УДК 621.1

Р. И. ЕСЬМАН, Е. И. МАРУКОВИЧ

РАСЧЕТ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В КОНТАКТНОЙ ЗОНЕ ОТЛИВКИ И ФОРМЫ

Белорусский национальный технический университет

(Поступила в редакцию 19.09.2013)

Введение. В работе исследуется сложный теплообмен в системе сопряженных тел отливка – газовоздушный зазор – теплоизоляционное покрытие – металлическая форма – окружающая среда. Разработана методика расчета температурных напряжений и деформаций литых заготовок прямоугольного и цилиндрического сечений на стадиях затвердевания и охлаждения отливок из высокопрочных алюминиевых сплавов. Проведен анализ оптимальных параметров получения высокопрочных отливок в специальных технологиях литья.

Математическая модель. Математическая модель процессов затвердевания и охлаждения отливки в литейной форме включает в себя: систему дифференциальных уравнений, описывающих температурное поле в отливке и форме, и краевые условия, состоящие из начальных условий (распределение температуры по сечению тел в начальный момент времени), граничных условий, выражающих закон теплового взаимодействия системы сопряженных тел многослойной стенки, геометрических условий и теплофизических свойств взаимодействующих тел.

В результате исследований установлено [1], что на контактной границе отливка – металлическая форма возникает температурный градиент, который объясняется наличием между отливкой и формой контактной поверхности, состоящей из слоев теплоизоляционного покрытия (краски) и газового зазора, толщина которого изменяется во времени и в пространстве. Краска и газовая прослойка (продукты сублимации, выгорания и разложения кокильных красок, газовыделений из отливки и формы и т. п.) оказывают значительное термическое сопротивление, существенно влияющее на процесс формирования отливки. При разработке математической модели следует учитывать термодеформационное взаимодействие полей температур, температурных напряжений и деформаций, а также их взаимное влияние в процессах затвердевания и охлаждения отливок в условиях нестационарного теплообмена.

Располагаем системой сопряженных тел (форма, отливка, покрытие), одно из которых (отливка) в процессе охлаждения изменяет агрегатное состояние. В данной работе анализ тепломассопереноса проводится с учетом фазовых превращений и зависимостей теплофизических характеристик сопряженных тел от температуры.

Рассмотрим теплофизические особенности процессов затвердевания и охлаждения прямоугольной и цилиндрической отливок в металлической форме. С внутренней поверхности форма покрыта слоем краски толщиной $\delta_{кр}$. В процессе охлаждения в нестационарном температурном поле возникают температурные напряжения и металлическая форма деформируется за счет нагревания. В результате взаимодействия полей температур и напряжений после образования в отливке твердой корки в контактной зоне возникает газовый зазор, изменяющийся во времени. В общем случае охлаждение отливки с наружной поверхности происходит за счет теплопередачи через газовоздушный слой, покрытие, металлическую форму в окружающую среду.

Расчет заготовки прямоугольного сечения. Найдем распределение температуры в системе сопряженных тел для каждого момента времени. В этих условиях температурное поле многослойной стенки описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений переноса теплоты (ввиду нелинейности потоков теплоты и граничных условий) с соответствующими краевыми условиями [2]. Изменение температуры по сечению (вдоль координаты x) в любой момент времени для каждого слоя многослойной стенки определяется из решения системы дифференциальных уравнений теплопроводности:

$$c_1(T_1)\rho_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial y}\right]; \qquad (1^*)$$

где i – индекс, определяющий принадлежность уравнения и параметров к различным слоям многослойной стенки; $c_i(T_i)$ – удельная теплоемкость i-го слоя как функция температуры; $\rho_i(T_i)$ – плотность материала i-го слоя как функция температуры; $\lambda_i(T_i)$ – коэффициент теплопроводности i-го слоя как функция температуры; x – координата, направленная по нормали к поверхности стенки.

Поле температур в отливке ($i = 1$) и форме ($i = 2$) описывается дифференциальными уравнениями:

$$c_1(T_1)\rho_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,y,t)}{\partial y}\right]; \qquad (1)$$

$$c_2(T_2)\rho_2(T_2)\frac{\partial T_2(x,y,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2(x,y,t)}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2(x,y,t)}{\partial y}\right], \qquad (2)$$

где $c_1, \rho_1, \lambda_1, T_1$ и $c_2, \rho_2, \lambda_2, T_2$ – теплофизические характеристики и температуры отливки и формы соответственно.

Сформулируем граничные и контактные условия. Контактные условия ставятся на общей границе отливки и формы исходя из условий сопряжений.

Рассматривая теплоотдачу от отливки к форме через двухслойную стенку (воздух + покрытие), граничные условия можно записать в виде

$$-\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}=-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}=\frac{[T_1(y,t)-T_2(y,t)]\left[\dfrac{\lambda_{\text{в}}}{\delta(y,t)}+\alpha_{\text{л}}(y,t)\right]\dfrac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}}}{\dfrac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}}+\dfrac{\lambda_{\text{в}}}{\delta(y,t)}+\alpha_{\text{л}}(y,t)} \quad \text{при } x=a_o; \quad 0\le y\le b_o; \qquad (3)$$

$$-\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial y}=-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial y}=\frac{[T_1(x,t)-T_2(x,t)]\left[\dfrac{\lambda_{\text{в}}}{\delta(x,t)}+\alpha_{\text{л}}(x,t)\right]\dfrac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}}}{\dfrac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}}+\dfrac{\lambda_{\text{в}}}{\delta(x,t)}+\alpha_{\text{л}}(x,t)} \quad \text{при } y=b_o; \quad 0\le x\le a_o, \qquad (4)$$

где $\lambda_{\text{покр}}, \lambda_{\text{в}}$ – теплопроводность покрытия и воздуха; $\delta(x,t)$ – зазор в контакте $y=b_o$ в момент времени t; $\delta(y,t)$ – зазор в контакте $x=a_o$ в момент времени t;

$$\alpha_{\text{л}}=\varepsilon_{1/2}\sigma(T_1+T_{\text{покр}})(T_1^2+T_{\text{покр}}^2), \qquad (5)$$

где $T_{\text{покр}}$ – температура поверхности покрытия, смежной с отливкой, определяется так:

$$T_{\text{покр}}=\frac{T_2\dfrac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}}+T_1\left(\dfrac{\lambda_{\text{в}}}{\delta}+\alpha_{\text{л}}\right)}{\dfrac{\lambda_{\text{покр}}}{\delta_{\text{покр}}}+\dfrac{\lambda_{\text{в}}}{\delta}+\alpha_{\text{л}}}. \qquad (6)$$

Значения T_1, T_2 и δ берутся в соответствующей точке контактной поверхности, в которой определяются $T_{\text{покр}}$ и $\alpha_{\text{л}}$. При записи условий (3) и (4) учитывали только процесс теплопроводности через покрытие, слой воздуха и процесс теплового излучения в газовоздушном зазоре. Процессом конвекции в зазоре пренебрегаем.

Продолжим формулировку граничных условий. На осях симметрии можно записать

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0 \text{ при } y = 0;$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0 \text{ при } x = 0.$$

Предполагая, что теплообмен с наружной поверхности формы можно представить по закону Ньютона, будем иметь

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \alpha(T_2 - T_\infty) \text{ при } x = a;$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \alpha(T_2 - T_\infty) \text{ при } y = b,$$

где T_∞ – температура внешней среды; α – коэффициент теплоотдачи с наружной поверхности формы.

Предполагаем, что газовоздушный зазор δ изменяется по параболическому закону:

$$\delta_j = \delta_1^{\max}\left[1 - \left(\frac{2j+1}{M_2 + N_2}\right)^2\right];$$

$$\delta_i = \delta_2^{\max}\left[1 - \left(\frac{2i+1}{M_1 + N_1}\right)^2\right],$$

где $\delta_1^{\max}$ и $\delta_2^{\max}$ – деформации формы в точках: $i = 0$; $j = M_2$; $i = M_1$; $j = 0$ соответственно.

Получаем

$$\delta_2^{\max} = -\frac{3}{2}\frac{\mathrm{mom}_1 (2M_1 h_1)^2}{\left[(N_2 - M_2)h_2\right]^3 E};$$

$$\delta_1^{\max} = -\frac{3}{2}\frac{\mathrm{mom}_2 (2M_2 h_2)^2}{\left[(N_1 - M_1)h_1\right]^3 E},$$

где mom_1 и mom_2 – максимальные моменты изгиба в продольной и поперечной балках формы, определяются таким образом:

$$\mathrm{mom}_1 = L\sum_{j=M_2}^{N_2} \varepsilon_j \left(j - \frac{M_2 + N_2}{2}\right)\sigma_j,$$

где $\varepsilon_j = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad j = M_2 \quad \text{или} \quad j = N_2; \\ 1 \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$

$$\mathrm{mom}_2 = L\sum_{i=M_1}^{N_1} \varepsilon_i \left(i - \frac{M_1 + N_1}{2}\right)\sigma_i,$$

где $\varepsilon_i = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad i = M_1 \quad \text{или} \quad i = N_1; \\ 1 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$

Напряжения в сечениях стенок формы по осям:

$$\sigma_i = -\beta_i E\left[\left(\frac{\upsilon_{i,0}+\upsilon_{i,-1}}{2}+1\right)T_0 - T_{2_0}\right] + \frac{1}{N_1 - M_1}\sum_{i=M_1}^{N_1} \varepsilon_i \beta_i E\left[\left(\frac{\upsilon_{i,0}+\upsilon_{i,-1}}{2}+1\right)T_0 - T_{2_0}\right],$$

$$\sigma_j = -\beta_j E\left[\left(\frac{\upsilon_{0,j}+\upsilon_{-1,j}}{2}+1\right)T_0 - T_{2_0}\right] + \frac{1}{N_2 - M_2}\sum_{j=M_2}^{N_2} \varepsilon_j \beta_j E\left[\left(\frac{\upsilon_{0,j}+\upsilon_{-1,j}}{2}+1\right)T_0 - T_{2_0}\right],$$

где β_i и β_j – коэффициенты температурного расширения материала; ε_i – относительная деформация.

Расчет заготовки цилиндрического сечения. Найдем решение температурного поля для многослойного цилиндрического тела с переменными теплофизическими характеристиками каждого слоя. Дифференциальное уравнение теплопроводности для каждого из слоев в цилиндрических координатах имеет вид

$$c_j(T_j)\rho_j(T_j)\frac{\partial T_j(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda_j(T_j)\frac{\partial T_j(r,t)}{\partial r}\right]. \quad (7)$$

Здесь j – индекс, определяющий принадлежность уравнения к различным слоям составного тела, представляющего систему набора коаксиальных труб; $c_j\,(T_j)$ – теплоемкость j-го слоя как функция температуры; r – цилиндрическая координата (радиус); $\lambda_j\,(T_j)$ – коэффициент теплопроводности j-го слоя как функция температуры.

Уравнение для покрытия введено с целью получения идентичных условий теплового сопряжения на границе слоев, которые могут быть записаны в виде

$$\begin{cases}\lambda_j(T_j)\dfrac{\partial T_j}{\partial r} = \lambda_{j-1}(T_{j-1})\dfrac{\partial T_{j-1}}{\partial r} \ \text{при}\ r = R_j;\\ T_j = T_{j-1},\end{cases} \quad (8)$$

где R_j – радиус сопряжения j-го и (j–1)-го слоев.

Для расчета температурных напряжений в металлической форме рассмотрим бесконечно длинный полый цилиндр с внутренним a_0 и наружным a радиусами, в котором температура распределена по поперечному сечению неравномерно. При этом возникают напряжения двух родов: радиальные σ_r и тангенциальные σ_Θ. Относительная деформация в радиальном направлении рассчитывается по формуле

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_r - \nu(\sigma_r - \sigma_\Theta)\right] - \nu\varepsilon_z + (1+\beta T\nu), \quad (9)$$

где ν – коэффициент Пуассона; β – коэффициент термического расширения; E – модуль упругости; ε_z – постоянная деформация вдоль оси z; σ_r, σ_Θ – радиальные и тангенциальные напряжения, определяемые по формулам соответственно:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu}\left\{\frac{1-\dfrac{a_0^2}{r^2}}{a^2-a_0^2}\int_{a_0}^{a}\beta r\left[T(r)-T_0\right]dr - \frac{1}{r^2}\int_{a_0}^{r}\beta r\left[T(r)-T_0\right]dr\right\}; \quad (10)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\nu}\left\{\frac{1+\dfrac{a_0}{r^2}}{a^2-a_0^2}\int_{a_0}^{b}\beta r\left[T(r)-T_0\right]dr + \frac{1}{r^2}\int_{a_0}^{r}\beta r\left[T(r)-T_0\right]dr - \beta\left[T(r)-T_0\right]\right\}. \quad (11)$$

Постоянная деформация вдоль оси z вычисляется из условия

$$\int_{a_0}^{a} r\sigma_z dr = 0,$$

где $\sigma_z = E(\varepsilon_z - \beta T) + \nu(\sigma_r + \sigma_\Theta)$.

Используя выражение для σ_r и σ_Θ, находим величину постоянной деформации вдоль оси z:

$$\varepsilon_z = \frac{2}{a^2 - a_0^2} \int_{a_0}^{a} \beta r [T(r) - T_0]\, dr. \quad (12)$$

Реализация решения задачи сложного теплопереноса осуществлена численными методами по разработанным алгоритмам [1].

Заключение. Разработана математическая модель и приведено численное решение сложного теплообмена в контактной зоне отливки и металлической формы с учетом температурных деформаций металлической формы и усадки материала отливки в процессах затвердевания и охлаждения.

Результаты численного эксперимента позволяют определить характер распределения температуры, динамику температурных напряжений и деформаций в условиях изменяющегося во времени газовоздушного зазора между отливкой и покрытием формы.

Представленное решение задачи теплопереноса в системе сопряженных тел может быть использовано для определения оптимальных режимных параметров получения высококачественных отливок сложной геометрии из высокопрочных алюминиевых сплавов.

Литература

1. *Есьман Р. И., Жмакин Н. П., Шуб Л. И.* Расчеты процессов литья. Мн., 1977.
2. *Есьман Р. И., Марукович Е. И.* // Весці НАН Беларусі. Сер.-фіз. тэхн. навук. 2012. № 3. С. 5–9.

R. I. ESMAN, E. I. MARUKOVICH

CALCULATION OF HEAT TRANSFER IN THE CONTACT AREA OF CASTING AND MOLD

Summary

A mathematical model for calculation of heat fields, thermal stresses and strains in castings having rectangular and circular sections is presented. It can be used for calculation of solidification and cooling of high-strength castings. The solution is realized by numeric methods according developed algorithms.