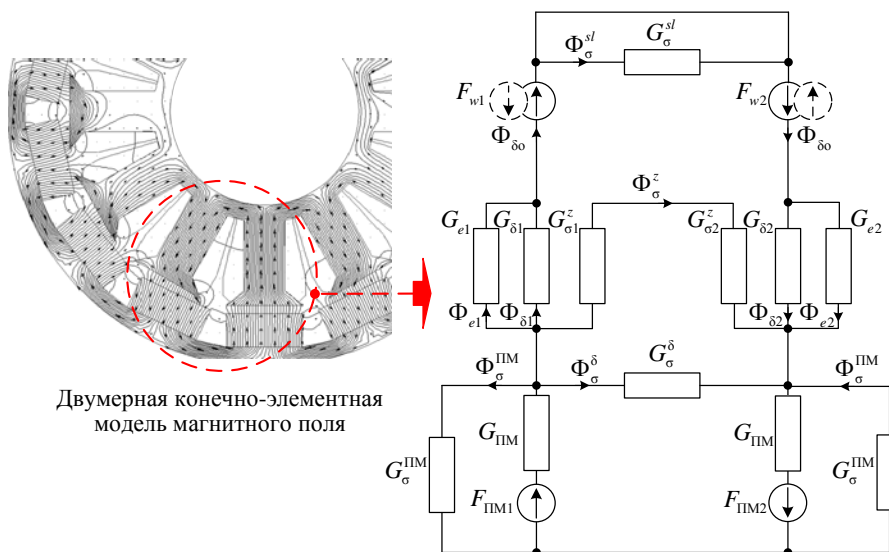


Рис. 5. Эквивалентная схема магнитной цепи синхронной электрической машины с дробными зубцовыми обмотками

Fig. 5. Equivalent circuit of the magnetic circuit of the synchronous electric machine with fractional gear windings

На рис. 5:  $G_{e1(2)}$  – магнитная проводимость воздушных промежутков по путям потоков краевого эффекта;  $G_{\delta1(2)}$  – то же воздушных зазоров;

$G_{\sigma}^z, G_{\sigma}^{\delta}, G_{\sigma}^{PM}, G_{\sigma}^{sl}$  – то же воздушных промежутков по путям потоков рассеяния соответственно через зубец, воздушный зазор, на конце ПМ, пазового;  $G_{PM}$  – то же ПМ;  $F_{w1(2)}$  – магнитодвижущая сила (МДС) рабочей обмотки;  $F_{PM1(2)}$  – МДС ПМ; индексы 1, 2 относятся к левому и правому ПМ (катушке зубца) соответственно.

В СЭМ с ДЗО поток рассеяния через зубец изменяется в зависимости от относительного положения зубца статора и полюсов ротора. Соответственно проводимость  $G_{\sigma}^z$  является зависимой от координаты положения ротора переменной. Характерные для СЭМ с ДЗО двусторонняя зубчатость конструкции и многополюсная структура ротора обуславливают сложный характер изменения МП в воздушном зазоре исследуемой электрической машины. Поэтому для повышения точности расчета магнитного потока через рабочую обмотку СЭМ с ДЗО необходимо определить поток рассеяния через зубец статора как функцию от координаты положения ротора с учетом краевого эффекта в воздушном зазоре.

Расчет потока рассеяния через зубец статора  $\Phi_{\sigma}^z$  выполняется аналитическим методом с использованием эквивалентной схемы магнитной цепи электрической машины посредством расчета магнитных проводимостей  $G_{\sigma}^z$  по путям потоков  $\Phi_{\sigma}^z$  при различных положениях зубца статора относительно полюсов ротора (рис. 3, области 1–4).

На рис. 6–9 выделены элементарные магнитные проводимости рассеяния  $dG'_{M1(2)}, dG''_{M1(2)}, dG'_{air1(2)}, dG''_{air1(2)}$  по путям магнитных потоков  $\Phi_{\sigma}^z, \Phi_{\sigma}^{z1(2)}, \Phi_{\sigma}^{z2(2)}$  и представлены соответствующие им эквивалентные схемы магнитных цепей для областей 1–4 магнитной системы (рис. 3).

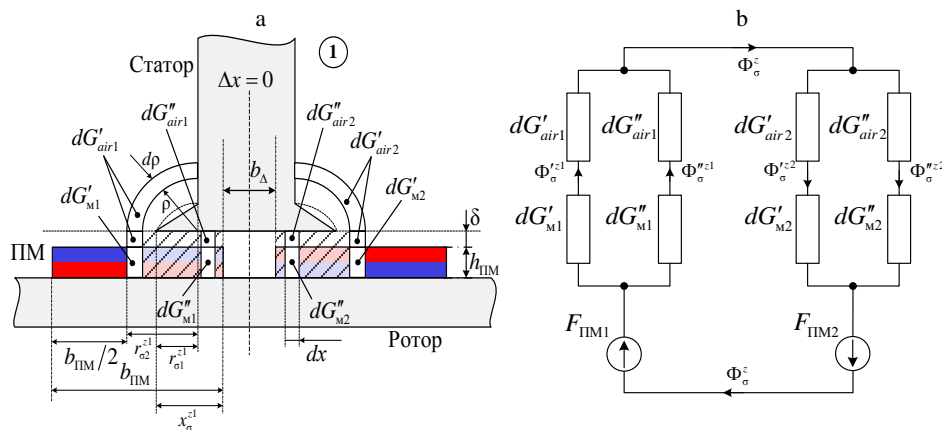


Рис. 6. Элементарные проводимости рассеяния (а) и эквивалентная схема магнитной цепи (б) для области 1

Fig. 6. Elementary scattering conductivities (a) and the equivalent circuit of the magnetic circuit (b) for area 1

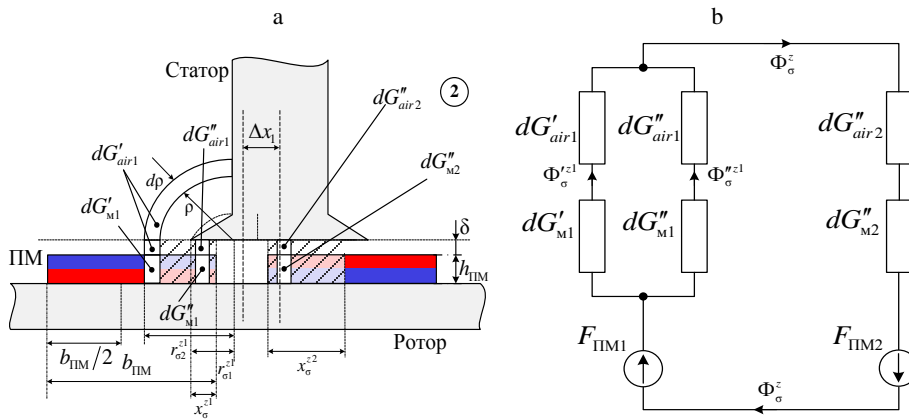


Рис. 7. Элементарные проводимости рассеяния (а) и эквивалентная схема магнитной цепи (b) для области 2

Fig. 7. Elementary scattering conductivities (a) and the equivalent circuit of the magnetic circuit (b) for area 2

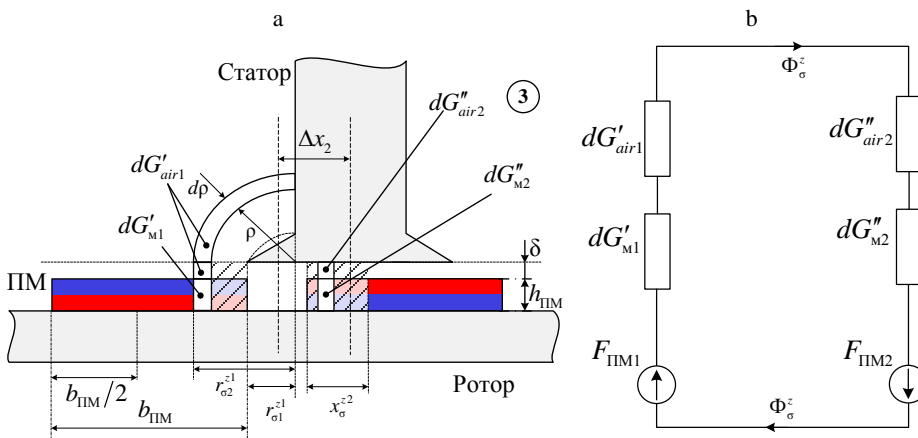


Рис. 8. Элементарные проводимости рассеяния (а) и эквивалентная схема магнитной цепи (b) для области 3

Fig. 8. Elementary scattering conductivities (a) and the equivalent circuit of the magnetic circuit (b) for area 3

На рис. 6–9:  $dG'_{\text{M}1(2)}$ ,  $dG''_{\text{M}1(2)}$  – элементарная проводимость участка ПМ по пути потоков краевого эффекта  $\Phi_{\sigma}^{z1(2)}$  и воздушного зазора  $\Phi_{\sigma}^{z1(2)}$  соответственно;  $dG'_{\text{air}1(2)}$ ,  $dG''_{\text{air}1(2)}$  – то же участков по воздуху по пути потоков краевого эффекта  $\Phi_{\sigma}^{z1(2)}$  и воздушного зазора  $\Phi_{\sigma}^{z1(2)}$  соответственно;  $b_{\text{ПМ}}$  – ширина ПМ, м;  $b_{\Delta}$  – ширина межполюсного участка, м;  $\Delta x$  – изменение координаты положения ротора относительно положения статора, м;  $h_{\text{ПМ}}$  – толщина ПМ, м;  $\delta$  – величина воздушного зазора, м;  $r_{\sigma 1}^{z1(2)}$ ,  $r_{\sigma 2}^{z1(2)}$  –



внутренний и наружный радиусы, ограничивающие зону потоков рассеяния через зубец, м;  $x_{\sigma}^{z1(2)}$  – часть ПМ, находящаяся в рабочем воздушном зазоре и зоне потока рассеяния через зубец, м.

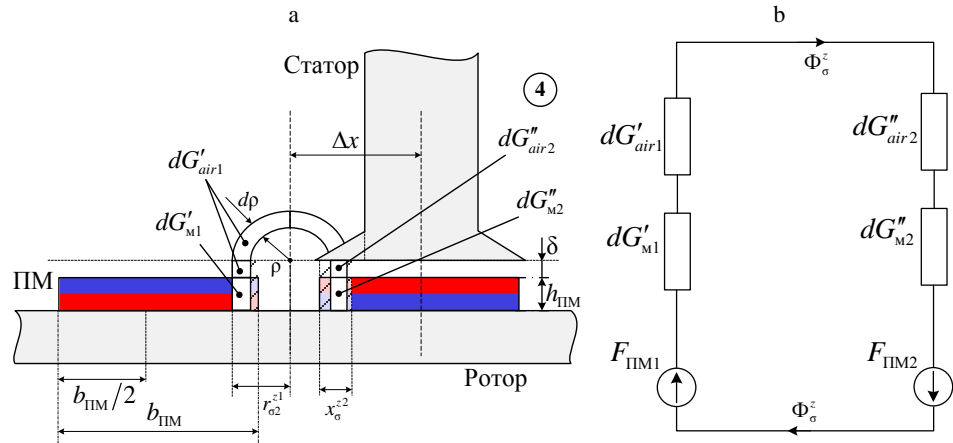


Рис. 9. Элементарные проводимости рассеяния (а) и эквивалентная схема магнитной цепи (b) для области 4

Fig. 9. Elementary scattering conductivities (a) and the equivalent circuit of the magnetic circuit (b) for area 4

При перемещении подвижной части  $r_{\sigma 1}^{z1(2)}$ ,  $r_{\sigma 2}^{z1(2)}$ ,  $x_{\sigma}^{z1(2)}$  зависят от координаты положения ротора. Каждая пара элементарных проводимостей для бесконечно тонкого слоя  $dp$  или  $dx$  состоит из двух последовательно соединенных участков: воздушного промежутка и ПМ [13]. Полагаем, что элементарные магнитные проводимости рассеяния по воздуху представляются в виде тонких слоев  $dp$ , ограниченных дугами окружностей радиуса  $\rho$ , сопряженных с небольшими прямолинейными участками, а в зоне воздушного зазора – только прямолинейными участками [13].

Элементарные проводимости рассеяния эквивалентных схем магнитных цепей носят один и тот же характер (рис. 8b, 9b). Поэтому целесообразно эквивалентные схемы магнитных цепей с элементарными проводимостями рассеяния (рис. 6b, 7b, 8b, 9b) представить в виде рис. 10.

Суммарные элементарные магнитные проводимости рассеяния по путям магнитных потоков  $\Phi_{\sigma}^{z1(2)}$ ,  $\Phi_{\sigma}^{z1(2)}$ ,  $\Phi_{\sigma}^z$ .

$$dG_{\sigma 1(2)}^{z'} = dG_{m1(2)}' dG_{air1(2)}' \left( dG_{m1(2)}' + dG_{air1(2)}' \right)^{-1}; \quad (1)$$

$$dG_{\sigma 1(2)}^{z''} = dG_{m1(2)}'' dG_{air1(2)}'' \left( dG_{m1(2)}'' + dG_{air1(2)}'' \right)^{-1}; \quad (2)$$

$$dG_{\sigma 1(2)}^z = dG_{\sigma 1(2)}^{z'} + dG_{\sigma 1(2)}^{z''}. \quad (3)$$

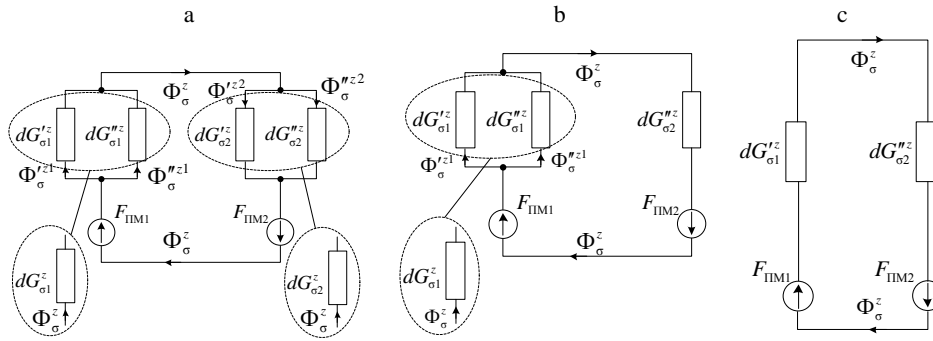


Рис. 10. Преобразованные эквивалентные схемы магнитных цепей с элементарными проводимостями рассеяния для области: а – 1; б – 2; с – 3, 4

Fig. 10. Transformed equivalent circuits of magnetic circuits with elementary scattering conductivities for area: а – 1; б – 2; с – 3, 4

**Порядок расчета элементарных проводимостей рассеяния.** Элементарные магнитные проводимости рассеяния представим в следующем виде:

– для области 1:

$$dG'_{M1(2)} = \frac{\mu_r l d\rho_{1(2)}}{h_{ПМ}}; \quad dG'_{air1(2)} = \frac{\mu_0 l d\rho_{1(2)}}{\delta + 0,5\pi\rho_{1(2)}};$$

$$dG''_{M1(2)} = \frac{\mu_r l dx_{1(2)}}{h_{ПМ}}; \quad dG''_{air1(2)} = \frac{\mu_0 l dx_{1(2)}}{\delta}; \quad (4)$$

– для области 2:

$$dG'_{M1} = \frac{\mu_r l d\rho_1}{h_{ПМ}}; \quad dG'_{air1} = \frac{\mu_0 l d\rho_1}{\delta + 0,5\pi\rho_1};$$

$$dG''_{M1(2)} = \frac{\mu_r l dx_{1(2)}}{h_{ПМ}}; \quad dG''_{air1(2)} = \frac{\mu_0 l dx_{1(2)}}{\delta}; \quad (5)$$

– для области 3:

$$dG'_{M1} = \frac{\mu_r l d\rho_1}{h_{ПМ}}; \quad dG'_{air1} = \frac{\mu_0 l d\rho_1}{\delta + 0,5\pi\rho_1}; \quad dG''_{M2} = \frac{\mu_r l dx_2}{h_{ПМ}}; \quad dG''_{air2} = \frac{\mu_0 l dx_2}{\delta}; \quad (6)$$

– для области 4:

$$dG'_{M1} = \frac{\mu_r l d\rho_1}{h_{ПМ}}; \quad dG'_{air1} = \frac{\mu_0 l d\rho_1}{\delta + \pi\rho_1}; \quad dG''_{M2} = \frac{\mu_r l dx_2}{h_{ПМ}}; \quad dG''_{air2} = \frac{\mu_0 l dx_2}{\delta}, \quad (7)$$

где  $\mu_r$  – внутренняя проницаемость ПМ, Гн/м;  $l$  – длина ПМ в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка (эффективная длина), м;  $\mu_0$  – абсолютная магнитная проницаемость вакуума, Гн/м.

С учетом выражений (1), (2) получим:

– для области 1:

$$dG_{\sigma 1(2)}^{\prime z} = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \left( \frac{d\rho_{1(2)}}{a + \rho_{1(2)}} \right); \quad dG_{\sigma 1(2)}^{\prime\prime z} = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \frac{dx_{1(2)}}{a}, \quad (8)$$

где  $a = 2\pi^{-1}(\mu_0\mu_r^{-1}h_{\text{ПМ}} + \delta)$ ;

– для области 2:

$$dG_{\sigma 1}^{\prime z} = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \left( \frac{d\rho_1}{a + \rho_1} \right); \quad dG_{\sigma 1(2)}^{\prime\prime z} = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \frac{dx_{1(2)}}{a}; \quad (9)$$

– для области 3:

$$dG_{\sigma 1}^{\prime z} = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \left( \frac{d\rho_1}{a + \rho_1} \right); \quad dG_{\sigma 2}^{\prime\prime z} = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \frac{dx_2}{a}; \quad (10)$$

– для области 4:

$$dG_{\sigma 1}^{\prime z} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left( \frac{d\rho_1}{a_* + \rho_1} \right); \quad dG_{\sigma 2}^{\prime\prime z} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \frac{dx_2}{a_*}, \quad (11)$$

где  $a_* = \pi^{-1}(\mu_0\mu_r^{-1}h_{\text{ПМ}} + \delta)$ .

Проведя интегрирование (8)–(11), получим:

– для области 1:

$$G_{\sigma 1(2)}^{\prime z} = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \ln \left( \frac{a + r_{\sigma 2}^{z1(2)}}{a + r_{\sigma 1}^{z1(2)}} \right); \quad G_{\sigma 1(2)}^{\prime\prime z} = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \frac{x_{\sigma}^{z1(2)}}{a}; \quad (12)$$

– для области 2:

$$G_{\sigma 1}^{\prime z} = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \ln \left( \frac{a + r_{\sigma 2}^{z1}}{a + r_{\sigma 1}^{z1}} \right); \quad G_{\sigma 1(2)}^{\prime\prime z} = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \frac{x_{\sigma}^{z1(2)}}{a}; \quad (13)$$

– для области 3:

$$G_{\sigma 1}^{\prime z} = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \ln \left( \frac{a + r_{\sigma 2}^{z1}}{a + r_{\sigma 1}^{z1}} \right); \quad G_{\sigma 2}^{\prime\prime z} = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \frac{x_{\sigma}^{z2}}{a}; \quad (14)$$

– для области 4:

$$G_{\sigma 1}^{\prime z} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \left( \frac{a_* + r_{\sigma 2}^{z1}}{a_* + r_{\sigma 1}^{z1}} \right); \quad G_{\sigma 2}^{\prime\prime z} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \frac{x_{\sigma}^{z2}}{a_*}. \quad (15)$$

Из (12)–(15) с учетом (3) получим полные проводимости рассеяния  $G_{\sigma 1}^z, G_{\sigma 2}^z$ :

– для области 1:

$$G_{\sigma 1(2)}^z = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \ln \left( \frac{a + r_{\sigma 2}^{z1(2)}}{a + r_{\sigma 1}^{z1(2)}} \right) + \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \frac{x_{\sigma}^{z1(2)}}{a}; \quad (16)$$

– для области 2:

$$G_{\sigma 1}^z = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \ln \left( \frac{a + r_{\sigma 2}^{z1}}{a + r_{\sigma 1}^{z1}} \right) + \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \frac{x_{\sigma}^{z1}}{a}; \quad G_{\sigma 2}^z = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \frac{x_{\sigma}^{z2}}{a}; \quad (17)$$

– для области 3:

$$G_{\sigma 1}^z = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \ln \left( \frac{a + r_{\sigma 2}^{z1}}{a + r_{\sigma 1}^{z1}} \right); \quad G_{\sigma 2}^z = \frac{\mu_0 l}{0,5\pi} \frac{x_{\sigma}^{z2}}{a}; \quad (18)$$

– для области 4:

$$G_{\sigma 1}^z = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \left( \frac{a_* + r_{\sigma 2}^{z1}}{a_*} \right); \quad G_{\sigma 2}^z = \frac{\mu_0 l}{\pi} \frac{x_{\sigma}^{z2}}{a_*}. \quad (19)$$

На рис. 11 представлена эквивалентная схема магнитной цепи с учетом (16)–(19) для расчета полных проводимостей рассеяния по путям потока через зубец статора СЭМ с ДЗО.

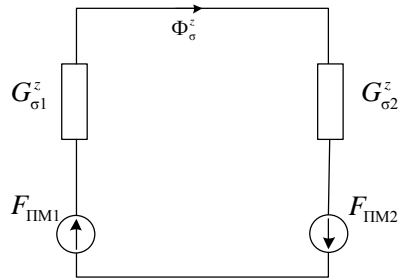


Рис. 11. Эквивалентная схема магнитной цепи с полными проводимостями рассеяния

Fig. 11. Equivalent circuit of a magnetic circuit with total scattering conductivities

Для определения потока  $\Phi_{\sigma}^z$  с учетом эквивалентной схемы магнитной цепи (рис. 11) составим уравнение равновесия МДС:

$$F_{ПМ1} + F_{ПМ2} = \Phi_{\sigma}^z (G_{\sigma 1}^z + G_{\sigma 2}^z) (G_{\sigma 1}^z G_{\sigma 2}^z)^{-1}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что магнитный поток рассеяния через зубец

$$\Phi_{\sigma}^z = G_{\sigma 1}^z G_{\sigma 2}^z (G_{\sigma 1}^z + G_{\sigma 2}^z)^{-1} (F_{ПМ1} + F_{ПМ2}). \quad (21)$$

### Результаты моделирования

Проверку адекватности аналитических выражений для определения магнитного потока рассеяния через зубец статора СЭМ с ДЗО корректно проводить в сравнении с результатами расчета посредством численного метода (метода конечных элементов). Расчет проводится для СЭМ с ДЗО

с внешним ротором и радиально намагниченными ПМ ( $q = 2/7$ , рис. 1). Исходные данные для расчета представлены в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные для моделирования  
 Initial data for modeling

Наименование параметра	Значение
Число зубцов статора $z_1$	12
Число полюсов статора $2p$	14
Радиус статора, м	$11,35 \cdot 10^{-3}$
Эффективная длина $l$ , м	$12,5 \cdot 10^{-3}$
Толщина ярма магнитопровода ротора, м	$1,1 \cdot 10^{-3}$
Толщина ярма магнитопровода статора, м	$1,1 \cdot 10^{-3}$
Величина воздушного зазора $\delta$ , м	$0,5 \cdot 10^{-3}$
Толщина постоянного магнита $h_{\text{ПМ}}$ , м	$2,0 \cdot 10^{-3}$
Ширина постоянного магнита, м	$4,5 \cdot 10^{-3}$
Остаточная магнитная индукция постоянного магнита $B_r$ , Тл	1,1
Ширина паза статора, м	$2,4 \cdot 10^{-3}$
Ширина открытия паза статора, м	$1,6 \cdot 10^{-3}$
Высота паза, м	$5,0 \cdot 10^{-3}$
Материал постоянного магнита	NdFeB
Марка электротехнической стали	3406

На основе исходных данных построена ДКЭМ МП исследуемой СЭМ с ДЗО в режиме холостого хода (рис. 12) при различных положениях зубца статора относительно полюсов ротора.

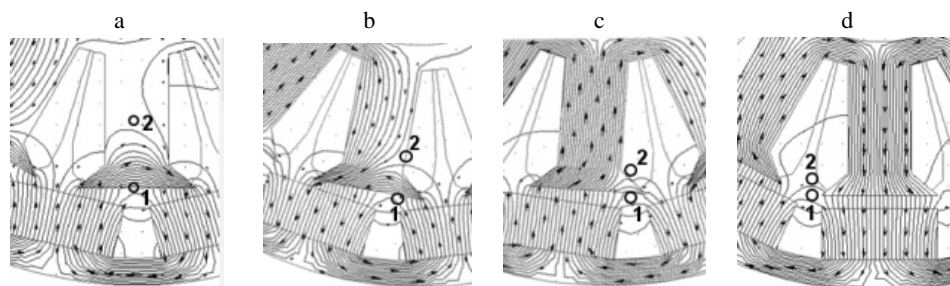


Рис. 12. Двумерная конечно-элементная модель магнитного поля синхронной электрической машины с дробными зубцовыми обмотками в режиме холостого хода: а – область 1; б – 2; в – 3; д – 4

Fig. 12. Two-dimensional finite element model of the magnetic field of the electric machine with fractional gear winding in idle mode: а – area 1; б – 2; в – 3; д – 4

Максимальный и минимальный потоки рассеяния через зубец показаны на рис. 12а, д, промежуточные значения потока – на рис. 12б, в. Точки 1 и 2 выбраны вдоль оси пары полюсов на нижней кромке зубца и на границе потока рассеяния через зубец статора соответственно.

В таком случае поток рассеяния через зубец статора может быть рассчитан как

$$\Phi_{\sigma}^z = |A_1 - A_2|l, \quad (22)$$

где  $A_1, A_2$  – магнитные векторные потенциалы в точках 1 и 2.

В табл. 2 приведены результаты расчета потоков рассеяния через зубец статора аналитическим и численным методами при различных положениях зубца статора относительно полюсов ротора (положения 1–4).

Таблица 2

**Результаты расчета потока рассеяния через зубец статора аналитическим и численным методами**  
**Results of calculating the scattering flux through the stator gear by analytical and numerical methods**

№ положения зубца статора относительно полюсов ротора	Аналитический метод $\Phi_{\sigma}^z \cdot 10^{-6}$ , Вб	Численный метод $\Phi_{\sigma}^z \cdot 10^{-6}$ , Вб	Погрешность, %
1	23,66	25,12	5,8
2	14,65	15,50	5,5
3	4,81	5,04	4,6
4	0,98	1,05	6,7

Расхождение результатов, полученных посредством аналитического и численного методов, не превышает 7 %. Такая погрешность приемлема для большинства инженерных расчетов и обусловлена принятыми допущениями при построении эквивалентной схемы магнитной цепи исследуемой электрической машины.

## ВЫВОДЫ

1. Выявлены особенности распределения магнитных потоков (основного, краевого эффекта, рассеяния) в магнитной системе синхронных электрических машин с дробными зубцовыми обмотками. Построены эквивалентные схемы магнитной цепи исследуемой электрической машины при различных положениях зубца статора относительно полюсов ротора и обоснована необходимость учета краевого эффекта и зависимости величины потока рассеяния через зубцы статора от координаты положения ротора.

2. Разработана аналитическая модель для определения потока рассеяния через зубцы статора синхронных электрических машин с дробными зубцовыми обмотками, учитывающая краевой эффект и зависимость величины потока рассеяния через зубцы статора от координаты положения ротора. Предложенная модель позволяет решить задачу количественного определения величины магнитного потока рассеяния через зубцы статора с высокой точностью. Практическая значимость разработанной аналитической модели заключается в возможности установления влияния геометрических параметров магнитной цепи на характер изменения периодической функции потока рассеяния через зубец статора с высокой точностью при наименьших временных затратах. Модель может применяться в процессе оптимизации синхронных электрических машин с дробными зубцовыми обмотками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольдек, А. И. Электрические машины. Машины переменного тока / А. И. Вольдек, В. В. Попов. СПб.: Питер, 2008. 350 с.
2. Levi, E. Multiphase Electric Machine for Variable Speed Applications / E. Levi // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2008. Vol. 55, № 5. P. 1893–1909. <https://doi.org/10.1109/tie.2008.918488>.
3. Шевченко, А. Ф. Электромеханические преобразователи энергии с модулированным магнитным потоком / А. Ф. Шевченко. Новосибирск: НГТУ, 1999. 340 л.
4. Сан, Ю. Погружные вентильные электродвигатели с зубцовым шагом обмотки статора / Ю. Сан. СПб.: СПбГМТУ, 2017. 153 л.
5. Менжинский, А. Б. Разработка уточненных электромагнитных моделей электрических генераторов возвратно-поступательного движения с постоянными магнитами / А. Б. Менжинский, А. Н. Малашин, П. Б. Менжинский // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2021. Т. 64, № 4. С. 291–302. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2021-64-4-291-302>.
6. Балагуров, В. А. Электрические генераторы с постоянными магнитами / В. А. Балагуров, Ф. Ф. Галтеев. М.: Энергоатомиздат, 1988. 280 с.
7. Балагуров, В. А. Электрические машины с постоянными магнитами / В. А. Балагуров, Ф. Ф. Галтеев, А. Н. Ларионов; под ред. А. Н. Ларионова. М. – Л.: Энергия, 1964. 480 с.
8. Пантелеев, С. В. Разработка системы векторного управления полупроводникового преобразователя, обеспечивающей полигармонический режим работы многофазной электрической машины / С. В. Пантелеев, А. Н. Малашин, А. Е. Каледа // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2020. Т. 65, № 3. С. 332–340. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2020-65-3-332-340>.
9. Иванов-Смоленский, А. В. Применение метода проводимостей зубцовых контуров для расчета синхронных машин с постоянными магнитами на поверхности ротора / А. В. Иванов-Смоленский, М. А. Аванесов, Е. В. Казьмин // Электричество. 2009. № 8. С. 42–51.
10. Ponomarev, P. Effect of Slot-and-Pole Combination on the Leakage Inductance and the Performance of Tooth-Coil Permanent-Magnet Synchronous Machines / P. Ponomarev, P. Lindh, J. Pyrhönen // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2013. Vol. 60, Iss.10. P. 4310–4317. <https://doi.org/10.1109/TIE.2012.2216246>.
11. Пантелеев, С. В. Анализ особенностей магнитного поля синхронной электрической машины с многофазной дробной зубцовой обмоткой в полигармоническом режиме работы / С. В. Пантелеев, А. Н. Малашин // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2021. Т. 66, № 3. С. 343–355. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2021-66-3-343-355>.
12. Честюнина, Т. В. Исследование многополюсных синхронных магнитоэлектрических генераторов с дробными зубцовыми обмотками / Т. В. Честюнина. Новосибирск: НГТУ, 2012. 176 л.
13. Хитерер, М. Я. Синхронные электрические машины возвратно-поступательного движения / М. Я. Хитерер, И. Е. Овчинников. СПб.: Корона принт, 2013. 368 с.
14. Тарашев, С. А. Вентильный линейный генератор для систем электропитания автономных объектов / С. А. Тарашев. Самара, 2011. 129 л.
15. Бабикова, Н. Л. Генератор возвратно-поступательного движения в автономной системе электроснабжения маломощных потребителей / Н. Л. Бабикова. Уфа, 2009. 147 л.
16. ELCUT Моделирование электромагнитных, тепловых и упругих полей методом конечных элементов. Версия 6.3.1 [Электронный ресурс]. СПб.: Тор, 2018. Режим доступа: [https://elcut.ru/downloads/manual\\_r\\_pocket.pdf](https://elcut.ru/downloads/manual_r_pocket.pdf). Дата доступа: 24.05.2018.
17. Менжинский, А. Б. Математическая модель генератора комбинированной конструкции возвратно-поступательного типа / А. Б. Менжинский, А. Н. Малашин, Ю. Г. Коваль // Вестник Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. 2018. № 2. С. 74–85.
18. Синицин, А. П. Совершенствование линейных генераторов с постоянными магнитами для автономных объектов / А. П. Синицин. Самара, 2013. 124 л.
19. Хвалин, Д. И. Моделирование электромагнитного поля мощной электрической машины / Д. И. Хвалин, О. Г. Кенсицкий, К. А. Кобзарь // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2021. Т. 64, № 2. С. 130–142. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2021-64-2-130-142>.

Поступила 04.11.2021 Подписана в печать 05.01.2022 Опубликована онлайн 31.05.2022

## REFERENCES

1. Vol'dek A. I., Popov V. V. (2008) *Electric Machines. AC Machines*. St. Petersburg, Peter Publ. 350 (in Russian).
2. Levi E. (2008) Multiphase Electric Machine for Variable Speed Applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55 (5), 1893–1909. <https://doi.org/10.1109/tie.2008.918488>.
3. Shevchenko A. F. (1999) *Electromechanical Energy Converters with Modulated Magnetic Flux*. Novosibirsk, NSTU. 340 (in Russian).
4. San Yu. (2017) *Submersible Valve Electric Motors with Gear Pitch of the Stator Winding*. St. Petersburg, SPSMTU. 153 (in Russian).
5. Menzhinski A. B., Malashin A. N., Menzhinski P. B. (2021) Development of Refined Electromagnetic Models of Reciprocating Electric Generators with Permanent Magnets. *Energetika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edinenii SNG = Energetika. Proceedings of CIS Higher Education Institutions and Power Engineering Associations*, 64 (4), 291–302. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2021-64-4-291-302> (in Russian).
6. Balagurov V. A., Galteev F. F. (1988) *Electric Machines with Permanent Magnets*. Moscow, Energoatomizdat Publ. 280 (in Russian).
7. Balagurov V. A., Galteev F. F., Larionov A. N. (1964) *Electric Machines with Permanent Magnets*. Moscow–Leningrad, Energiya Publ. 480 (in Russian).
8. Pantelev S. V., Malashin A. N., Kaleda A. E. (2020) Development of a Vector Control System of the Semiconductor Converter which Will Provide a Polyharmonic Operating Mode of a Polyphase Electric Machine. *Vesti Natsyonal'nai Akademii Navuk Belarusi. Seryya Fizika-Tekhnichnykh Navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-Technical Series*, 65 (3), 332–340. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2020-65-3-332-340> (in Russian).
9. Ivanov-Smolenskii A. V., Avanesov M. A., Kaz'min E. V. (2009) Application of the Method of Conductivity of Gear Contours for Calculating Synchronous Machines with Permanent Magnets on the Surface of the Rotor. *Elektrichestvo [Electricity]*, (8), 42–51 (in Russian).
10. Ponomarev P., Lindh P., Pyrhönen J. (2013) Effect of Slot-and-Pole Combination on the Leakage Inductance and the Performance of Tooth-Coil Permanent-Magnet Synchronous Machines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 60 (10), 4310–4317. <https://doi.org/10.1109/TIE.2012.2216246>.
11. Pantelev S. V., Malashin A. N. (2021) Analysis of Features of Magnetic Field of a Synchronous Electric Machine with a Multi-Phase Fractional Slot Winding in a Polyharmonic Mode of Operation. *Vesti Natsyonal'nai Akademii Navuk Belarusi. Seryya Fizika-Tekhnichnykh Navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-Technical Series*, 66 (3), 343–355. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2021-66-3-343-355> (in Russian).
12. Chestyunina T. V. (2012) *Research of Multipole Synchronous Magnetolectric Generators with Fractional Gear Windings*. Novosibirsk, NSTU. 176 (in Russian).
13. Khiterer M. Ya., Ovchinnikov I. E. (2013) *Synchronous Electric Reciprocating Machines*. St. Petersburg, Korona-Print Publ. 368 (in Russian).
14. Tarashev S. A. (2011) *Valve Linear Generator for Power Supply Systems of Autonomous Objects*. Samara. 129 (in Russian).
15. Babikova N. L. (2009) *Generator of Reciprocating Motion in the Autonomous Power Supply System of Low-Power Consumers*. Ufa. 147 (in Russian).
16. ELCUT Modeling of Electromagnetic, Thermal, and Elastic Fields by the Finite Element Method [Electronic Resource]. Version 6.3.1. St. Petersburg, Tor Publ. 2018. Available at: [https://elcut.ru/downloads/manual\\_r\\_pocket.pdf](https://elcut.ru/downloads/manual_r_pocket.pdf) (Accessed 24 May 2018).
17. Menzhinskii A. B., Malashin A. N., Koval' Yu. G. (2018) Mathematical Model of the Generator of the Combined Design of Reciprocating Type. *Vestnik Gomel'skogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta im. P. O. Sukhogo = Bulletin of Sukhoi State Technical University of Gomel*, (2), 74–85 (in Russian).
18. Sinitsin A. P. (2013) *Improvement of Linear Generators with Permanent Magnets for Autonomous Objects*. Samara. 124 (in Russian).
19. Hvalin D. I., Kensytskiy O. H., Kobzar K. O. (2021) Simulation of Electromagnetic Field of a Powerful Electrical Machine. *Energetika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edinenii SNG = Energetika. Proceedings of CIS Higher Education Institutions and Power Engineering Associations*, 64 (2), 130–142. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2021-64-2-130-142> (in Russian).