

## МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ, МЕТАЛЛУРГИЯ

УДК 621.1

*Р. И. ЕСЬМАН, Е. И. МАРУКОВИЧ*

### РАСЧЕТ ТЕПЛОВОГО И ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЙ КОРПУСНОЙ ОТЛИВКИ И ФОРМЫ В ПРОЦЕССЕ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

*Белорусский национальный технический университет*

*(Поступила в редакцию 22.02.2013)*

**Введение.** В современном производстве машиностроительных конструкций широко используются корпусные литые изделия, которые являются ответственными элементами многих машин. В зависимости от дальнейшего применения литые изделия должны обладать оптимальным сочетанием физико-механических и технологических свойств, отвечающих требованиям их эксплуатации.

На основе компьютерного моделирования разработан комплексный подход к созданию управляемых технологических процессов получения корпусных литых изделий с заданными свойствами.

Проведен анализ теплового и термонапряженного состояний корпусной цилиндрической отливки и формы в процессе их взаимодействия, позволяющий обосновать и разработать эффективные методы воздействия на процесс формирования отливки, направленные на улучшение качества литых заготовок, повышение надежности и стабильности процессов их изготовления.

**Математическая модель.** Разработана математическая модель формирования цилиндрических литых изделий корпусного типа в комбинированной форме. Особый интерес представляют термодиформационное взаимодействие полей температур и температурных напряжений, а также их взаимное влияние в процессах затвердевания и охлаждения отливок цилиндрического сечения в условиях несимметричного теплообмена в системе тел неметаллический стержень – отливка – металлическая матрица с теплоизоляционным покрытием. При решении задачи учитывается нелинейный характер внешнего и внутреннего термических сопротивлений, переменные теплофизические характеристики материалов стержневого блока, корпусной высокопрочной отливки, подвижных металлических матриц и теплозащитного покрытия.

Рассмотрим теплофизические особенности процесса охлаждения цилиндрической осесимметричной отливки в металлической форме с песчаным стержнем. С внутренней поверхности матрицы покрыты слоем теплозащитного покрытия толщиной  $\delta_{кр}$ . В процессе охлаждения в нестационарном температурном поле возникают температурные напряжения и металлическая форма деформируется за счет нагревания. В результате взаимодействия полей температур и напряжений после образования в отливке твердой корки в контактной зоне возникает газовый зазор, изменяющийся во времени. В общем случае охлаждение отливки с наружной поверхности происходит за счет теплопередачи через газозащитный слой в матрицу.

С внутренней поверхности отливка охлаждается за счет теплопроводности и аккумуляции теплоты неметаллическим стержневым блоком. Наружная поверхность формы охлаждается за счет свободной конвекции в окружающую среду в соответствии с законом Ньютона–Рихмана.

Таким образом, располагаем системой цилиндрических тел (матрица, отливка, стержневой блок), одно из которых (отливка) в процессе охлаждения изменяет агрегатное состояние. Найдем

решение температурного поля для многослойного цилиндрического тела с переменными теплофизическими характеристиками каждого слоя. В этих условиях температурное поле описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений нестационарной теплопроводности (ввиду нелинейности теплового потока и граничных условий) с соответствующими краевыми условиями.

Изменение температуры по радиусу в любой момент времени для каждого элемента многослойного тела определяется из решения дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности

$$c_j(T_j)\rho_j(T_j)\frac{\partial T_j(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r\lambda_j(T_j) \frac{\partial T_j(r,\tau)}{\partial r} \right], \quad (1)$$

где  $j$  – индекс, определяющий принадлежность уравнения к различным слоям составного тела (при  $j = 1$  – отливка;  $j = 2$  – матрица;  $j = 3$  – стержневой блок);  $c_j(T_j)$  – теплоемкость  $j$ -го слоя как функции температуры;  $\rho_j(T_j)$  – плотность  $j$ -го слоя как функции температуры;  $\lambda_j(T_j)$  – коэффициент теплопроводности  $j$ -го слоя как функция температуры;  $r$  – цилиндрическая координата (радиус).

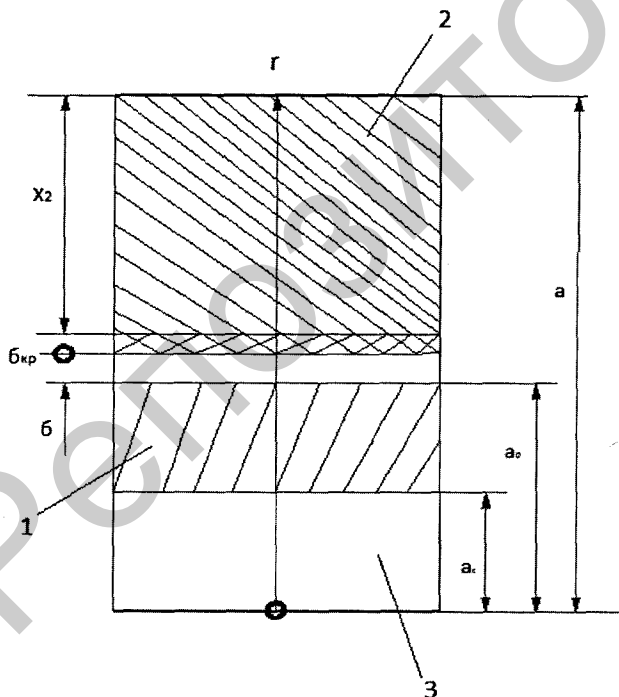
Уравнение для краски на поверхности матрицы введено с целью получения идентичных условий теплового сопряжения на границе слоев, которые могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \lambda_j(T_j) \frac{\partial T_j}{\partial r} = \lambda_{j-1}(T_{j-1}) \frac{\partial T_{j-1}}{\partial r} \text{ при } r = R_j; \\ T_j = T_{j-1}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $R_j$  – радиус сопряжения  $j$ -го и  $(j-1)$ -го слоев.

Сопряжения стержня и отливки в тепловом отношении происходит при непрерывном изменении температуры. При этом стержень и отливка могут рассматриваться как единый слой, теплофизические свойства которого терпят разрыв на границах сопряжения слоев. Введем обозначения:

$$\lambda, c, \rho = \begin{cases} \lambda_3, c_3, \rho_3 - \text{в песчаном стержне;} \\ \lambda_2, c_2, \rho_2 - \text{в металлической матрице;} \\ \lambda_1, c_1, \rho_1 - \text{в отливке.} \end{cases}$$



Расчетная схема: 1 – отливка; 2 – матрица; 3 – стержневой блок

Расчетную схему (рисунок) можно рассматривать как систему, состоящую из двух тел, причем первое тело представлено как совокупность стержня и отливки, а второе тело – металлической матрицей. Соответственно температуру и теплофизические характеристики в рассматриваемых телах будем обозначать индексами 1 или 2. Тогда задача сводится к решению уравнений

$$\begin{aligned} c_1\rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \text{ при } 0 \leq r \leq a_0; \\ c_2\rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) \text{ при } a_0 \leq r \leq a. \end{aligned} \quad (3)$$

при граничных условиях

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = 0, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = -\alpha_2(T_2 - T_{cp}). \quad (4)$$

Граничные условия на общей поверхности матрицы и отливки (при  $r = a_0$ ) могут быть записаны в следующем виде:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = \frac{\lambda_{кр}}{\delta_{кр}} (T_{кр} - T_2) = \frac{(T_1 - T_2) \left( \frac{\lambda_{в}}{\delta} + \alpha_{л} \right) \frac{\lambda_{кр}}{\delta_{кр}}}{\frac{\lambda_{кр}}{\delta_{кр}} + \frac{\lambda_{в}}{\delta} + \alpha_{л}}. \quad (5)$$

В уравнении (5) коэффициент лучистого теплообмена между отливкой и поверхностью краски через слой воздуха равен

$$\alpha_{л} = \varepsilon_{1/2} \sigma_0 (T_1 + T_{кр}) (T_1^2 + T_{кр}^2),$$

где  $T_{кр}$  – температура поверхности краски;  $\sigma_0$  – постоянная излучения абсолютно черного тела (постоянная Стефана–Больцмана),  $\sigma_0 = 5,668 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>);  $\varepsilon_{1/2}$  – интегральная степень черноты поверхности матрицы.

На оси симметрии ставится условие

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0. \quad (6)$$

Величина газового зазора как функция времени  $\delta_{в}(\tau)$  определяется из решения соответствующей задачи термоупругости [1].

В процессе охлаждения отливки происходит переход из жидкого состояния в твердое. В течение некоторого промежутка времени имеет место двухфазное состояние вещества. В период фазового перехода для отливки (при  $j = 1$ ) вместо уравнения (1) рассматривается уравнение теплопроводности, теплофизические характеристики в котором сглаживаются в некоторой области вблизи движущегося фронта границы фаз [2].

На границе раздела фаз температура постоянная и равная температуре фазового перехода  $T(r, \tau) = T_{\phi}$ . Скорость движения границы фазового перехода  $d\xi/d\tau$  удовлетворяет уравнению (условие Стефана)

$$\lambda_{1г} \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{x=\xi+0} - \lambda_{1ж} \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{x=\xi-0} = r_{\phi} \rho \frac{d\xi}{d\tau},$$

где  $r_{\phi}$  – удельная теплота фазового перехода (удельная теплота кристаллизации);  $\rho$  – плотность материала отливки на фронте фазового перехода.

Вводя в рассмотрение  $\delta$ -функцию и разрывные теплофизические характеристики, уравнение (1) для отливки при  $j = 1$  с учетом условий на границе фазового перехода запишем в следующем виде:

$$\rho_1(T_1) \left[ c_1(T_1) + r_{\phi} \delta(T_1 - T_{\phi}) \right] \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial r} \right]. \quad (7)$$

Здесь приняты обозначения для теплофизических коэффициентов:

удельная массовая теплоемкость

$$c_1(T_1) = \begin{cases} c_{1г}(T_1) & \text{при } T_1 < T_{\phi}; \\ c_{1ж}(T_1) & \text{при } T_1 > T_{\phi}; \end{cases}$$

коэффициент теплопроводности

$$\lambda_1(T_1) = \begin{cases} \lambda_{1г}(T_1) & \text{при } T_1 < T_{\phi}; \\ \lambda_{1ж}(T_1) & \text{при } T_1 > T_{\phi}; \end{cases}$$

плотность материала отливки

$$\rho_1(T_1) = \begin{cases} \rho_{1г}(T_1) & \text{при } T_1 < T_{\phi}; \\ \rho_{1ж}(T_1) & \text{при } T_1 > T_{\phi}. \end{cases}$$

Для расчета температурных напряжений в металлической форме рассмотрим бесконечно длинный полый цилиндр с внутренним  $a_0$  и наружным  $a$  радиусами, в котором температура распределена неравномерно по поперечному сечению. При этом возникают напряжения двух родов: радиальные  $\sigma_r$  и тангенциальные  $\sigma_\theta$ . Относительная деформация в радиальном направлении рассчитывается по формуле

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_r - \sigma_\theta)] - \nu\varepsilon_z + (1 + \beta T\nu), \quad (8)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\beta$  – коэффициент термического расширения;  $E$  – модуль упругости;  $\varepsilon_z$  – постоянная деформация вдоль оси  $z$ ;  $\sigma_r, \sigma_\theta$  – радиальные и тангенциальные напряжения, определяемые по формулам соответственно:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{1-\frac{a_0^2}{r^2}}{a^2-a_0^2} \int_{a_0}^a \beta r [T(r)-T_0] dr - \frac{1}{r^2} \int_{a_0}^r \beta r [T(r)-T_0] dr \right\}; \quad (9)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu} \left\{ \frac{1+\frac{a_0^2}{r^2}}{a^2-a_0^2} \int_{a_0}^r \beta r [T(r)-T_0] dr + \frac{1}{r^2} \int_{a_0}^r \beta r [T(r)-T_0] dr - \beta [T(r)-T_0] \right\}. \quad (10)$$

Постоянная деформация вдоль оси  $z$  вычисляется из условия

$$\int_{a_0}^a r \sigma_z dr = 0,$$

где

$$\sigma_z = E(\varepsilon_z - \beta T) + \nu(\sigma_r + \sigma_\theta).$$

Используя выражение для  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , находим величину постоянной деформации вдоль оси  $z$ :

$$\varepsilon_z = \frac{2}{a^2-a_0^2} \int_{a_0}^a \beta r [T(r)-T_0] dr. \quad (11)$$

Для построения разностной схемы и удобства вычислительного процесса перепишем задачу в безразмерных параметрах [3].

Введем разрывные теплофизические характеристики. Предположим, что на каждом слое они принимают значения, соответствующие материалу слоя, и терпят разрыв на границах слоев.

За характерный размер выберем наружный радиус матрицы  $a$ , и, обозначив безразмерную температуру в теле 1 через  $u$ , а в теле 2 через  $v$ , сведем задачу к решению системы уравнений

$$\begin{aligned} a^2 c_1 \rho_1 \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \text{ при } 0 \leq r \leq \bar{a}_0; \\ a^2 c_2 \rho_2 \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) \text{ при } \bar{a}_0 \leq r \leq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= 0 \text{ при } r = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{\alpha_2 a}{\lambda_2} (v - v_{cp}) \text{ при } r = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

и условиях контакта

$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial r} = -\lambda_2 \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{(u-v) \left( \frac{\lambda_B}{\delta} + \alpha_L \right) \frac{\lambda_{кр}}{\delta_{кр}}}{\frac{\lambda_{кр}}{\delta_{кр}} + \frac{\lambda_B}{\delta} + \alpha_L}. \quad (14)$$

Начальные условия

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad v(r, 0) = v_0(r). \quad (15)$$

Совокупность выражений (12)–(15) представляет поставленную задачу и решается численным методом [1].

**Заключение.** В результате численного эксперимента, теоретических и экспериментальных исследований изучены теплофизические особенности формирования корпусных цилиндрических отливок в условиях несимметричного теплообмена.

Решены сопряженные задачи затвердевания и охлаждения отливок корпусного типа из высокопрочных алюминиевых сплавов в комбинированных литейных формах.

Представленные методики и результаты исследований могут быть использованы при создании новых энергоэффективных и ресурсосберегающих технологий формирования высококачественных отливок на подвижных кристаллизаторах при литье выжиманием, непрерывном литье, литье под низким и регулируемым давлением.

### Литература

1. Есьман Р. И., Жмакин Н. П., Шуб Л. И. Расчеты процессов литья. Мн., 1977.
2. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., 2005.
3. Есьман Р. И., Марукович Е. И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2012. № 3 С. 5–9.

R. I. ESMAN, E. I. MARUKOVICH

### CALCULATION OF HEAT AND HEAT-STRESS STATES OF CASE CAST AND MOULD DURING THEIR INTERACTION

#### Summary

A mathematical model of formation of axis-symmetrical case cast in a combined mould is suggested. A numerical solution to the problem of non-stationary heat fields and heat stresses within a cast and a mould during their interaction is obtained.

The developed mathematical model is used to calculate solidification and cooling of high-strength casts of a case type. A velocity of movement of a front of phase transformations is determined from the solution to the Stefan's problem, Dirac's  $\delta$  function is used. The solution uses numerical methods and specially developed algorithms.